

СЕМИНАРЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ОСЕННЕГО СЕМЕСТРА

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ.

Ф.И.О. преподавателя: Семендяев Сергей Вячеславович.

Общая информация о семинарах по теоретической механике

Сдача заданий будет происходить без отметок в зачетной книжке.

Сдача заданий – самый активный процесс обучения после посещения семинаров и лекций и домашней работы.

Если кто-то не сдает задания, ему можно в изолированных условиях (без книг) предложить на экзамене решить три задачи. Задачи не из задачника, без ответов. Задачи (все и без единой ошибки) надо защитить перед комиссией из двух человек. Даже если задачи решены, но сдающий не может объяснить решения, то получит двойку.

Когда начинается прием второго задания, у заведующего кафедрой на столе должен лежать список студентов, не приступивших к сдаче первого. Ректорат имеет право таких студентов исключить. Сообщаю об этом заранее.

Поощрительная мера нормальному студенту (посещающему занятия, хорошо и во время сдающему задания) – не дают трех задач на экзамене. Отличившиеся на семинарах и при сдаче заданий могут сдать экзамен досрочно. Это решает преподаватель, ведущий семинарские занятия. Несколько слов о лекциях. Ходите на лекции. Лекции дают общие представления о предмете. Несколько слов об учебниках. Список есть в сборнике программ и заданий. Рекомендую взять все учебники из списка. Также есть методические пособия на кафедре и на сайте teormech.mipt.ru.

ЗАМЕЧАНИЯ

Повторенье – мать ученья (поговорка).

- Рекомендую при изучении сперва прочитать текст семинара до конца, особо не вникая в подробности формул, а стараясь уловить суть.
- При втором прочтении вникайте в подробности.
- При третьем старайтесь запомнить в общих чертах (по смыслу) и затем дословно (формулировки, формулы).



КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.

Способы задания движения материальной точки

Движение задается радиус-вектором положения $\vec{r}(t)$, скоростью $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и

ускорением $\vec{w}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ в каждый момент времени.

Координатный способ предусматривает введение **обобщенных координат**. Это любые три независимые величины, однозначно задающие положение точки в пространстве. Обознаются: $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$.

Частный случай обобщенных координат – *декартовы координаты* x, y, z (см. рис. 1).

Эта система ортогональных осей неподвижна. С осями x, y, z связываются орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, соответственно.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{w} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

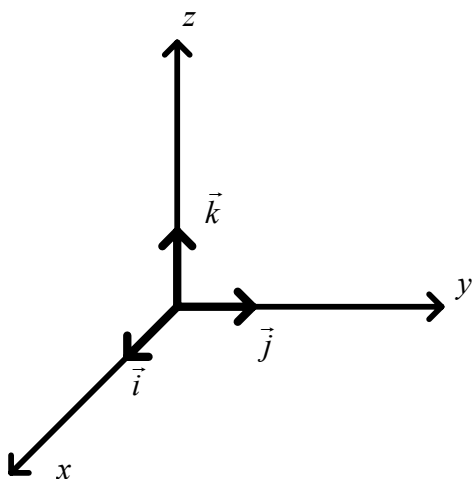


Рисунок 1

Наряду с обобщенными координатами вводятся **координатные линии** – линии, которые описывает точка при изменении каждой из координат при фиксированных других. Выделяется произвольный момент времени t_0 . Фиксируется q_2, q_3 , т.е.

$q_1(t_0+t), q_2(t_0), q_3(t_0)$. Эта даст координатную линию q_1 . Аналогично:
 $q_1(t_0), q_2(t_0+t), q_3(t_0)$ даст координатную линию q_2 , и $q_1(t_0), q_2(t_0), q_3(t_0+t)$ даст координатную линию q_3 (см. рис. 2).

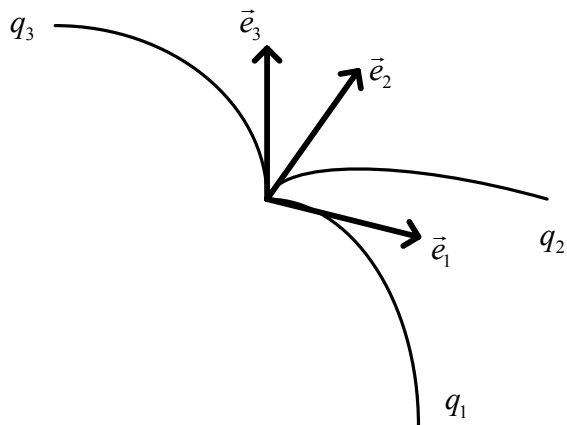


Рисунок 2

Вводятся орты $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (**локальный базис**) - единичные векторы по касательным к координатным линиям $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$. Каждому моменту времени, в общем, соответствует своя конфигурация ортов. Они могут быть неортогональны. Еще одним частным случаем обобщенных координат являются *цилиндрические координаты* ρ, φ, z (см. рис. 3).

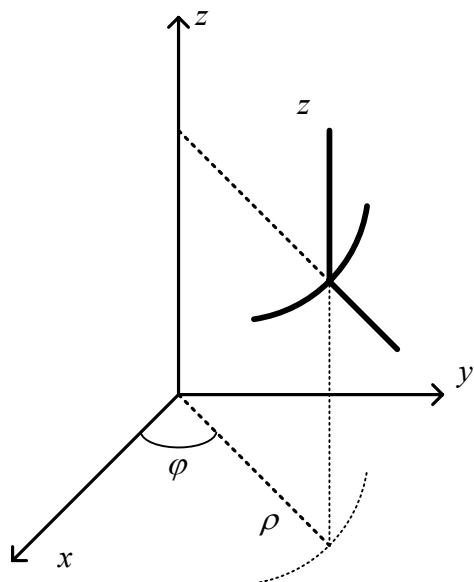


Рисунок 3

На рисунке выделены жирным координатные линии цилиндрических координат. Каким образом можно выразить скорость через обобщенные координаты?

По правилам взятия производной сложной функции:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Орты:
$$\vec{e}_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

Вводят величины
$$H_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$
 - коэффициенты Ламе.

С их помощью выражение для скорости принимает вид:

$$\vec{v}(t) = \sum_{i=1}^3 H_i \dot{q}_i \vec{e}_i$$

Когда криволинейные координаты имеют наглядную геометрическую картину (декартовы, цилиндрические, полярные, сферические координаты и т.д.) для нахождения коэффициентов Ламе можно использовать формулу:

$$ds_i = H_i dq_i,$$

где ds_i - элемент дуги вдоль соответствующей координатной линии q_i .

В декартовых координатах, например, все коэффициенты Ламе равны единице, и $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Когда координатная линия является прямой, коэффициент Ламе для нее равен единице.

В цилиндрических координатах:

$$ds_\rho = H_\rho d\rho = d\rho \Rightarrow H_\rho = 1$$

$$ds_\varphi = H_\varphi d\varphi = \rho d\varphi \Rightarrow H_\varphi = \rho$$

$$ds_z = H_z dz = dz \Rightarrow H_z = 1$$

Оси криволинейных координат не всегда ортогональны, поэтому стараются использовать ортогональные, для которых:

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 H_i^2 \dot{q}_i^2$$

В случае цилиндрических координат:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

В полярных координатах ρ, φ ($z = const$) для компонент скоростей вдоль координатных линий ρ и φ вводятся, соответственно, термины:

$$v_\rho = \dot{\rho} \text{ - радиальная скорость,}$$

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi} \text{ - трансверсальная скорость.}$$

На рис. 4 показаны направления этих скоростей, в случае $\dot{\rho} > 0, \dot{\varphi} > 0$.

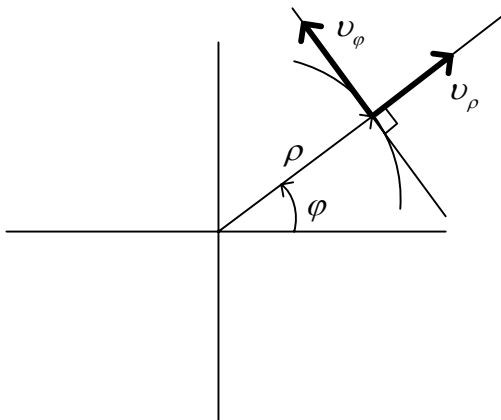


Рисунок 4

Каким образом задается ускорение в обобщенных координатах?

Вектор скорости задается векторным разложением по ортам координатных линий.

Однако вектор ускорения задается ортогональными проекциями (см. рис 5).

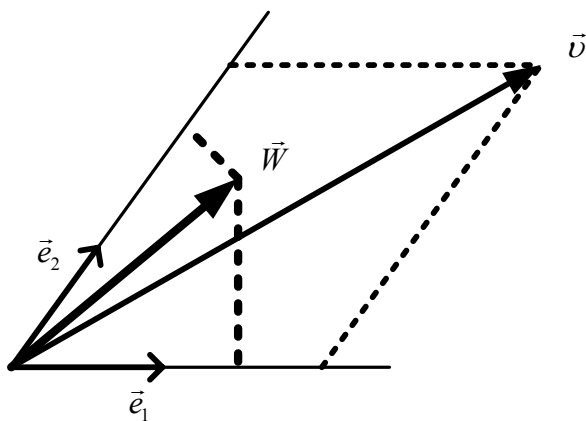


Рисунок 5

$$W_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right)$$

Нужно помнить, что здесь q_i и \dot{q}_i рассматриваются как независимые переменные, а не как конкретная траектория.

Продолжим рассмотрение случая цилиндрических координат.

Ранее мы нашли: $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$.

Тогда

$$W_\rho = \frac{1}{H_\rho} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \right) = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2$$

$$W_\varphi = \frac{1}{H_\varphi} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) - 0 \right) = \rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}$$

$$W_z = \frac{1}{H_z} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) \right) = \ddot{z}$$

В полярных координатах ($z = const \Rightarrow W_z = \ddot{z} = 0$) компоненты ускорений называются:

$$\boxed{W_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2} \text{ - радиальное ускорение,}$$

$$\boxed{W_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}} \text{ - трансверсальное ускорение.}$$

На рис. 6 показаны направления этих ускорений, в случае $\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 > 0, \rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi} > 0$.

