Несколько ответов к вопросам первого задания осеннего семестра.

1. *Материальная точка – геометрическая точка, которой поставлено в соответствие положительное число* m *- масса.*
2. *Системой отсчета (баз добавления слова геометрическая) в механике называется геометрическая система отсчета (геометрическая твердая среда), дополненная «часами», находящимися в каждой точке рассматриваемой геометрической твердой среды и синхронизированными по времени (время течет независимо от положения часов). Геометрическая твердая среда – континуальное множество геометрических точек, расстояния между которыми фиксированы.(А12)*
3. *Траектория – кривая, по которой движется точка [тело] (А15)*
4. *Скорость точки* $\vec{\upsilon}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$
5. *Ускорение* $\vec{W}(t) = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
6. *Способы задания движения: Координатный способ предусматривает введение обобщенных координат. Это любые три независимые величины, однозначно задающие положение точки в пространстве. Обознаются:* $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ *Естественный способ задания движения материальной точки Движение рассматривается вдоль конкретной заданной траектории, а в качестве параметра выступает длина дуги траектории* s. *Маркеев выделяет еще векторный способ (задание радиус-вектора, но по сути это то, же, что и задание координат)*
7. ↑↑↑
8. *декартовы координаты* x, y, z *(см. рис. 1).Эта система ортогональных осей неподвижна. С осями* x, y, z *связываются орты* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, *соответственно*
9. *Цилиндрические координаты: x = rcos φ, y = rsin φ, z=z. Полярные координаты – частный случай цилиндрических при z=const*
10. *В полярных координатах* ρ, φ *(* $z = const$ *) для компонент скоростей вдоль координатных линий* ρ *и* φ *вводятся, соответственно, термины:* $\boxed{\upsilon_\rho = \dot{\rho}}$ *- радиальная скорость,* $\boxed{\upsilon_\varphi = \rho\dot{\varphi}}$ *- трансверсальная скорость.* $\boxed{W_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2}$ *- радиальное ускорение,* $\boxed{W_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}}$ *- трансверсальное ускорение.*
11. *Если заданы сферические координаты точки, то переход к декартовым осуществляется по формулам:* $$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$
12. *Это любые три независимые величины, однозначно задающие положение точки в пространстве. Обознаются:* $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$.

13. *Наряду с обобщенными координатами вводятся координатные линии – линии, которые описывает точка при изменении каждой из координат при фиксированных других. Выделяется произвольный момент времени* t_0 *.* *Фиксируется* q_2, q_3*, т.е.* $q_1(t_0+t), q_2(t_0), q_3(t_0)$*. Эта даст координатную линию* q_1 *. Аналогично:* $q_1(t_0), q_2(t_0+t), q_3(t_0)$ *даст координатную линию* q_2*, и* $q_1(t_0), q_2(t_0), q_3(t_0+t)$ *даст координатную линию* q_3

14. *По правилам взятия производной сложной функции*

$\vec{\upsilon}(t) = \dfrac{d\vec{r}\left(q_1(t), q_2(t), q_3(t)\right)}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i$ *Орты:* $\boxed{\vec{e}_i = \dfrac{1}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}$ *. Вводят величины*

$\boxed{H_i = \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}}$ *- коэффициенты Ламе. С их помощью выражение для скорости принимает вид:* $\boxed{\vec{\upsilon}(t) = \sum\limits_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \vec{e}_i}$ *.*

15. *Вводятся орты* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *(локальный базис) - единичные векторы по касательным к координатным линиям* $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$*. Каждому моменту времени, в общем, соответствует своя конфигурация ортов. Они могут быть неортогональны.*

16. $\boxed{\vec{\upsilon}(t) = \sum\limits_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \vec{e}_i}$

17. *Для нахождения коэффициентов Ламе можно использовать формулу* $\boxed{ds_i = H_i dq_i}$ *, где* ds_i *- элемент дуги вдоль соответствующей координатной линии* q_i*. В декартовых координатах, например, все коэффициенты Ламе равны единице, и* $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

18. *Оси криволинейных координат не всегда ортогональны, поэтому стараются использовать ортогональные, для которых:* $\boxed{\upsilon^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} H_i^2 \dot{q}_i^2}$

19. $\boxed{W_{q_i} = \dfrac{1}{H_i}\left(\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right)\right) - \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right)\right)}$

Цилиндрические координаты:

$$W_\rho = \frac{1}{H_\rho}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot\rho}\left(\frac{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2}{2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2}{2}\right)\right)=\ddot\rho-\rho\dot\varphi^2$$

$$W_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}\left(\frac{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2}{2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2}{2}\right)\right)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\varphi\right)-0\right)=\rho\ddot\varphi+2\dot\rho\dot\varphi$$

$$W_z = \frac{1}{H_z}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot z}\left(\frac{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2}{2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2}{2}\right)\right)=\ddot z$$

Рассмотрим сферические координаты. Пользуясь формулой $ds_i = H_i dq_i$*, находим*

$$\begin{matrix} H_r = 1 \\ H_\theta = r \\ H_\varphi = r\sin\theta \end{matrix}$$ *. Тогда* $W_r = \ddot r - r\left(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta\right)$*,* $W_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\theta\right)-r^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\right)$