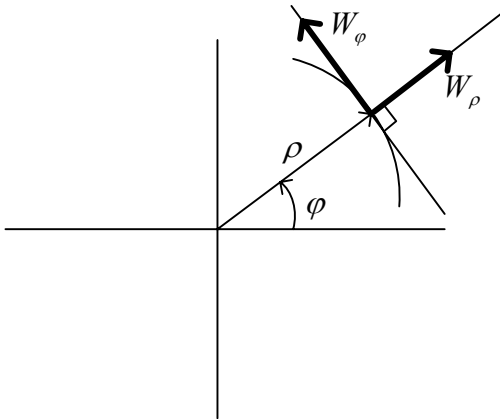


Рисунок 6

Рассмотрим еще один пример ортогональных координат – сферические r, θ, φ (см. рис. 7).

Пользуясь формулой $ds_i = H_i dq_i$, находим

$$H_r = 1$$

$$H_\theta = r$$

$$H_\varphi = r \sin \theta$$

Если бы мы воспользовались формулой $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ для нахождения коэффициентов Ламе, у нас бы ушло полстраницы.

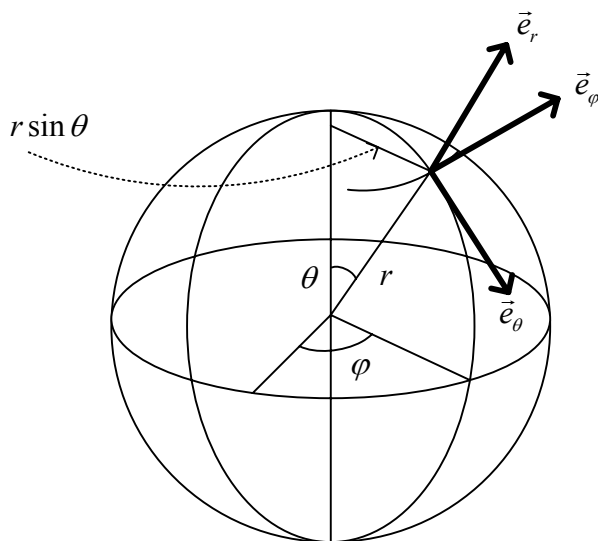


Рисунок 7

Далее

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 H_i^2 \dot{q}_i^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta$$

и подставив в выражение для ортогональной проекции ускорения на оси криволинейных координат, получим:

$$W_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

$$W_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right)$$

$$W_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) - 0 \right)$$

Рекомендую W_θ и W_ϕ довести до окончательного вида самостоятельно.

Рассмотрим задачу С.1.19.

В полярных координатах $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$, где угол φ отсчитывается от перигея (см.

рис.8).

Закон площадей $r^2 \dot{\varphi} = c = const$ является ни чем иным, как одним из законов Кеплера.

$$W_r(r), W(r) = ?$$

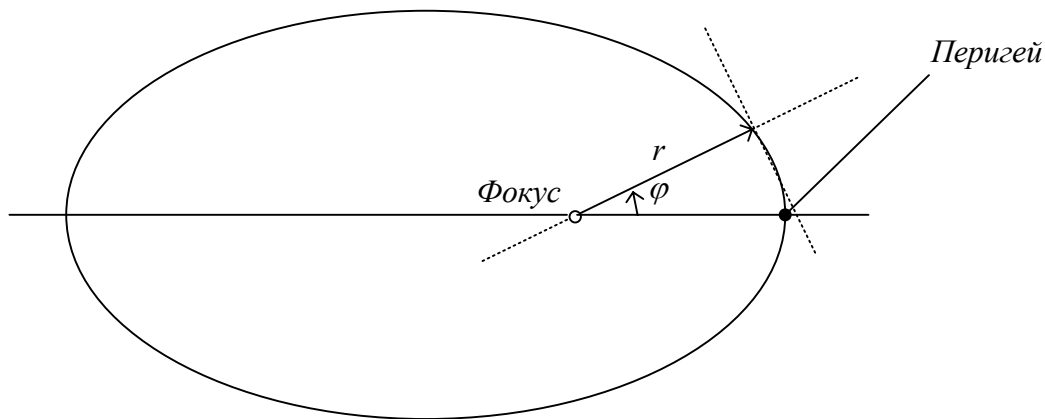


Рисунок 8

Как было найдено ранее радиальное ускорение дается формулой

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2.$$

Постараемся уйти от дифференцирования по t , и перейдем к дифференцированию по φ .

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c}{r^2} = -c \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}$$

Здесь мы воспользовались законом площадей $r^2\dot{\varphi} = c = const$. Далее

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{dt} \right) \dot{\varphi} = -c \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} \frac{c}{r^2} = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$$

Тогда, с учетом того, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \varphi$, найдем

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right) = -\frac{c^2}{r^2} \left(-\frac{e}{p} \cos \varphi + \frac{1}{r} \right) = -\frac{c^2}{r^2} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) = -\frac{c^2}{pr^2}.$$

В центральном поле трансверсальное ускорение должно быть равно нулю.

Проверим:

$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0?$$

Действительно, продифференцируем закон площадей:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(c)$$

, и получим:

$$2\kappa\dot{\phi} + r^3\ddot{\phi} = 0, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Теперь перейдем к следующему способу задания движения точки.

Естественный способ задания движения материальной точки

Движение рассматривается вдоль конкретной заданной траектории, а в качестве параметра выступает длина дуги траектории s .

Вводится **естественный трехгранник Дарбу**, состоящий из ортогональных ортов касательной, нормали и бинормали к данной точке траектории (см. рис. 9).

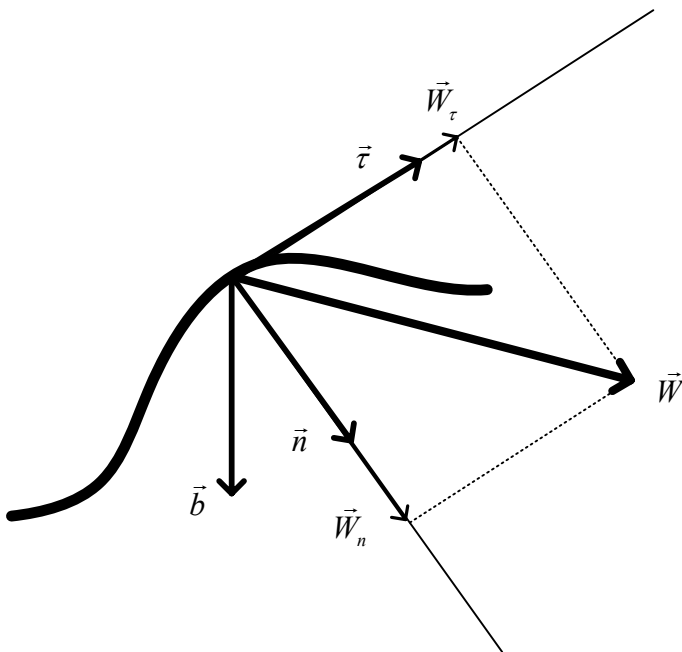


Рисунок 9

Касательный орт направлен по касательной к траектории в данной точке, нормаль к центру кривизны траектории, а бинормаль строится как векторное произведение $\vec{b} = [\vec{\tau} \times \vec{n}]$.

Скорость задается выражением:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = v \vec{\tau}$$

Ускорение:

$$\vec{W} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = W_\tau \vec{\tau} + W_n \vec{n},$$

где ρ - радиус кривизны траектории.

Заметим, что ускорение имеет две компоненты, которые для определенности называют:

$$W_r = \frac{dv}{dt} - \text{тангенциальное ускорение,}$$

$$W_n = \frac{v^2}{\rho} - \text{нормальное ускорение.}$$

Нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны траектории.

Поскольку базис ортогонален,

$$W = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

На данную тему предлагается рассмотреть задачу М.3.74 (или М.12.27 в зависимости от издания).

Движение точки задано в полярных координатах

$$r = ae^{kt}, \varphi = kt.$$

Найти уравнение траектории, скорость, радиус кривизны.

Уравнение траектории: $r(\varphi) = ae^{\varphi}$ - логарифмическая спираль.

В полярных координатах:

$$\text{радиальная скорость } v_r(t) = \dot{r} = ake^{kt},$$

$$\text{трансверсальная скорость } v_\varphi(t) = r\dot{\varphi} = ae^{kt}k.$$

$$\text{Поэтому } v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{2}ake^{kt} = kr\sqrt{2}$$

$$\text{Радиальное ускорение } W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = ak^2e^{kt} - ae^{kt}k^2 = 0.$$

$$\text{Трансверсальное ускорение } W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 + 2ake^{kt}k = 2k^2r.$$

$$\text{Так как } W_r = 0, \text{ то } W = W_\varphi = 2k^2r.$$

Радиус кривизны траектории:

$$\rho = \sqrt{\frac{v^4}{W^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}} = \sqrt{\frac{k^4 r^4 4}{4k^4 r^2 - 2k^4 r^2}} = \sqrt{2}r.$$

Совпадают ли по направлению нормальное ускорение с радиальным, а тангенциальное с трансверсальным? В общем случае, нет. См. рис. 10, где полное ускорение разложено на компоненты в полярных координатах и в естественных.

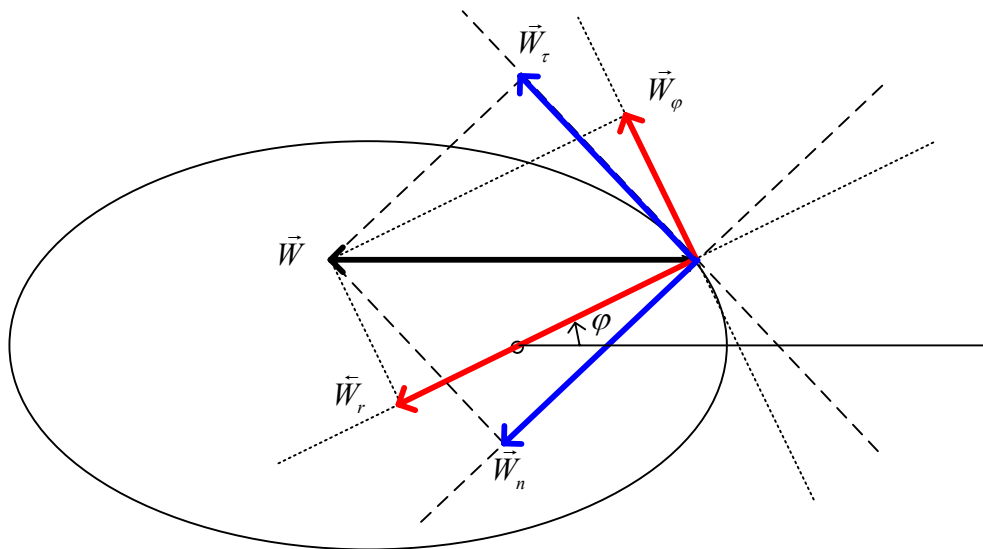


Рисунок 10





ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОГО ПРОСТРАНСТВА.

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОГО ПРОСТРАНСТВА.

(ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ)

Материальная точка – геометрическая точка, которой поставлено в соответствие положительное число m - масса.

Твердое тело – такая совокупность материальных точек, что расстояние между любыми двумя неизменно.

Рассмотрим декартову систему координат x, y, z , в которой расположено твердое тело (см. рис. 11).

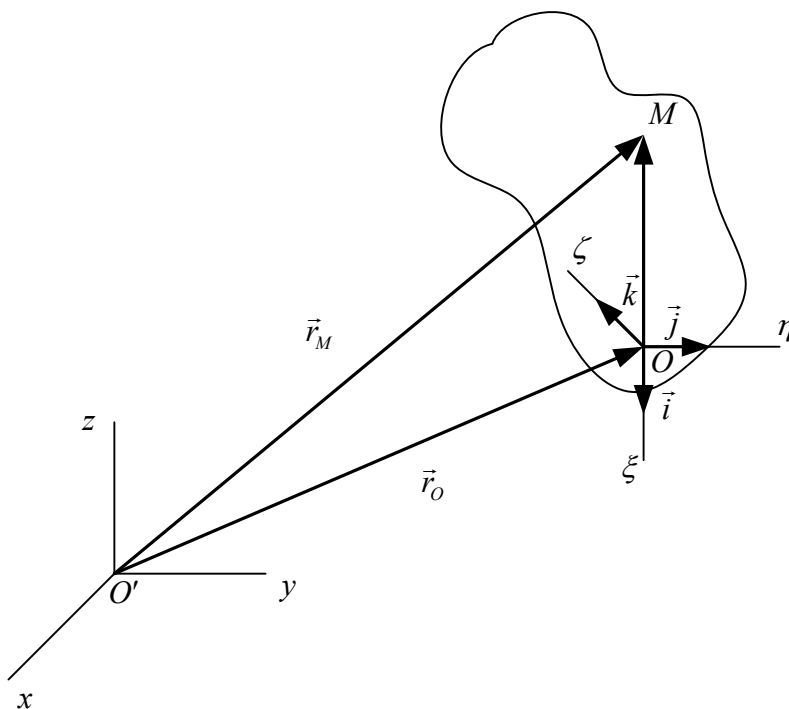


Рисунок 11

С твердым телом, в свою очередь, жестко связана другая система координат ξ, η, ζ , с началом в точке O твердого тела и движущаяся относительно неподвижного пространства.

Нас интересует скорость и ускорение точки M , принадлежащей твердому телу.

Радиус-вектор точки M определяется выражением:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_O + \overline{OM}.$$

Следует отметить, что \overline{OM} постоянен по модулю: $|\overline{OM}| = const$.

В греческой системе координат ξ, η, ζ :

$$\overline{OM} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k},$$

причем ξ, η, ζ - постоянные, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - движутся относительно x, y, z .

Введем вектор $\vec{\omega}$ таким образом, что

$$\boxed{\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{i}], \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{j}], \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{k}]}.}$$

Здесь и далее $[\bullet \times \bullet]$ означает векторное произведение.

Введенный таким образом вектор $\vec{\omega}$ называют **угловой скоростью твердого тела**.

Тогда скорость точки M равна (эту формулу называют **законом распределения скоростей в твердом теле**):

$$\boxed{\vec{v}_M} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\overline{OM}}{dt} = \boxed{\vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \overline{OM}]},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{OM}}{dt} &= \frac{d(\xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k})}{dt} = \xi \frac{d\vec{i}}{dt} + \eta \frac{d\vec{j}}{dt} + \zeta \frac{d\vec{k}}{dt} = \\ &= \xi [\vec{\omega} \times \vec{i}] + \eta [\vec{\omega} \times \vec{j}] + \zeta [\vec{\omega} \times \vec{k}] = \\ &= [\vec{\omega} \times (\xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k})] = [\vec{\omega} \times \overline{OM}] \end{aligned}$$

Аналогично можно получить ускорение точки M (**закон распределения ускорений в твердом теле**):

$$\boxed{\vec{W}_M = \vec{W}_O + [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \overline{OM}]]}$$

где $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ - **угловое ускорение**.

В случае, когда точка O неподвижна,

$$\boxed{\vec{W}_M = [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \overline{OM}]]}$$

и для определенности вводят термины:

$\vec{W}_{BP} = [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}]$ - вращательное ускорение,

$\vec{W}_{oc} = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \overline{OM}]]$ - осестремительное ускорение.

Осестремительное ускорение всегда направлено к мгновенной оси вращения, т.е. к оси проходящей через вектор $\vec{\omega}$ (геометрическое место точек с нулевыми мгновенными скоростями).

Если рассматривается движение с неподвижной осью, то точку O целесообразно брать на оси (см. рис. 12).

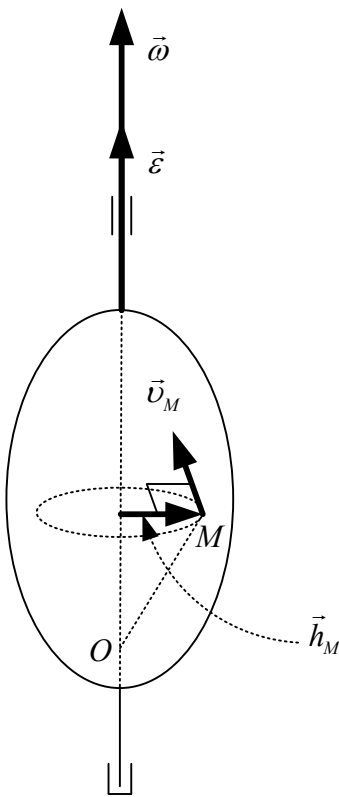


Рисунок 12

Тогда

$\vec{v}_M = [\vec{\omega} \times \overline{OM}]$ направлено по касательной к окружности радиуса h_M .

$$\vec{W}_M = [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \overline{OM}]]$$

$$\text{Но } [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \overline{OM}]] = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{h}_M]] = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{h}_M) - \omega^2 \vec{h}_M = -\omega^2 \vec{h}_M,$$

где \vec{h}_M - вектор, задающий расстояние от оси до точки M ,

$(\vec{\omega} \cdot \vec{h}_M) = 0$, поскольку $\vec{\omega} \perp \vec{h}_M$.

В итоге получаем $\vec{W}_M = [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}] - \omega^2 \overline{h}_M$.

$[\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}]$ - совпадает по направлению с \vec{v}_M ,

$-\omega^2 \overline{h}_M$ - направлено в противоположную \overline{h}_M сторону.

При раскрытии векторного произведения использовалось правило:

$$[\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Когда мгновенная ось неподвижна ($\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}$), тогда вращательное ускорение \vec{W}_{BP}

совпадает с касательным \vec{W}_τ и осестремительное ускорение \vec{W}_{OC} совпадает с

нормальным \vec{W}_n . В общем случае ($\vec{\varepsilon} \nparallel \vec{\omega}$), данное соотношение не выполняется, и

кроме того, \vec{W}_{BP} и \vec{W}_{OC} не ортогональны.

На рис. 13 указаны направления ускорений для случая $\vec{\varepsilon} \nparallel \vec{\omega}$.

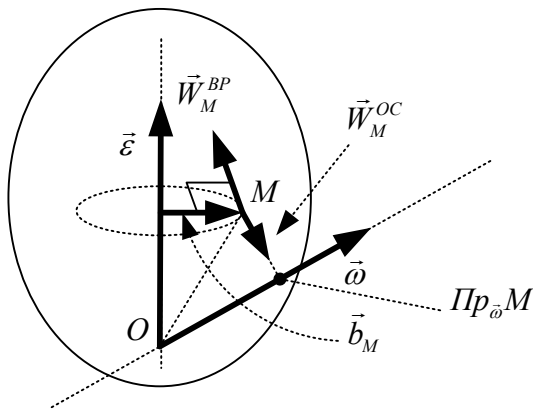


Рисунок 13

$Pr_{\vec{\omega}} M$ - проекция точки M на ось $\vec{\omega}$,

\vec{b}_M - вектор от оси $\vec{\varepsilon}$ к точке M ,

\vec{W}_M^{BP} направлено по касательной к окружности радиуса \vec{b}_M ,

\vec{W}_M^{OC} направлено к мгновенной оси $\vec{\omega}$.

Запишем $\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}_0$, где $\vec{\omega}_0$ - единичный орт вдоль $\vec{\omega}$.

$$\text{Тогда } \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega \vec{\omega}_0)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + \omega \frac{d\vec{\omega}_0}{dt}.$$

Введем вектор $\vec{\Omega}$ таким образом, что $\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = [\vec{\Omega} \times \vec{\omega}_0]$.

Т.к. $\vec{\omega}_0$ задает направление мгновенной оси, то $\vec{\Omega}$ является угловой скоростью поворота вектора угловой скорости $\vec{\omega}$.

В итоге,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + [\vec{\Omega} \times \vec{\omega}]$$

Первая компонента $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0$ соответствует изменению угловой скорости по модулю, вторая компонента $\vec{\varepsilon}_2 = [\vec{\Omega} \times \vec{\omega}]$ соответствует изменению угловой скорости по направлению.

Рассмотрим подробнее плоскопараллельное движение.

Это движение твердого тела, при котором движения всех его точек лежат в плоскостях параллельных некоторой плоскости.

Формулу $\vec{W}_M = \vec{W}_O + [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \overline{OM}]]$ можно преобразовать в более простую.

Т.к. при плоскопараллельном движении $\vec{\varepsilon}, \vec{\omega} \perp \overline{OM}$, $|\vec{\Omega}| = 0$, то

$$\vec{W}_M = \vec{W}_O + [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}] - \omega^2 \overline{OM}$$

Знание скоростей любых двух точек при плоскопараллельном движении позволяет найти мгновенный центр скоростей или, другими словами, мгновенную ось вращения (см. рис. 14).

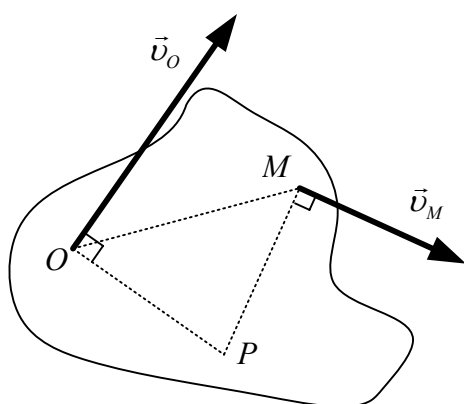


Рисунок 14

Мгновенная ось восстанавливается как пересечение перпендикуляров к \vec{v}_O и \vec{v}_M , а $\vec{v}_P = 0$. Распределение скоростей такое, как если бы было чистое вращение:

$$\vec{v}_M = [\vec{\omega} \times \overline{PM}].$$

Пример. Качение без проскальзывания.