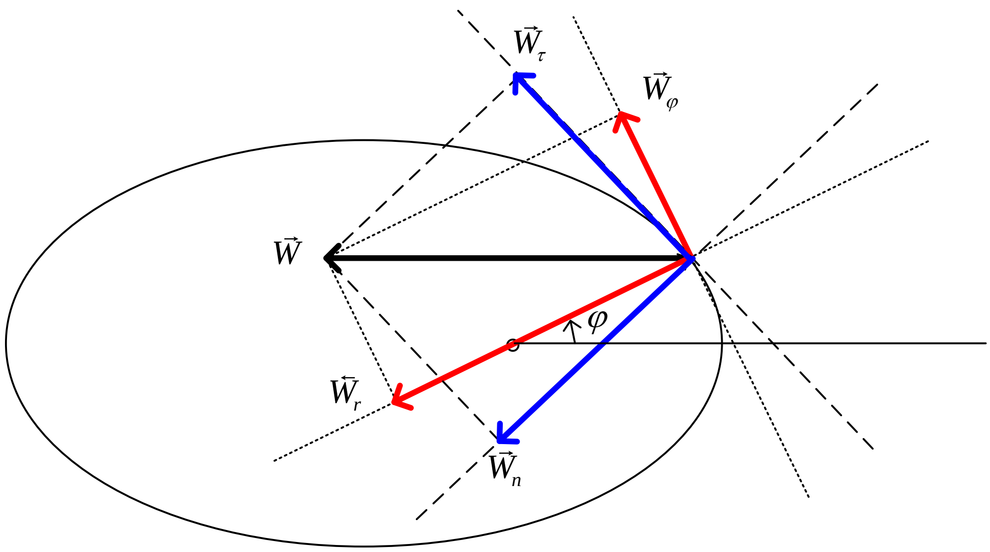
$$W_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\varphi\sin^2\theta\right)-0\right)$$

20. *Естественный способ задания движения. Движение рассматривается вдоль конкретной заданной траектории, а в качестве параметра выступает длина дуги траектории* s*. Вводится естественный трехгранник Дарбу, состоящий из ортогональных ортов касательной, нормали и бинормали к данной точке траектории (*$\vec b = \left[\vec\tau\times\vec n\right]$*). Скорость и ускорение:* $\boxed{\vec\upsilon = \frac{ds}{dt}\vec\tau = \upsilon\vec\tau}$

$\boxed{\vec W = \frac{d\upsilon}{dt}\vec\tau+\upsilon^2\frac{d\vec\tau}{ds}=\frac{d\upsilon}{dt}\vec\tau+\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec n = W_\tau\vec\tau+W_n\vec n}$*, где где* ρ *- радиус кривизны траектории.*

21. *Касательный орт направлен по касательной к траектории в данной точке, нормаль к центру кривизны траектории, а бинормаль строится как векторное произведение* $\vec b = \left[\vec\tau\times\vec n\right]$*. [Центр кривизны это центр соприкасающейся окружности (окружность, являющаяся наилучшим приближением заданной кривой в окрестности данной точки. В этой точке кривая и означенная окружность испытывают касание, порядок которого не ниже 2.) с радиусом 1/k. (W)]*
22. *Естественный трехгранник Дарбу состоит из ортогональных ортов касательной, нормали и бинормали к данной точке траектории*
23. *См. п. 20 ↑↑↑*
24. *См. п. 20 ↑↑↑*

25.



26. Твердое тело – такая совокупность материальных точек, что расстояние между любыми двумя неизменно. С твердым телом жестко связана другая система координат ξ, η, ζ, с началом в точке O твердого тела и движущаяся относительно неподвижного пространства.

27. Закон распределения скоростей в твердом теле:

$$\boxed{\vec{\upsilon}_M} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \boxed{\vec{\upsilon}_O + \left[\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}\right]}.$$

Закон распределения ускорений в твердом теле $\boxed{\vec{W}_M = \vec{W}_O + \left[\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}\right] + \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}\right]\right]}$

28. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ вводится так, что :

$$\boxed{\frac{d\vec{i}}{dt} = \left[\vec{\omega} \times \vec{i}\right], \frac{d\vec{j}}{dt} = \left[\vec{\omega} \times \vec{j}\right], \frac{d\vec{k}}{dt} = \left[\vec{\omega} \times \vec{k}\right]}$$

.Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

29. Мгновенная ось вращения – ось, проходящая через вектор $\vec{\omega}$ (геометрическое место точек с нулевыми мгновенными скоростями).

30. $\boxed{\vec{W}_M = \vec{W}_O + \left[\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}\right] + \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}\right]\right]}$, здесь $\boxed{\vec{W}_{BP} = \left[\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}\right]}$ - вращательное ускорение, $\boxed{\vec{W}_{OC} = \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}\right]\right]}$ - осестремительное (всегда направлено к мгновенной оси вращения) [формула Ривальса – то же для любых 2х точек твердого тела]

31. *Когда мгновенная ось неподвижна ($\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}$), тогда вращательное ускорение $\vec{W}_{BP}$ совпадает с касательным $\vec{W}_{\tau}$ и осестремительное ускорение $\vec{W}_{OC}$ совпадает с нормальным $\vec{W}_{n}$. В общем случае ($\vec{\varepsilon} \nparallel \vec{\omega}$), данное соотношение не выполняется, и кроме того, $\vec{W}_{BP}$ и $\vec{W}_{OC}$ не ортогональны.*