В задачах данное выражение значит, что в точке касания твердого тела с поверхностью скорость тела равна скорости поверхности.

Если поверхность неподвижна, то скорость точки касания равна нулю (см. рис. 15).

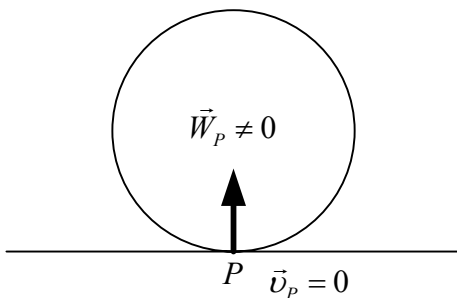


Рисунок 15

Есть еще одно важное замечание, которое является свойством твердого тела (неразрывность и несжимаемость):

Проекции скоростей любых двух точек твердого тела на прямую соединяющую их равны (см. рис. 16), т.е.

$$\boxed{\text{Пр}_{OM} \vec{v}_O = \text{Пр}_{OM} \vec{v}_M}$$

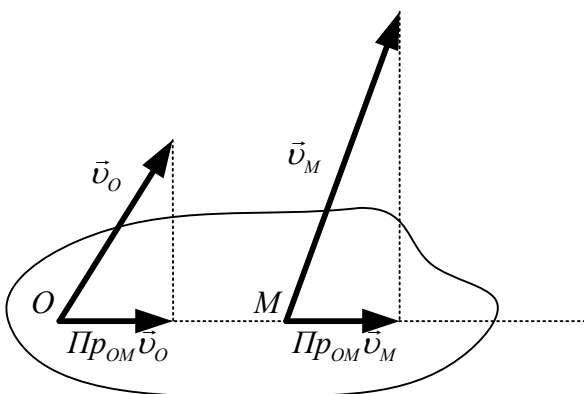


Рисунок 16

Исходя из этого оценим возможные варианты распределения скоростей при плоскопараллельном движении (рис. 17).

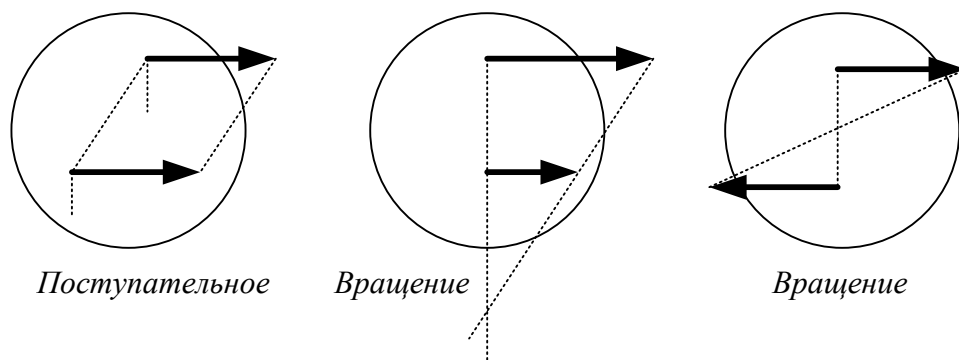


Рисунок 17

Задача М-595 (24.17)

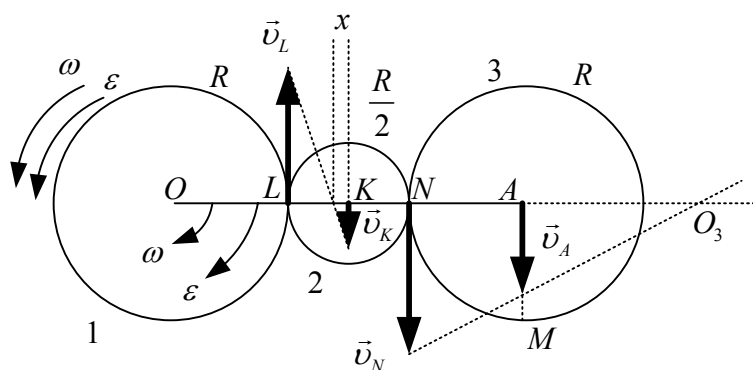


Рисунок 18

Найти v_M, W_M в тот момент, когда $\overline{OA} \perp \overline{AM}$

$$OA = 3R$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + [\vec{\omega}_3 \times \overline{AM}]$$

$$v_A = \omega \cdot 3R, v_K = \omega \cdot \frac{3}{2}R$$

Посчитаем угловые скорости шестеренок.

Для первой шестеренки МЦС1 в точке $O \Rightarrow v_L = \omega R$.

Для второй шестеренки МЦС2 на расстоянии x от точки K .

$$K: \frac{3}{2}R\omega = \omega_2 x \quad (\text{т.к. нет проскальзывания между шестеренками}).$$

$$L: \omega R = \omega_2 \left(\frac{R}{2} - x \right)$$

$$\text{Отсюда: } \frac{3}{2} = \frac{x}{R/2 - x} \Rightarrow x = \frac{3}{10}R \Rightarrow \omega_2 = 5\omega$$

$$v_N = \left(\frac{R}{2} + \frac{3}{10}R \right) \omega_2 = \frac{4}{5} \omega R \cdot 5 = 4\omega R$$

$v_A = 3\omega R$, следовательно, т.к. $\frac{v_N}{v_A} = \frac{4}{3} = \frac{\omega_3 O_3 N}{\omega_3 O_3 A}$, то $O_3 A = 3R, O_3 N = 4R$

Поэтому $\omega_3 = \omega, \varepsilon_3 = \varepsilon$.

$$v_M = \omega_3 O_3 M = \omega \sqrt{O_3 A^2 + AM^2} = \omega R \sqrt{10}$$

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + [\vec{\varepsilon}_3 \times \overline{AM}] - \omega_3^2 \overline{AM}$$

$W_A : W_{Ar} = \varepsilon 3R, W_{An} = \frac{v_A^2}{\rho_A} = \omega^2 3R$ (вращение полюса A относительно точки O)

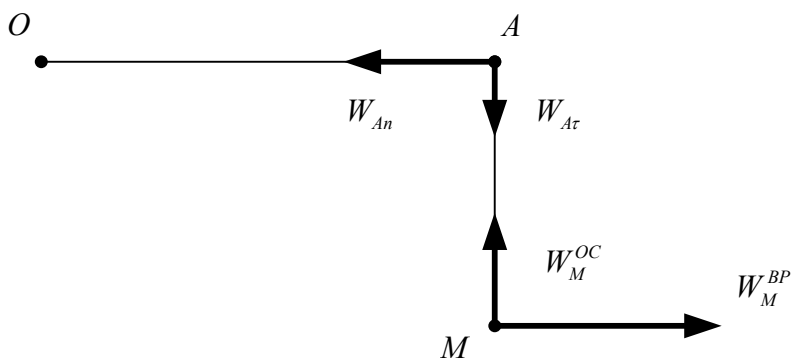


Рисунок 19

$$W_M^{BP} = \varepsilon R, W_M^{OC} = \omega^2 R$$

$$W_M = \sqrt{(W_{Ar} - W_M^{OC})^2 + (W_M^{BP} - W_{An})^2} = \sqrt{(\varepsilon 3R - \omega^2 R)^2 + (\varepsilon R - \omega^2 3R)^2} = R \sqrt{10(\varepsilon^2 + \omega^4) - 12\omega^2 \varepsilon}$$

Задача М.569 (18.12)

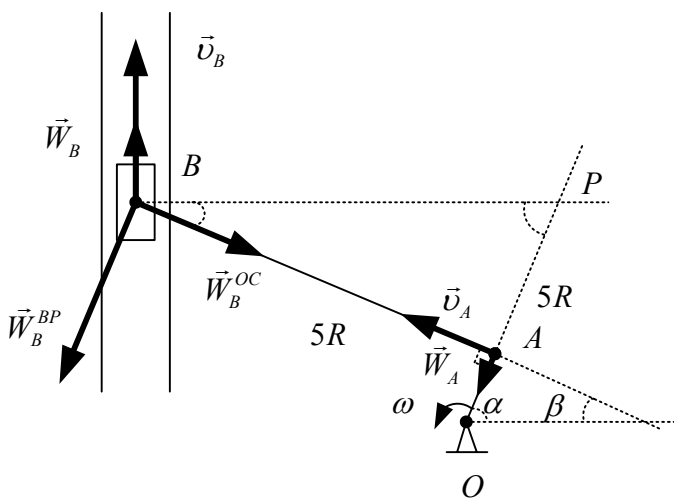


Рисунок 20

$$OA = R, AB = 5R$$

ω

$\omega_{AB}, \varepsilon_{AB}, W_B = ?$ В ТОТ МОМЕНТ, КОГДА $AB \perp OA$

$$\alpha = \beta = 45^\circ$$

$$v_A = \omega R$$

$$\text{Пр}_{AB} \vec{v}_B = \text{Пр}_{AB} \vec{v}_A$$

$$\frac{v_B}{\sqrt{2}} = \omega R \Rightarrow v_B = \sqrt{2} \omega R$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega}{5}, P - \text{МЦС}$$

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + [\vec{\varepsilon}_{AB} \times \overline{AB}] - \omega_{AB}^2 \overline{AB}$$

$$W_A = \omega^2 R$$

$$W_B^{OC} = -\frac{\omega^2}{25} 5R = -\frac{\omega^2 R}{5}$$

Проекция на два направления: на AB и $\perp AB$:

$$\frac{W_B}{\sqrt{2}} = -\frac{\omega^2 R}{5} \Rightarrow W_B = -\frac{\sqrt{2}}{5} \omega^2 R \quad (\vec{W}_B \text{ направлено вниз})$$

$$\frac{W_B}{\sqrt{2}} = \omega^2 R + \varepsilon_{AB} 5R \Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{4}{25} \omega^2$$





ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ. СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ.

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \overline{OM}] = [\vec{\omega} \times \overline{OM}]$$

$$\vec{W}_M = \vec{W}_O + [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \overline{OM}]] = [\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \overline{OM}]] = \vec{W}_M^{BP} + \vec{W}_M^{OC}$$

$\vec{\omega}$ - инвариант относительно выбора полюса (доказать самостоятельно).