32. *Плоскопараллельное движение - это движение твердого тела, при котором движения всех его точек лежат в плоскостях параллельных некоторой плоскости. Для него* $\vec{\upsilon}_M = \left[\vec{\omega} \times \overline{PM}\right]$ $\boxed{\vec{W}_M = \vec{W}_O + \left[\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}\right] - \omega^2 \overline{OM}}$
33. *Кривошип — звено кривошипного механизма, совершающее цикловое вращательное движение на полный оборот вокруг неподвижной оси. (W)*
34. *Шатун - подвижная деталь механизма, соединяющая поступательно перемещающуюся деталь с вращающимся валом. Крейцкопф (ползун) - деталь кривошипно-ползунного механизма, совершающая возвратно-поступательное движение по неподвижным направляющим. Подшипник — изделие, являющееся частью опоры, которое поддерживает вал, ось или иную конструкцию, фиксирует положение в пространстве, обеспечивает вращение, качение или линейное перемещение с наименьшим сопротивлением, воспринимает и передаёт нагрузку на другие части конструкции. Подпятник - опорная деталь, поддерживающая вертикальный вал и воспринимающая на себя всю действующую вдоль оси вала нагрузку (упорный подшипник) Шарнир - подвижное соединение деталей, конструкций, допускающее вращение только вокруг общей оси или точки. (W)*
35. *Движение тела с одной неподвижной точкой:* $\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_O + \left[\vec{\omega} \times \overline{OM}\right] = \left[\vec{\omega} \times \overline{OM}\right]$

    $\vec{W}_M = \vec{W}_O + \left[\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}\right] + \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \overline{OM}\right]\right] = \left[\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}\right] + \left[\vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \overline{OM}\right]\right] = \vec{W}_M^{BP} + \vec{W}_M^{OC}$ *, а* $\vec{\omega}$ *- инвариант относительно выбора полюса*
36. $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 + \left[\vec{\Omega} \times \vec{\omega}\right] = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$. *Угловая скорость вращения мгновенной оси – угловая скорость, с которой вращается мгновенная ось вращения. (КЭП). Мы использовали ее в задаче про конус, который катался по плоскости и угловая скорость движения его точек складывалась из угловой скорости движения его*

мгновенной оси и угловой скорости движения точек относительно этой самой оси.

37. *В кинематике любое движение можно свести к сложению абсолютного и относительного движений. Движение подвижной оси относительно неподвижной – переносное движение, а вот уже движение относительно подвижной – относительное движение.*
38. *Абсолютное движение (a [=absolute]) – движение точки относительно неподвижной среды, Относительное движение (r [=relative]) – движение точки относительно подвижной среды, Переносное движение (e) – движение подвижной среды относительно неподвижной среды (или движение точки за счет подвижной среды, как если бы точка была «приклеена»)*
39. *Скорости и ускорения обозначенных движений можно складывать:* $\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r$
40. *Формула Кориолиса:* $\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$ *, где* $\vec{W}_k$ *- ускорение Кориолиса.*

    $\vec{W}_k = 2\left[\vec{\omega}_e \times \vec{\upsilon}_r\right]$
41. *Если твердое тело движется относительно некоторой подвижной среды и вместе с ней движется относительно другой, принятой за неподвижную, то иногда оказывается удобным при определении скоростей и ускорений точек тела пользоваться формулами:* $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$

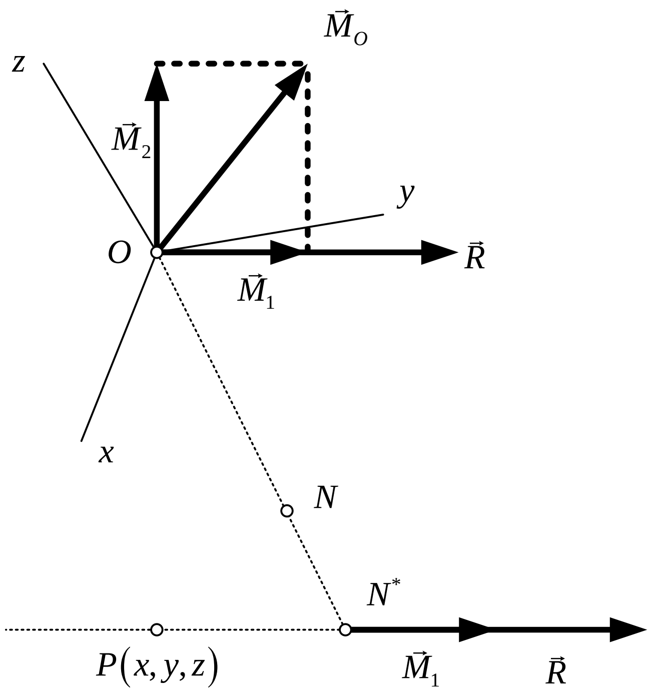
    $$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \left[\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r\right] = \vec{\varepsilon}_e + \dot{\omega}_\xi \vec{i} + \dot{\omega}_\eta \vec{j} + \dot{\omega}_\zeta \vec{k} + \left[\vec{\omega}_e \times \left(\omega_\xi \vec{i} + \omega_\eta \vec{j} + \omega_\zeta \vec{k}\right)\right] = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}_0 + \left[\vec{\Omega} \times \vec{\omega}\right]$$