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}_0, \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + [\vec{\Omega} \times \vec{\omega}] = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$

Задача С.4.33.(+неравномерное вращение)

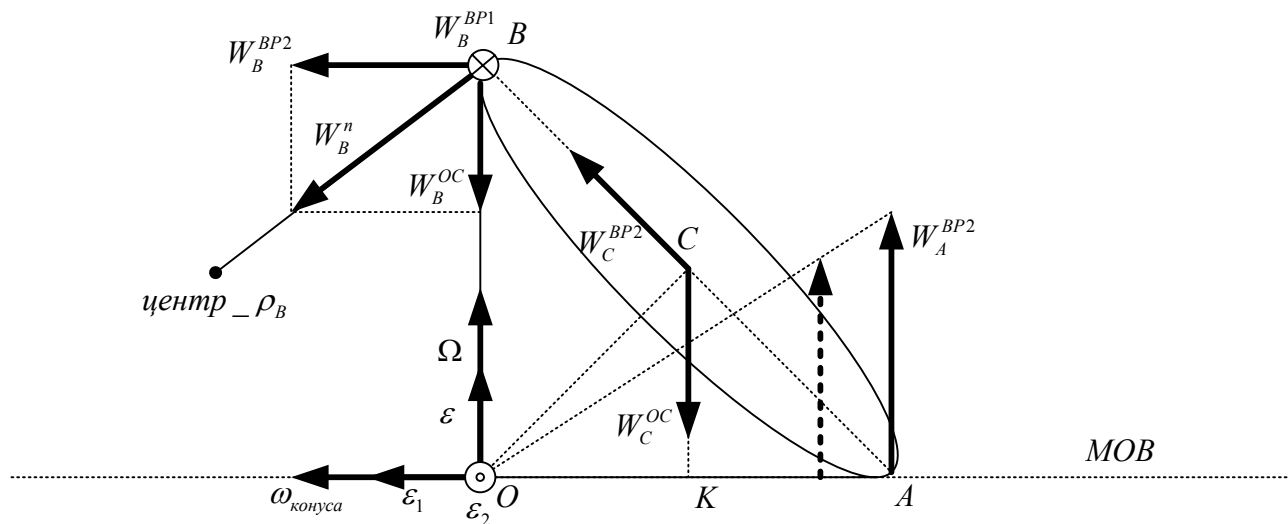


Рисунок 21

Качение без проскальзывания указывает на направление мгновенной оси вращения (MOB).

$$OC = h$$

Пусть будет $\vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\Omega}$.

Найти $W_B^{BP}, W_B^{OC}, W_B^n, W_B^\tau$ -? (ускорения в разных представлениях)

Точка C, как одна из точек оси симметрии конуса OC, движется как и ось симметрии с угловой скоростью Ω вокруг оси OB, поэтому:

$$v_C = \Omega \cdot OK = \Omega \cdot \frac{h}{\sqrt{2}} (\otimes \text{ направлена от нас})$$

С другой стороны, точка C , как одна из точек конуса, движется с угловой скоростью $\omega_{\text{конуса}}$ вместе с конусом вокруг оси OA (МОВ конуса мы нашли), поэтому

$$v_C = \omega_{\text{конуса}} \cdot CK = \omega_{\text{конуса}} \cdot \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \omega_{\text{конуса}} = \Omega$ (равны по величине, но не по направлению)

$$\Rightarrow v_B \Rightarrow \omega_{\text{конуса}} \cdot OB = \Omega h \sqrt{2}$$

Ω - угловая скорость оси симметрии конуса. Во время движения OC и OA лежат в плоскости $OAB \Rightarrow \Omega$ - также является угловой скоростью поворота мгновенной оси вращения.

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_{\text{конуса}}}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} = \varepsilon, (\leftarrow)$$

$$\varepsilon_2 = \left[\vec{\Omega} \times \vec{\omega}_{\text{конуса}} \right] = \Omega \cdot \omega_{\text{конуса}} = \Omega^2, (\odot)$$

$$W_B^{BP1} = \left[\vec{\varepsilon}_1 \times \overline{OB} \right] = \varepsilon h \sqrt{2},$$

$$W_A^{BP2} = W_B^{BP2} = \left[\vec{\varepsilon}_2 \times \overline{OB} \right] = \left[\vec{\varepsilon}_2 \times \overline{OA} \right] = \Omega^2 h \sqrt{2}$$

$$W_B^{OC} = \omega_{\text{конуса}}^2 \cdot h_B = \Omega^2 h \sqrt{2}$$

($\vec{W}_M^{OC} = -\omega^2 \vec{h}_M$, \vec{h}_M - расстояние от точки M до МОВ)

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^{BP1} + (\vec{W}_B^{BP2} + \vec{W}_B^{OC}) = \vec{W}_B^\tau + \vec{W}_B^n$$

$$\vec{v}_B = \left[\vec{\omega}_{\text{конуса}} \times \overline{OB} \right]$$

\vec{W}_B^{BP1} перпендикулярно плоскости OAB , как и \vec{v}_B , значит:

$$\vec{W}_B^\tau = \vec{W}_B^{BP1}, \vec{W}_B^n = \vec{W}_B^{BP2} + \vec{W}_B^{OC}$$

$$W_B^\tau = W_B^{BP1}$$

$$W_B^n = \sqrt{(W_B^{BP2})^2 + (W_B^{OC})^2} = 2\Omega^2 h = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{2\Omega^2 h^2}{\rho_B} \Rightarrow \rho_B = h$$

Для точек, лежащих на МОВ, независимо от того, равномерно или неравномерно вращение, ускорение будет направлено \uparrow .

СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ

Ранее мы рассматривали движение точки (Т - точка), затем перешли к движению точки, как части твердого тела (ТТ – твердое тело), теперь рассмотрим движение точки на твердом теле (ТТТ – точка на твердом теле).

(Т → ТТ → ТТТ)

Точка движется относительно некоторой среды, которая в свою очередь движется относительно неподвижной среды. Условно движение можно разложить на составляющие:

- ✂ Абсолютное движение (a) – движение точки относительно неподвижной среды,
- ✂ Относительное движение (r) – движение точки относительно подвижной среды,
- ✂ Переносное движение (e) – движение подвижной среды относительно неподвижной среды (или движение точки за счет подвижной среды, как если бы точка была «приклеена»)

Наглядной иллюстрацией является муравей, бегающий по палочке.

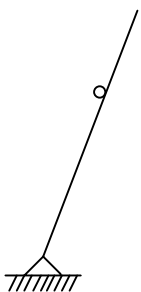


Рисунок 22

Траектория относительного движения муравья – прямая, траектория переносного движения муравья – окружность, траектория абсолютного движения муравья – более сложная, спиралевидная.

Скорости и ускорения обозначенных движений можно складывать.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\overline{OM} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k} \quad (\text{рис. 23})$$

$$\vec{v}_r = \dot{\xi} \vec{i} + \dot{\eta} \vec{j} + \dot{\zeta} \vec{k}$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_O + [\vec{\omega}_e \times \overline{OM}]$$

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$$

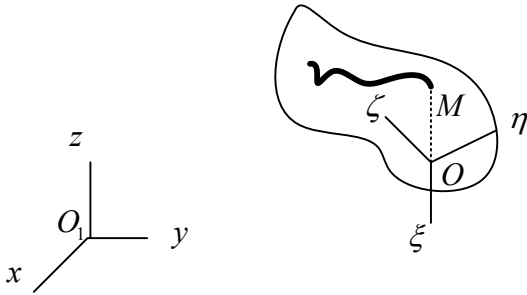


Рисунок 23

\vec{W}_k - ускорение Кориолиса

$$\vec{W}_e = \vec{W}_O + [\vec{\varepsilon}_e \times \overline{OM}] + [\vec{\omega}_e \times [\vec{\omega}_e \times \overline{OM}]]$$

$$\vec{W}_r = \ddot{\xi}\vec{i} + \ddot{\eta}\vec{j} + \ddot{\zeta}\vec{k}$$

$$\vec{W}_k = 2[\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r]$$

Если движение подвижной среды поступательное, т.е. $\omega_e = 0$, то $W_k = 0, \vec{W}_e = \vec{W}_O$.

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{W}_e + \frac{1}{2}\vec{W}_k$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{W}_r + \frac{1}{2}\vec{W}_k$$

Задача С.2.14. (см. рис. 24)

$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t, s = at^2$, s - длина дуги O_1A

$$v_A^a, W_A^a - ? \text{ при } t = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\omega_e = \dot{\varphi} = \varphi_0 \omega \cos \omega t$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A^e + \vec{v}_A^r = \vec{v}_{O_1} + [\vec{\omega}_e \times \overline{O_1A}] + \vec{v}_A^r$$

$$v_{O_1} = \dot{\varphi} \cdot OO_1 = 2R\varphi_0\omega \cos \omega t$$

$$|[\vec{\omega}_e \times \overline{O_1A}]| = \dot{\varphi} 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha = \frac{at^2}{R}$$

$$v_A^r = \frac{ds}{dt} = 2at$$

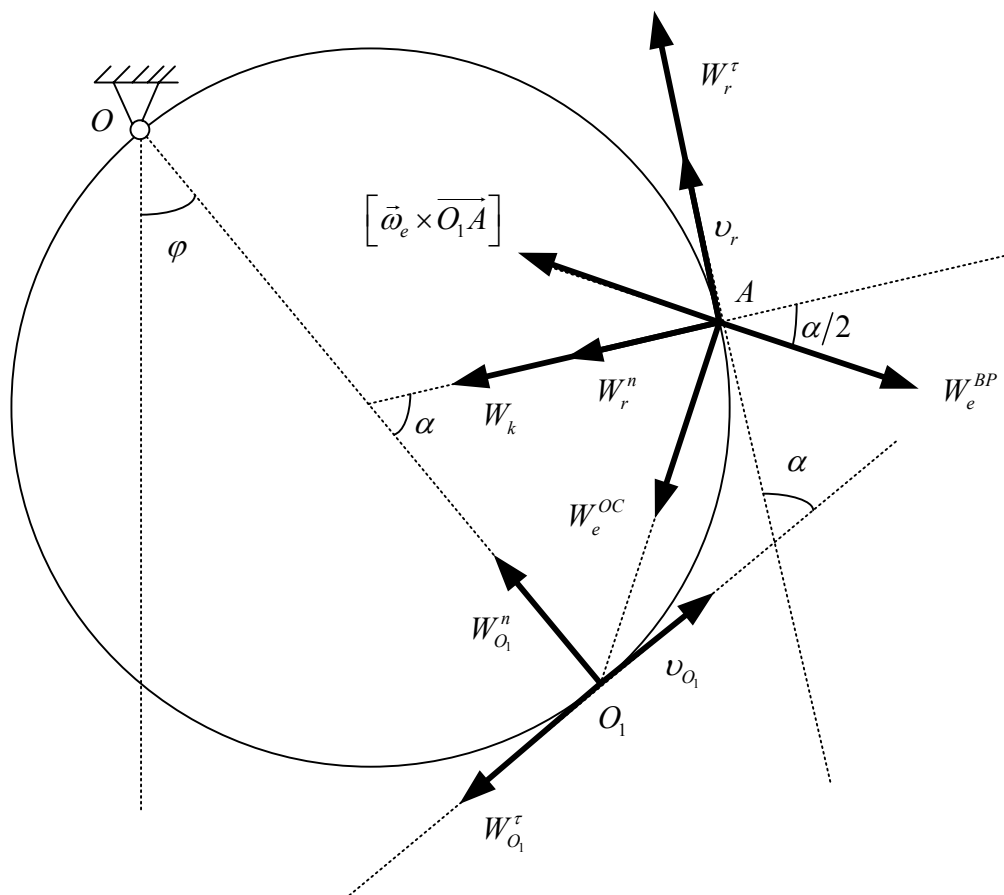


Рисунок 24

Берем проекции на два взаимно перпендикулярных направления, возводим в квадрат, складываем, берем корень, получаем v_A (сделать самостоятельно).