    где $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_e$
42. *Метод Виллиса позволяет определить угловые скорости в плоских механизмах, наподобие, кривошипа. Переходим в систему отсчета, неизменно связанную с кривошипом. В этой системе отсчета кривошип неподвижен, а абсолютные угловые скорости всех колес изменятся на величину* Ω*. Затем записываются условия равенства скоростей точек касания соседних колес в системе, связанной с кривошипом и, собственно, находятся угловые скорости.*
43. *Поступательная СК – СК, движущаяся поступательно относительно условно неподвижной. В таких системах кориолисово ускорение отсутствует. Вращательная СК, соответственно, совершает вращательное движение относительно условно неподвижной (предположение, в учебниках такого нет) .*

44. *Величина и линия действия – скользящий вектор. Две системы скользящих векторов называются эквивалентными, если одна из другой получается с помощью элементарных операций: добавление элементарного векторного нуля, а также сложение пучка векторов и разложение векторов в пучок. Также следует сказать, что имеется два инварианта системы векторов относительно выбора полюса: главный вектор и проекция главного момента на главный вектор.*

45. *Критерий эквивалентности – две системы скользящих векторов эквивалентны в том и только в том случае, если равны их главные векторы и главные моменты относительно произвольно выбранного полюса.*
46. *Основные характеристики системы векторов – главный вектор и главный момент.* $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ *- главный вектор,* $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum \left[\overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}\right]$ *- главный момент, момент винта – проекция клавного момента на главный вектор (является инвариантом):* $M_в = M_1 = \frac{\left(\vec{M}_O \cdot \vec{R}\right)}{R}$

47.

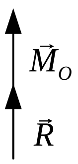
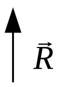
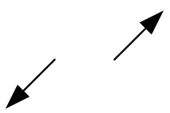
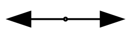


Найдется такая точка N^*, *что* $\begin{matrix} \left[\overrightarrow{N^*O} \times \vec{R}\right] = -\vec{M}_2 \Rightarrow \\ \vec{M}_{N^*} = \vec{M}_O - \vec{M}_2 = \vec{M}_1 \end{matrix}$ *Предположим, есть еще* *такая точка* P *:* $\vec{M}_P = \vec{M}_{N^*} + \left[\overrightarrow{PN^*} \times \vec{R}\right] = \vec{M}_1$ *Тогда* P *должна лежать на параллели* $\vec{M}_1$ *и проходить через* N^**. На линии, проходящей через* P *и* N^**, главный момент будет иметь минимальное значение. При этом главный момент равен* $M_в = M_1 = \dfrac{\left(\vec{M}_O \cdot \vec{R}\right)}{R}$ $M_в = M_1 = \dfrac{\left(\vec{M}_O \cdot \vec{R}\right)}{R}$*, и называется моментом винта.Другими словами, приводя систему векторов к виду, при котором главный вектор и главный момент параллельны, мы приводим систему векторов к винту.*

48. *Приведение системы к винту и приведение системы векторов к простейшему виду это одно и то же.*
49. *Уравнение оси минимальных моментов:*

$$\vec{M}_O + \left[\overrightarrow{PO} \times \vec{R}\right] = \vec{M}_O - \left[\overrightarrow{OP} \times \vec{R}\right] = \boxed{\vec{M}_O - \left[\vec{r} \times \vec{R}\right] = \eta \vec{R}}$$

50. *В кинематике* $\vec{R}$ *соответствует* $\vec{\omega}$*, а* $\vec{M}_O$ *соответствует* $\vec{\upsilon}$*.*

Случай	*Теория скользящих векторов*	*Кинематика*
	*Винт*	*Кинематический винт*
	*Равнодействующая*	*Вращение*
	*Равнодействующая пара*	*Поступательное движение*
	*Равновесие*	*Покой*

51. *Постулаты динамики… Первый закон Ньютона: «Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальная точка при отсутствии внешних воздействий сохраняет величину и направление своей скорости неограниченно долго». Второй закон Ньютона: «В инерциальной*

системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе». Третий закон Ньютона: «Материальные точки попарно действуют друг на друга с силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению».(W). Принцип независимости действия сил: «Результат действия (сообщение уснорения, обратно пропорционального массе) силы не зависит от остальных действующих сил». Принцип освобождаемости от связей: «Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить их связи и заменить их реакциями». / Тела и поверхности, ограничивающие движение, называются связями, а силы – реакциями связей/

52. *Механической связью называют ограничения, накладываемые на координаты и скорости механической системы, которые должны выполняться на любом её движении.(W)*

53. *Основные динамические величины: импульс $\vec{P}$, момент импульса $\vec{K}_O$ и кинетическая энергия T.* $\vec{P} = \sum m_i \vec{\upsilon}_i$ $\boxed{\vec{K}_O = \sum \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i\right]}$ $\boxed{T = \frac{1}{2} \sum m_i \upsilon_i^2}$

54. *Понятия инерциальной и неинерциальной систем отсчета определяется первым законом Ньютона.*

55. *Теорема Кёнига. Кинетическая энергия системы точек (твердого тела) равна кинетической энергии движения центра масс системы с мысленно сосредоточенной в нем массой всех точек (твердого тела), плюс кинетическая энергия относительного движения относительно системы отсчета с началом в центре масс и движущейся поступательно.* $\boxed{T = \frac{1}{2} m \upsilon_C^2 + T_{отн}}$

56. *Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси z равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:* $J_z = J_C^{\omega} + md^2$

57. *Законы изменения основных динамических величин:* $\boxed{\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}_{внеш}}$

$\boxed{\dfrac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{внеш} - m\left[\vec{\upsilon}_O \times \vec{\upsilon}_C\right]}$ $\boxed{dT = \delta A^{всех\_сил}}$

58. *Если поле описывается одной функцией, то это поле будет потенциальным, при условии, что для* $\vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$*:* $\exists\Pi\left(x, y, z\right): \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial\Pi}{\partial x}, F_y = -\dfrac{\partial\Pi}{\partial y}, F_z = -\dfrac{\partial\Pi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}, \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x}, \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \end{cases}$ - *дифференциальный критерий потенциальности поля.*

59. *Элементарная работа:* $\delta A = \sum \vec{F}_k d\vec{r}_k$

60. *Элементарная работа потенциальных сил:* $\delta A = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = const$

61. ↑↑↑

62. *Качение без проскальзывания – качение, при котором скорость точки соприкосновения тела с поверхностью равна скорости поверхности.*

63. *Из формулы Кориолиса можно получить закон изменения импульса в неинерциальной системе отсчета* $\boxed{\dfrac{d\vec{P}_r}{dt} = m\vec{W}_r^C = \vec{R}^{внеш} + \vec{F}_e + \vec{F}_k}$*, где вводятся переносная и кориолисова силы инерции:*

$$\boxed{\vec{F}_e} = -\sum m_i\vec{W}_i^e = -\sum m_i\left(\vec{W}_O + \left[\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}_i'\right] + \left[\vec{\omega}_e \times \left[\vec{\omega}_e \times \vec{r}_i'\right]\right]\right) =$$
$$= -m\left(\vec{W}_O + \left[\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}_C'\right] + \left[\vec{\omega}_e \times \left[\vec{\omega}_e \times \vec{r}_C'\right]\right]\right) = \boxed{-m\vec{W}_e^C}$$

$$\boxed{\vec{F}_k} = -\sum m_i\vec{W}_i^k = \boxed{-m\vec{W}_k^C}$$

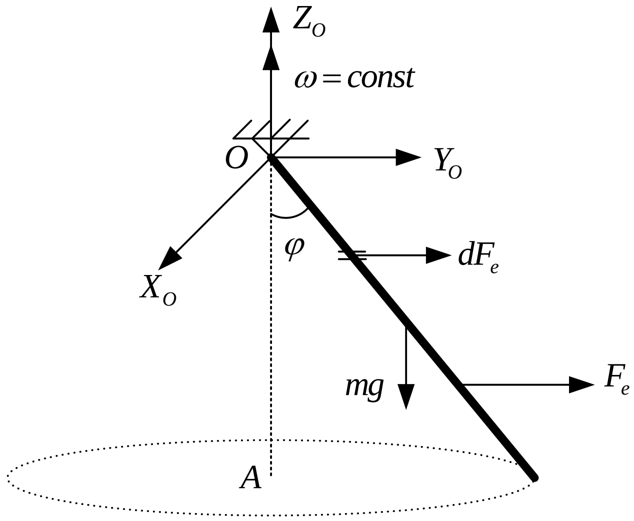
64. *Законы изменения основных динамических величин в НСО:*

$\boxed{\dfrac{d\vec{P}_r}{dt} = m\vec{W}_r^C = \vec{R}^{внеш} + \vec{F}_e + \vec{F}_k}$ $\boxed{\dfrac{d\vec{K}_r^O}{dt} = \vec{M}_O^{внеш} + \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^k - m\left[\vec{\upsilon}_O \times \vec{\upsilon}_C\right]}$

$\boxed{dT_r = \delta A^{всех\_сил} + \delta A^e}$ *(кориолисова сила работы не совершает)*

65. *Условия относительного равновесия – условия равновесия в неинерциальной системе отсчета – изменение основных динамических величин равно нулю (см. уравнения выше)*

66. *Нахождение точки приложения переносной силы инерции однородного*

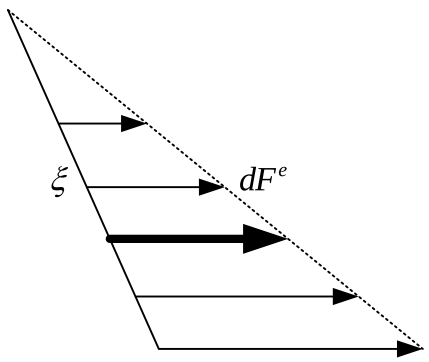


вращающегося стержня.