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$$

$$\varepsilon_e = \ddot{\varphi} = -\varphi_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$$\left. \begin{aligned} W_{O_1}^n &= \dot{\varphi}^2 \cdot OO_1 = \varphi_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \cdot 2R \\ W_{O_1}^\tau &= \dot{v}_{O_1} = -2R\varphi_0 \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} W_{O_1}$$

$$W_e^{BP} = \ddot{\varphi} \cdot O_1A$$

$$W_e^{OC} = \dot{\varphi}^2 \cdot O_1A$$

$$W_r^\tau = 2a$$

$$W_r^n = \frac{v^2}{R}$$

$W_k = 2\dot{\varphi} \cdot v_r$. Берем проекции...





СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА (продолжение)

Если твердое тело движется относительно некоторой подвижной среды и вместе с ней движется относительно другой, принятой за неподвижную, то иногда оказывается удобным при определении скоростей и ускорений точек тела пользоваться формулами:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$$

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + [\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r] = \vec{\varepsilon}_e + \dot{\omega}_\xi \vec{i} + \dot{\omega}_\eta \vec{j} + \dot{\omega}_\zeta \vec{k} + \left[\vec{\omega}_e \times (\omega_\xi \vec{i} + \omega_\eta \vec{j} + \omega_\zeta \vec{k}) \right] = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + [\vec{\Omega} \times \vec{\omega}]$$

где $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_e$

Метод Виллиса позволяет определить угловые скорости в плоских механизмах, наподобие, кривошипа.

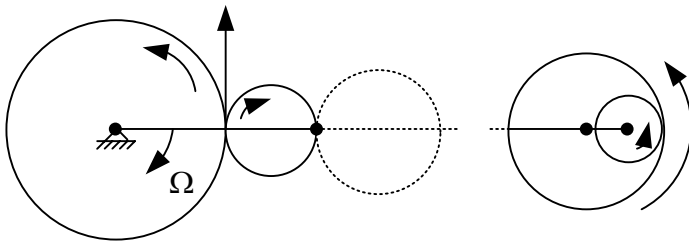


Рисунок 25

Раньше мы искали мгновенный центр скоростей для каждого колеса.

Введем систему отсчета, неизменно связанную с кривошипом. В этой системе отсчета кривошип неподвижен, а абсолютные угловые скорости всех колес изменятся на величину Ω .

	Кривошип	1	2	...	n
ω_a	Ω	ω_1	ω_2	...	ω_n
ω_r	0	$\omega_1 - \Omega$	$\omega_2 - \Omega$...	$\omega_n - \Omega$

Для того чтобы скорости точек касания колес были одинаковы в системе, связанной с кривошипом, пишем цепочку равенств:

$$(\omega_1 - \Omega)r_1 = -(\omega_2 - \Omega)r_2 = \dots = \pm(\omega_n - \Omega)r_n$$

Знак + или - зависит от характера зацепления соседних колес (внутреннее (-) или внешнее (+) зацепление).

Задача.

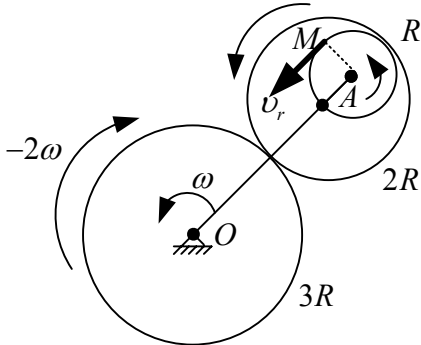


Рисунок 26

Найти ω_2, ω_3

По методу Виллиса:

$$-3\omega \cdot 3R = -(\omega_2 - \omega) \cdot 2R = -(\omega_3 - \omega) \cdot R$$

Отсюда, $\omega_2 = \frac{11\omega}{2} \Rightarrow$ угловая скорость второго колеса совпадает с угловой скоростью кривошипа по направлению (видно также по рисунку).

$$\omega_3 = 10\omega.$$

Найти v_M^a, W_M^a

Решим задачу на плоскопараллельное движение двумя способами.

1. *Первый способ. Подвижная система отсчета с началом в точке A, движущаяся поступательно (оси остаются параллельными самим себе)*

$$\Rightarrow \omega_e = 0, \varepsilon_e = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_3^r = \omega_3^a = 10\omega,$$

$$\varepsilon_3^r = \varepsilon_3^a = 10\varepsilon$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A + [\vec{\omega}_e \times \overline{AM}] = \vec{v}_A,$$

т.е. переносная скорость одна и та же для всех точек диска 3.

$$v_A = \omega \cdot 6R$$

$$v_r = \omega_3^r \cdot AM = 10\omega R$$

$$v_M^a = \sqrt{(v_M^e)^2 + (v_M^r)^2} = \omega R \sqrt{136}$$

$$\vec{W}_e = \vec{W}_A + [\vec{\varepsilon}_e \times \overline{AM}] - \omega_e^2 \overline{AM} = \vec{W}_A$$

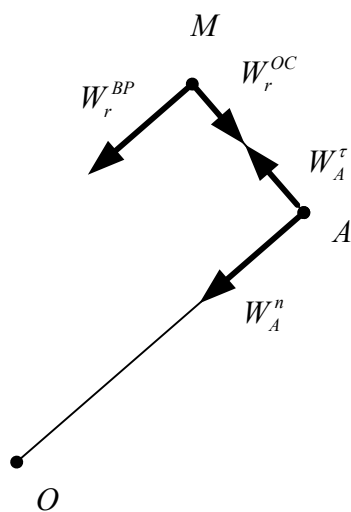


Рисунок 27

$$\left. \begin{aligned} W_A^\tau &= \frac{dv_A}{dt} = \varepsilon 6R \\ W_A^n &= \omega^2 6R \end{aligned} \right\} W_A$$

$$\left. \begin{aligned} W_r^{BP} &= \varepsilon_3^r AM = 10\varepsilon R \\ W_r^{OC} &= (\omega_3^r)^2 AM = 100\omega^2 R \end{aligned} \right\} W_r$$

$$W_k = 0$$

В итоге,

$$W_M^a = \sqrt{(W_A^n + W_r^{BP})^2 + (W_A^\tau - W_r^{OC})^2}$$

2. Второй способ. Подвижная система отсчета с началом в точке O вращается с угловой скоростью кривошипа.

$$\Rightarrow \omega_e = \omega, \varepsilon_e = \varepsilon \Rightarrow \text{т.к. } \vec{\omega}_3^a = \vec{\omega}_3^e + \vec{\omega}_3^r, \text{ то}$$

$$\omega_3^r = 9\omega, \varepsilon_3^r = 9\varepsilon$$

$$v_r = \omega_3^r AM = 9\omega R$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_O + [\vec{\omega}_3^e \times \overline{OM}] = [\vec{\omega}_3^e \times \overline{OM}]$$

$$OM = \sqrt{37}R$$

$$v_e = \omega \sqrt{37}R$$

$$v_a = \sqrt{(v_r + v_e \sin \alpha)^2 + (v_e \cos \alpha)^2} = \omega R \sqrt{136}$$

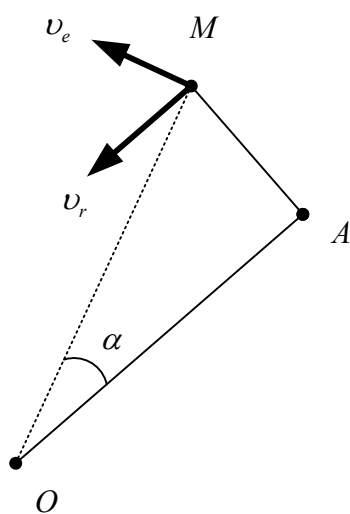


Рисунок 28

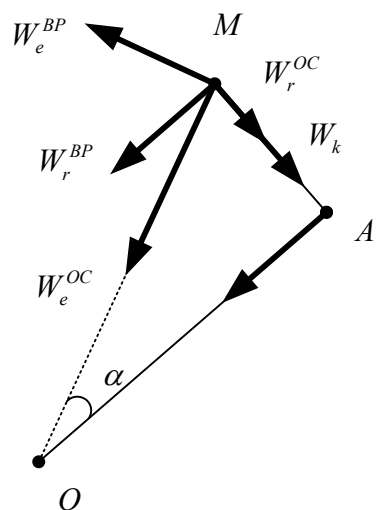


Рисунок 29

$$\vec{W}_e = \vec{W}_O + [\vec{\varepsilon}_e \times \overline{OM}] - \omega_e^2 \overline{OM} = [\vec{\varepsilon}_e \times \overline{OM}] - \omega_e^2 \overline{OM}$$

$$\left. \begin{aligned} W_e^{BP} &= \omega \sqrt{37} R \\ W_e^{OC} &= \omega^2 \sqrt{37} R \end{aligned} \right\} W_e$$

$$\left. \begin{aligned} W_r^{BP} &= \varepsilon_3^r AM = 9\varepsilon R \\ W_r^{OC} &= (\omega_3^r)^2 AM = 81\omega^2 R \end{aligned} \right\} W_r$$

$$W_k = 2\omega_3^e v_r = 18\omega^2 R$$

Берем проекции... получаем ускорение.