$Y_O + F^e = 0 \Rightarrow Y_O = -F^e = -m\omega^2 \dfrac{l}{2}\sin\varphi$. $M_O^e = \int dM_O^e$. *Если* ξ *- расстояние от* O *до элемента* dm, *то* $dM_O^e = dF^e \xi \cos\varphi$, *а* $dF^e = dm \cdot \omega^2 \xi \sin\varphi$. *Итак,*

$$M_O^e = \int dM_O^e = \int_0^l \rho\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\xi^2 d\xi = m\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \frac{l^2}{3}$$

$h = \dfrac{M_O^e}{F^e} = \dfrac{2m\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi l^2}{3m\omega^2 l\sin\varphi} = \dfrac{2}{3} l\cos\varphi$. *Можно было найти это расстояния из соображений того, что в треугольнике центр тяжести находится на медиане расстоянии 2/3 от вершины.* $dF^e = dm \cdot \omega^2 \xi \sin\varphi \sim \xi$



67. *Центральные силы* $\vec{F}(r) = \pm F(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$

68. *Закон площадей (справедлив для любого центрального поля)* $\boxed{r^2\dot{\varphi} = const = c}$

69. Используя закон площадей можно получить формулу Бине:

$$\boxed{\upsilon^2 = c^2\left(\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right)}$$

Если записать второй закон Ньютона

$mW_{рад} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = m\left(-\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} - \frac{c^2}{r^3}\right) = \pm F\left(r\right)$ и немного его преобразовать,

можно получить уравнение Бине: $\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{F(r)m}{l^2}r^2$. Есть подозрение, что переменные Бине это 1/r и φ. По крайней мере,других переменных в формулах Бине нет.

70. Вторая формула Бине: $\boxed{-\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right) = \pm F\left(r\right)}$ В поле всемирного тяготения $F\left(r\right) = -\frac{\gamma m}{r^2}$, т.е. $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\gamma}{c^2}$, где $\frac{1}{r} = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{\gamma}{c^2}$ - решение коническое сечение - эллипс, в другой форме решение пишут так: $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$

71. Задача двух тел – изучение движения двух материальных точек под действием сил их взаимного притяжения или отталкивания. В ходе решения задачи вводится понятие приведенной массы и устанавливается, что в этой задаче могут происходить только плоское движение. (А99)

72. Уравнение конического сечения в полярных координатах, связанных с фокусом эллипса и направлением на перигей: $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ (полярная ось совпадает с направлением на перигей)

73. Связь фокального параметра и эксцентриситета с геометрическими характеристиками эллипса: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ $p = \frac{b^2}{a}$

74. *Связь фокального параметра и эксцентриситета с динамическими величинами в центральном поле с потенциальной энергией* $\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r}$*:* $p = \frac{K_O^2}{m\alpha}$*,*

$$e = \sqrt{1 + 2E_O \frac{K_O^2}{m\alpha^2}}$$

75. *Связь значения эксцентриситета с формой траектории:* $e < 1$ *=> эллипс* ($e = 0$ *=> окружность радиуса* p*),* $e = 1$ *=> парабола,* $e > 1$ *=> гипербола*
76. $e < 1$ *- финитное движение (спутники, планеты),* $e \geq 1$ *- инфинитное движение. При инфинитном движении тело может удалить сколь угодно далеко, при финитном – нет. («финитное»=ограниченное) (W)*
77. *Первая космическая скорость(7.9 км/с) — это минимальная скорость, при которой тело, движущееся горизонтально над поверхностью планеты, не упадёт на неё, а будет двигаться по круговой орбите. Вторая космическая скорость (11.2 км/с) (параболическая скорость, скорость освобождения, скорость убегания) — наименьшая скорость, которую необходимо придать объекту (например, космическому аппарату), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой небесного тела (например, планеты), для преодоления гравитационного притяжения этого небесного тела.(W)*
78. *Законы Кеплера для планет: I «Каждая из планет солнечной системы совершает плоское движение с постоянной секторальной скоростью». II «Траекториями всех планет служат эллипсы, в общем фокусе которых расположено Солнце». III «Отношение квадратов времен* T *обращения планет к кубам больших полуосей их эллиптических траекторий одинаково для всех планет:* $\frac{T^2}{a^3} = const$ *»*
79. *Рассеивание частиц, которое производил Резерфорд называют Кулоновским рассеиванием потому, что оно базируется исключительно на силах электростатического взаимодействия, и минимальное расстояние между частицами зависит только от потенциала поля. Ньютоновское поле – поле гравитационных сил, минимальное расстояние зависит от размеров частиц. Прицельное расстояние (прицельный параметр - параметр удара), в теории рассеяния частиц расстояние между рассеивающим силовым центром и линией первоначального движения рассеиваемой частицы. Формула Резерфорда - это формула для дифференциального эффективного поперечного сечения рассеяния*

нерелятивистских заряженных частиц в телесный угол Ω, в кулоновском поле другой неподвижной заряженной частицы или ядра (мишени). В системе центра инерции записывается следующим образом: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$*, где Z1 и Z2 — заряды налетающей частицы и мишени, m,v — масса и скорость налетающей частицы, Θ — двумерный угол рассеяния, e — элементарный заряд, dσ — дифференциальное сечение, Ω — телесный угол(W)*

80. *Законы изменения импульса и кинетического момента системы переменного состава:* $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{внеш} + \vec{R}^{доп}$*, где* $\vec{R}^{доп} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta \vec{Q}^{ух}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{Q}^{пр}}{\Delta t}\right)$*, а* $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{внеш} + \vec{M}_O^{доп}$*,*

   где $\vec{M}_O^{доп} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta \vec{K}_O^{ух}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{K}_O^{пр}}{\Delta t}\right)$