В кинематике любое движение можно свести к сложению движений. Поэтому нужно уметь выбирать разные системы отсчета.

Кроме того, движение твердого тела с одной неподвижной точкой всегда можно рассматривать как сумму вращений. Вращение подвижной оси вокруг неподвижной – переносное движение. Вращение ТТ вокруг подвижной оси – относительное движение. Вращение ТТ вокруг МОВ – абсолютное.

Задача С.4.10.

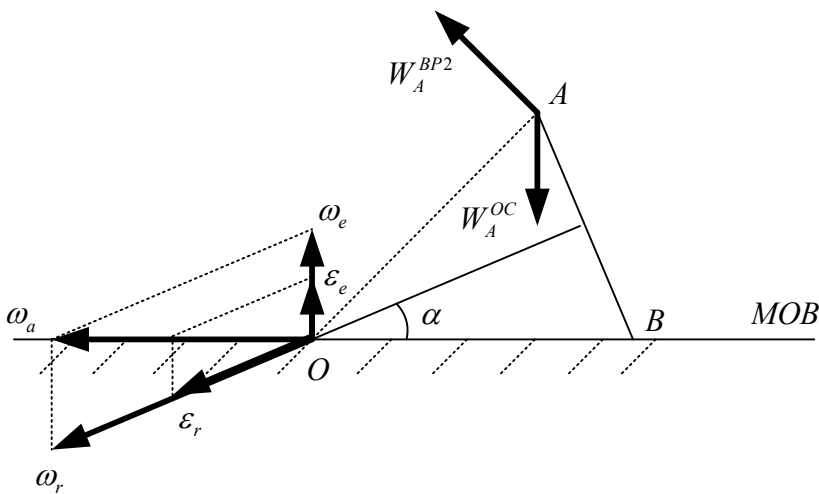


Рисунок 30

$$l = \sqrt{3}r \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\varepsilon_e = \varepsilon, \omega_e = \omega$$

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$$

$\vec{\omega}_a$ - всегда направлена по МОВ

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + [\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r]$$

$\vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r$ всегда направлена по МОВ

$\vec{\varepsilon}_2 = [\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r]$ направлена на нас (на рисунке)

Исходя из того, что $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$ должна быть направлена по МОВ и из геометрии,

находим

$$\frac{\omega_e}{\omega_r} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\omega_a = \sqrt{3}\omega_e = \sqrt{3}\omega,$$

$$\omega_r = \omega_e \operatorname{ctg} \alpha = 2\omega$$

Аналогично, исходя из того, что $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r$, должна быть направлена по МОВ,

находим:

$$(\leftarrow)|\vec{\varepsilon}_1| = |\vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r| = \sqrt{3}\varepsilon,$$

$$(\odot)|\vec{\varepsilon}_2| = |[\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r]| = \omega \cdot 2\omega \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{3}\omega^2$$

$$\varepsilon_a = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = \sqrt{3}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + [\vec{\omega}_a \times \vec{OA}] = [\vec{\omega}_a \times \vec{OA}]$$

$$\Rightarrow \odot v_A = \sqrt{3}\omega \cdot 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\omega r$$

$$\vec{W}_A = \vec{W}_O + [\vec{\varepsilon}_a \times \vec{OA}] - \omega_a^2 \vec{OA} = [\vec{\varepsilon}_a \times \vec{OA}] - \omega_a^2 \vec{OA}$$

$$\otimes W_A^{BP1} = |[\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{OA}]| = \sqrt{3}\varepsilon \cdot 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\varepsilon r$$

$$W_A^{BP2} = |[\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{OA}]| = \sqrt{3}\omega^2 \cdot 2r = 2\sqrt{3}\omega^2 r$$

$$W_A^{OC} = \omega_a^2 h_A = 3\omega^2 \cdot \sqrt{3}r = 3\sqrt{3}\omega^2 r$$

$W_A^{BP1} \perp$ плоскости OAB

$$W_A^2 = (W_A^{BP1})^2 + (W_A^{BP2} - W_A^{OC} \cos 60^\circ)^2 + (W_A^{OC} \sin 60^\circ)^2 = \sqrt{3}r\sqrt{3\varepsilon^2 + 7\omega^4}$$





ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ

Величина и направление – *свободный* вектор.

Величина и линия действия – *скользящий* вектор.

Величина и точка приложения – *приложенный (связанный)* вектор.

Например, вектор угловой скорости относится к скользящим.

Основные характеристики системы векторов – главный вектор и главный момент.

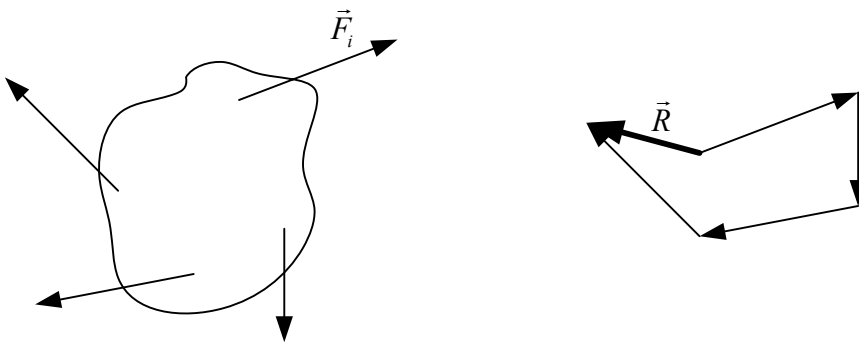


Рисунок 31

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - \text{главный вектор.}$$

Момент вектора относительно полюса:

$$\vec{m}_o(\vec{F}_i) = [\overline{OA}_i \times \vec{F}_i]$$

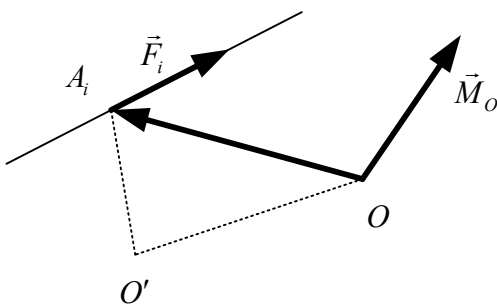


Рисунок 32

$$\vec{M}_o = \sum \vec{m}_o(\vec{F}_i) = \sum [\overline{OA}_i \times \vec{F}_i] - \text{главный момент.}$$

Главный момент является связанным вектором

$$\vec{M}_{o'} = \vec{M}_o + [\overline{O'O} \times \vec{R}]$$

Есть компоненты, которые не меняются при переходе к O' .

Домножим $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + [\vec{O'O} \times \vec{R}]$ на $\frac{\vec{O'O}}{|\vec{O'O}|}$:

$$\frac{(\vec{M}_{O'} \cdot \vec{O'O})}{|\vec{O'O}|} = \frac{(\vec{M}_O \cdot \vec{O'O})}{|\vec{O'O}|}$$

Т.е. *проекции* главных моментов относительно двух полюсов на линию, соединяющую полюса, равны.

Домножим $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + [\vec{O'O} \times \vec{R}]$ на $\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$:

$$\frac{(\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R})}{|\vec{R}|} = \frac{(\vec{M}_O \cdot \vec{R})}{|\vec{R}|}$$

Т.е. *проекция* главного момента на направление главного вектора не зависит от выбора полюса.

Итого, имеется **два инварианта системы векторов относительно выбора полюса**:

1. Главный вектор
2. Проекция главного момента на главный вектор.

Рассмотрим задачу приведения системы скользящих векторов к простому виду.

Решаем данную задачу с следующей целью: какими бы сложными ни были движения по сути их можно представить одним простым видом движения.

Вводится понятие эквивалентности систем скользящих векторов. Мы должны получить систему, эквивалентную исходной.

Две системы скользящих векторов называются **эквивалентными**, если одна из другой получается с помощью элементарных операций: добавление элементарного векторного нуля, и сложение и разложение векторов по правилу параллелограмма.

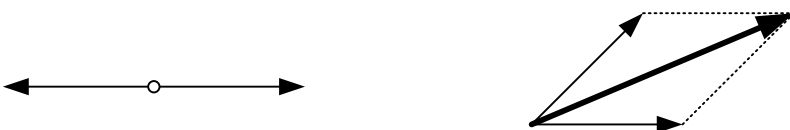


Рисунок 33

Критерий эквивалентности – две системы скользящих векторов эквивалентны в том и только в том случае, если равны их главные векторы и главные моменты относительно произвольно выбранного полюса.

Лемма. Произвольная система векторов может быть приведена к двум векторам, один из которых приложен к произвольной точке.

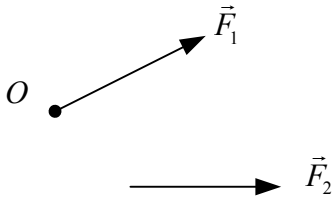


Рисунок 34

Приведение системы скользящих векторов к выбранному полюсу:

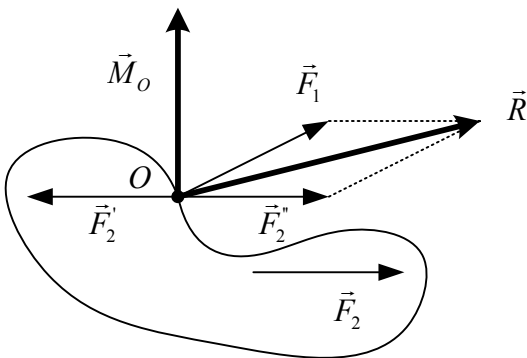


Рисунок 35

Просто перенести скользящий вектор без добавления пары (момента) мы не можем.

Рассмотрим все возможные случаи приведенных систем скользящих векторов:

1. $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, (\vec{M}_O \cdot \vec{R}) \neq 0$ (винт)

Проекция \vec{M}_1 неизменна, т.к. является вторым инвариантом, т.е. проекцией главного момента на главный вектор.

$$\vec{M}_N = \vec{M}_O + [\vec{NO} \times \vec{R}]$$

$$\vec{ON} \perp \text{плоскости } \vec{R}, \vec{M}_O$$

Найдется такая точка N^* , что

$$[\vec{N^*O} \times \vec{R}] = -\vec{M}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{M}_{N^*} = \vec{M}_O - \vec{M}_2 = \vec{M}_1$$

Также говорят, приводим систему скользящих векторов к простейшему виду.