81. *Уравнение Мещерского:* $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{R}^{внеш} - \sum_{i=1}^{n} \frac{dm_i^{ух}}{dt}\vec{u}_i^{ух} + \sum_{l=1}^{r} \frac{dm_l^{пр}}{dt}\vec{u}_l^{пр}$*, где*

   $\vec{u}_i^{ух} = \vec{C}_i^{ух} - \vec{\upsilon}, \vec{u}_i^{пр} = \vec{C}_i^{пр} - \vec{\upsilon}$ $\vec{u}_i^{ух} = \vec{C}_i^{ух} - \vec{\upsilon}, \vec{u}_i^{пр} = \vec{C}_i^{пр} - \vec{\upsilon}$ *- скорости уходящих и приходящих масс в подвижной поступательной системе, связанной с телом.*

82. *Формула Циолковского является решением уравнения Мещерского при отсутствии внешних сил, а масса в систему «не приходит»:* $\upsilon(t) = \upsilon_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$

83. *Oz – неподвижная ось. Тогда для нее выполняется:*

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z + M_z^{(r)}.$$

В правой части уравнения второе слагаемое – проекция момента реактивных сил на ось Oz. Следует учитывать, что момент инерции относительно оси z – величина переменная. Это уравнение описывает вращение переменного состава вокруг неподвижной оси (M273)

84. *Кватернион (от лат. quaterni - по четыре) - обобщение понятия комплексного числа. Имеет вид:* $\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$*, где* i_0, i_1, i_2, i_3 *- специальные единицы.* $\Lambda + M = (\lambda_0 + \mu_0)i_0 + (\lambda_1 + \mu_1)i_1 + (\lambda_2 + \mu_2)i_2 + (\lambda_3 + \mu_3)i_3$*. По сути представляет из себя пару скаляра и вектора. Для базисных векторов вводится операция кватернионного умножения.*

$$\left.\begin{array}{l} i_0 \circ i_0 = i_0, i_0 \circ i_k = i_k \circ i_0 = i_k, i_k \circ i_k = -1, \\ i_1 \circ i_2 = i_3, i_2 \circ i_3 = i_1, i_3 \circ i_1 = i_2, \\ i_2 \circ i_1 = -i_3, i_3 \circ i_2 = -i_1, i_1 \circ i_3 = -i_2 \end{array}\right\} \leftrightarrow i_k \circ i_j = -\left(i_k, i_j\right) + \left[i_k \times i_j\right],$$ *Если запишем*

$k, j = 1, 2, 3$

$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}, M = \mu_0 + \vec{\mu}$, *то* $\vec{\lambda} \circ \vec{\mu} = -\left(\vec{\lambda}, \vec{\mu}\right) + \left[\vec{\lambda} \times \vec{\mu}\right]$

$$\Lambda \circ M = \left(\lambda_0 + \vec{\lambda}\right) \circ \left(\mu_0 + \vec{\mu}\right) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \vec{\mu} + \vec{\lambda} \mu_0 + \vec{\lambda} \circ \vec{\mu} =$$
$$= \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \vec{\mu} + \vec{\lambda} \mu_0 - \left(\vec{\lambda}, \vec{\mu}\right) + \left[\vec{\lambda} \times \vec{\mu}\right]$$

85. *Свойства кватернионного умножения: дистрибутивность* $\Lambda \circ \left(M + N\right) = \Lambda \circ M + \Lambda \circ N$, *ассоциативность* $\Lambda \circ \left(M \circ N\right) = \left(\Lambda \circ M\right) \circ N$, *отсутствие коммутативности в общем случае* $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$ *- равенство выполняется только при коллинеарности, когда* $\left[\vec{\lambda} \times \vec{\mu}\right]$*=0, но* $sqal\left(\Lambda \circ M \circ N\right) = sqal\left(N \circ \Lambda \circ M\right)$ *- при циклической замене кватернионов.*

86. *Сопряженный кватернион:* $\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$, *следует заметить, что*
$$\begin{array}{l} \overline{\Lambda \circ M} = \bar{M} \circ \bar{\Lambda} \\ \overline{\Lambda_1 \circ \ldots \circ \Lambda_n} = \bar{\Lambda}_n \circ \ldots \circ \bar{\Lambda}_1 \end{array},$$ *нормированный кватернион:* $\|\Lambda\| = 1$, *обратный*
$$\Lambda^{-1} : \left\{\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1\right\}$$
кватернион: $$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}, \left(\|\Lambda\| \neq 0\right), \quad \left(\Lambda_1 \circ \ldots \circ \Lambda_n\right)^{-1} = \Lambda_n^{-1} \circ \ldots \circ \Lambda_1^{-1}$$
$$\left\|\Lambda^{-1}\right\| = \frac{1}{\|\Lambda\|}$$

87. *Тригонометрическая запись кватерниона:* $\Lambda = |\Lambda|\left(\cos\nu + \vec{e}\sin\nu\right), |\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$

88. *Кватернионные уравнения можно решать переходя к тригонометрической записи кватерниона и используя формулу, аналогичной формуле Муавра* $\Lambda^n = |\Lambda|^n\left(\cos n\nu + \vec{e}\sin n\nu\right)$, *а можно – в векторной форме.*

89. *Параметры Родрига-Гамильтона – компоненты кватерниона в его собственном базисе. Собственный базис кватерниона* Λ *- тот базис, поворот из которого задается этим кватернионом. Например, повороты на углы Эйлера задаются в собственном базисе:* $\Lambda_\Psi = \cos\frac{\Psi}{2} + i_3 \sin\frac{\Psi}{2}$*;* $\Lambda_\theta = \cos\frac{\theta}{2} + i_1 \sin\frac{\theta}{2}$*;* $\Lambda_\varphi = \cos\frac{\varphi}{2} + i_3 \sin\frac{\varphi}{2}$

.

90. *Произвольное положение твердого тела с неподвижной точкой* O *относительно базиса* $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ *задается некоторым нормированным кватернионом* Λ *по формулам:* $\vec{e}_k = \Lambda \circ \vec{i}_k \circ \overline{\Lambda}$. *При этом каждому положению твердого тела соответствуют два значения кватерниона, отличающиеся знаком. Для точки:* $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \overline{\Lambda}$. *Кватернионы, рассматриваемые как алгебра на R, образуют четырёхмерное вещественное векторное пространство. Любой поворот этого пространства относительно 0 может быть записан в виде* $q \mapsto \xi q \zeta$, *где* ξ *и* ζ *— пара единичных кватернионов, при этом пара* (ξ, ζ) *определяется с точностью до знака, то есть один поворот определяют в точности две пары —* (ξ, ζ) *и* $(-\xi, -\zeta)$. *(W)*

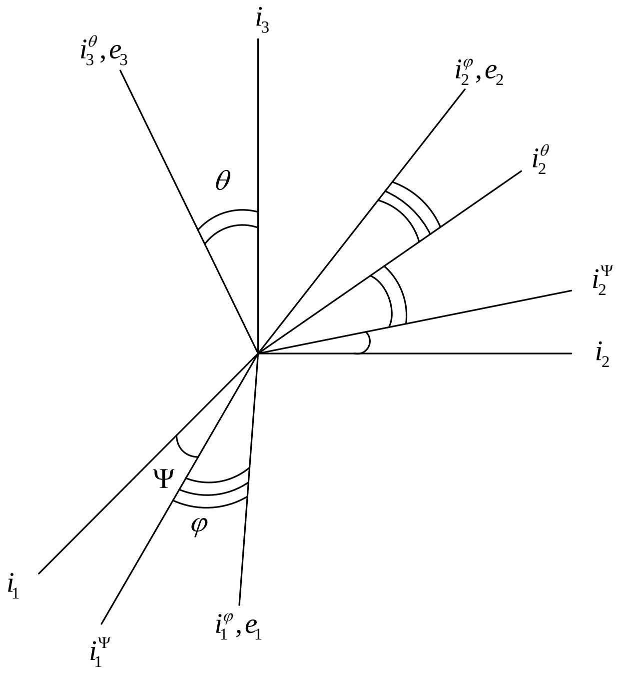
91. *Теорема Эйлера о конечном повороте. Любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг некоторой оси* $\vec{\varepsilon}$ *на некоторый угол* α. *При этом ось* $\vec{\varepsilon}$ *конечного поворота коллинеарна векторной части кватерниона* $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$, *а угол* α *конечного поворота определяется формулой* $\alpha = 2\arccos\lambda_0$.

$$\Lambda = \cos\frac{\alpha}{2} + \vec{\varepsilon}\sin\frac{\alpha}{2}$$

92. *В общем базисе в случае* n *поворотов, задаваемых кватернионами* $\Lambda_1, \Lambda_2, .., \Lambda_n$ *итоговый поворот задается произведением в обратном порядке:* $\Lambda = \Lambda_n \circ .. \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1$. *В собственном базисе – в прямом порядке (*- значит, что кватернионы заданы в собственном базисе):* $\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* \circ .. \circ \Lambda_n^*$

93. *Углы Эйлера (*Ψ *- угол прецессии,* θ *- угол нутации,* φ *- угол собственного вращения)*

$\Lambda_\Psi = \cos\frac{\Psi}{2} + i_3\sin\frac{\Psi}{2}$, $\Lambda_\theta = \cos\frac{\theta}{2} + i_1\sin\frac{\theta}{2}$, $\Lambda_\varphi = \cos\frac{\varphi}{2} + i_3\sin\frac{\varphi}{2}$ *- в собственном базисе*



94. *Оператор набла (Гамильтона):* $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$*. Приобретает смысл в сочетании со скалярной функцией, к которой применяется. Градиент — вектор, показывающий направление наискорейшего возрастания некоторой величины , значение которой меняется от одной точки пространства к другой:* $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z.$ *Дивергенция – дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное:* $\operatorname{div}\ \mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}$*,* $\operatorname{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$*. Ротор – дифференциальный оператор над векторным полем:* $\operatorname{rot}\ \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$ *(W)*
95. *Частная производная – производная, которая берется по определенной переменной, при взятии которой остальные переменные, от которых может зависеть функция полагаются константами.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_k+\Delta x,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{\Delta x}.$$

Полная производная - производная функции по времени вдоль траектории.

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$ *(W)*

96. *Векторное произведение — это псевдовектор, перпендикулярный плоскости, построенной по двум сомножителям и равный по модулю площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Справедлива формула* $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$, *где* $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$