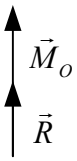


Рисунок 38

Найдем уравнение оси минимальных моментов из условия параллельности главного момента и главного вектора.

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + [\vec{PO} \times \vec{R}] = \eta \vec{R}$$

$$\vec{M}_O + [\vec{PO} \times \vec{R}] = \vec{M}_O - [\vec{OP} \times \vec{R}] = \boxed{\vec{M}_O - [\vec{r} \times \vec{R}] = \eta \vec{R}}$$

- векторная запись уравнения оси минимальных моментов.

$$[\vec{r} \times \vec{R}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yR_z - zR_y) + \vec{j}(zR_x - xR_z) + \vec{k}(xR_y - yR_x)$$

Тогда,

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \eta, \quad \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \eta, \quad \frac{M_z - xR_y - yR_x}{R_z} = \eta$$

$$\boxed{\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y - yR_x}{R_z}}$$

Координатная запись уравнения оси минимальных моментов.

2. $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, (\vec{M}_O \cdot \vec{R}) = 0$ (равнодействующая)

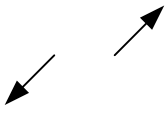
Систему характеризует только один инвариант, \vec{R} - равнодействующая, к которой система сводится.

К данному случаю относится также вариант $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O = 0$



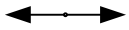
3. $\vec{R} = 0, \vec{M}_O \neq 0$ (равнодействующая пара)

Чистое поворачивающее усилие:



4. $\vec{R} = 0, \vec{M}_O = 0$ (равновесие)

Векторный нуль:



Пример.

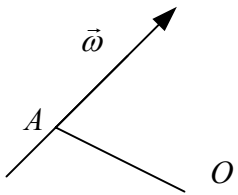


Рисунок 39

$$\vec{m}_O(\vec{\omega}) = [\vec{OA} \times \vec{\omega}] = [\vec{\omega} \times \vec{AO}] = \vec{v}_O$$

Т.е. момент угловой скорости является скоростью.

В кинематике \vec{R} соответствует $\vec{\omega}$, а \vec{M}_O соответствует \vec{v} .

Случай	Теория скользящих векторов	Кинематика
	Винт	Кинематический винт
	Равнодействующая	Вращение
	Равнодействующая пара	Поступательное движение
	Равновесие	Покой

Пример.

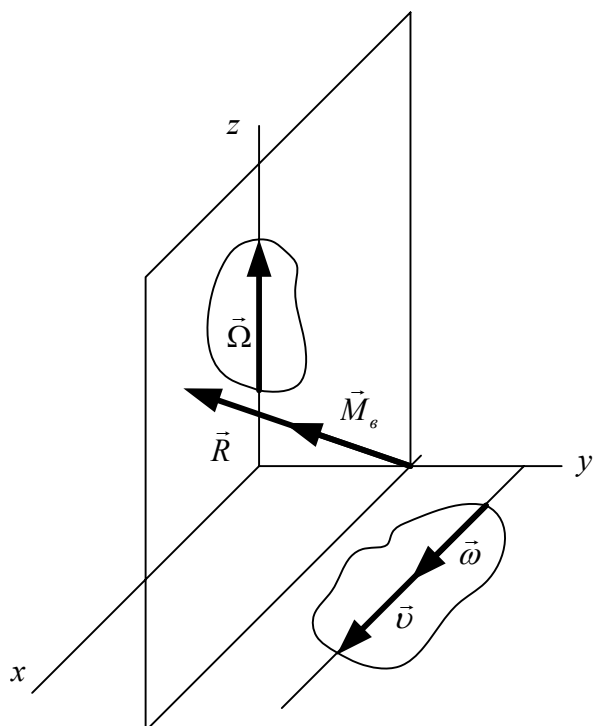


Рисунок 40

Тело совершает винтовое движение, а другое тело вращается относительно оси z .
Найти простейший вид относительного движения первого тела относительно второго.

$$R_x = \omega, R_y = 0, R_z = \Omega,$$

$$M_x = \nu, M_y = 0, M_z = -\omega a$$

$$R = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$$

$$M_1 = M_e = \frac{(\vec{M}_o \cdot \vec{R})}{R} = \frac{\omega \nu - \Omega \omega a}{\sqrt{\omega^2 + \Omega^2}}$$

Если $\omega = \Omega a$ - чистое вращение.

Если $\omega \neq \Omega a$ - винтовое движение.

Уравнение оси минимальных моментов:

$$\frac{\nu - y\Omega}{\omega} = \frac{-z\omega + x\Omega}{0} = \frac{-\omega a + y\omega}{\Omega}$$

Отсюда, $z = \frac{\Omega}{\omega} x$

$$\nu\Omega - y\Omega^2 = -\omega^2 a + y\omega^2,$$

$$y = \frac{v\Omega + \omega^2 a}{\omega^2 + \Omega^2}$$



СЕМИНАР №6.



ДИНАМИКА

До сих пор мы рассматривали геометрию движения, не вникая в причины. Теперь движение будет рассмотрено в причинно-следственной связи. Существует две задачи динамики:

- 1) По движению определить силы;
- 2) По силам определить движение.

В основном делается акцент на второй задаче.

В качестве постулатов динамики выступают:

Три закона Ньютона,

Принцип независимости действия сил,

Принцип освобожденности от связей.

С первыми двумя вы уже знакомы, о последнем – подробнее.

Движущиеся объекты испытывают ограничения. Тела и поверхности, ограничивающие это движение, называются **связями**, а силы – **реакциями связей**.

Принцип освобожденности от связей гласит:

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить их связи и заменить их реакциями.

Примеры.

На гладкой и шероховатой поверхности находится тело.

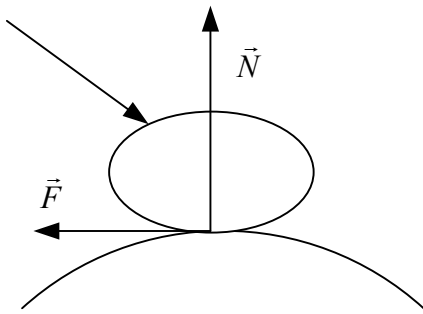


Рисунок 41

Можно выделить следующие реакции:

Реакцию по нормали к поверхности и реакцию шероховатой поверхности при наличии активных сил в касательном направлении.

Экспериментальный закон Кулона относительно предельной силы трения гласит:

$$F_{пред} = fN .$$

До начала движения при $F_{тр} < fN$ округлое тело либо находится в покое, либо катится без проскальзывания. Считается, что при скольжении $F_{тр} = F_{пред}$ сохраняется, хотя в начальный момент она больше fN .

f - коэффициент трения не зависит от величины поверхности соприкосновения тел и определяется материалом и качеством обработки. Есть таблицы коэффициентов трения f . В задачах f задан или подлежит определению.

Еще один пример связи – шарнир. Шарнир состоит из втулки и пальца шарнира.

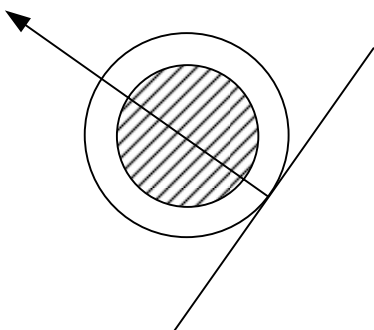


Рисунок 42

Шарнир в виде цилиндра имеет две неизвестных компоненты силы реакции, в виде шара – три.

Блок – еще один тип связи. Желоб блока делают гладким.

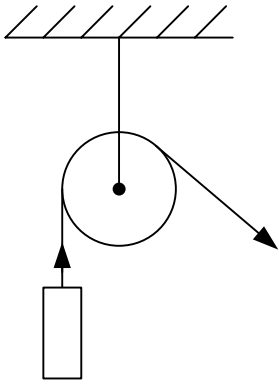


Рисунок 43

Поскольку трения в блоке нет силы, действующие на трос по разные стороны блока, равны по величине, хотя имеют разные направления.

Еще один пример – балка в стене.

Реакция в этом случае не определена. Шесть неизвестных: $2 \times 3 = 6$.

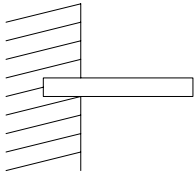


Рисунок 44

Известно, что реакцию связи можно свести к двум силам, одна из которых связана с точкой.

Реакция – пассивная сила, она является следствием воздействия активных сил.

ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Импульс \vec{P} , момент импульса \vec{K}_O и кинетическая энергия T .

Импульс по определению: $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$.

Центр масс (инерции) определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i},$$

где \vec{r}_i - радиусы-векторы, проведенные из одного и того же полюса.

Тогда, если \vec{r}_C продифференцировать, то:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_C}$$

Кинетический момент по определению:

$$\boxed{\vec{K}_O = \sum [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i]}$$

Сделаем подсчет \vec{K}_O с рассмотрением сложного движения, при этом вводится подвижная система отсчета.

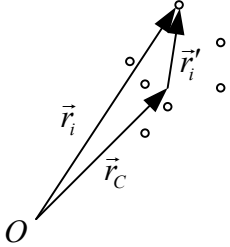


Рисунок 45

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^e + \vec{v}'_i$$

$$\vec{v}_i^e = \vec{v}_C + [\vec{\omega}_e \times \vec{r}'_i]$$

Пусть система отсчета будет поступательной, т.е. $\omega_e = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] = \sum [(\vec{r}_C + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v}_C + \vec{v}'_i)] = \\ &= [\vec{r}_C \times m \vec{v}_C] + \left[\vec{r}_C \times \underbrace{\left(\sum m_i \vec{v}'_i \right)}_{m \vec{v}'_C = 0} \right] + \left[\underbrace{\left(\sum m_i \vec{r}'_i \right)}_{m \vec{r}'_C = 0} \times \vec{v}_C \right] + \sum [\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i] = \\ &= [\vec{r}_C \times \vec{P}] + \sum [\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i] \end{aligned}$$

Т.е. для системы точек $\vec{K}_O = [\vec{r}_C \times \vec{P}] + \sum [\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i]$ при выборе поступательной системы отсчета.

В аналогичном случае для твердого тела:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^e + \vec{v}'_i = \vec{v}_C + [\vec{\omega}_a \times \vec{r}'_i]$$

Если подставим $\vec{v}'_i = [\vec{\omega}_a \times \vec{r}'_i]$, то:

$$\boxed{\vec{K}_O} = [\vec{r}_C \times \vec{P}] + \sum [\vec{r}'_i \times m_i [\vec{\omega}_a \times \vec{r}'_i]] = \boxed{[\vec{r}_C \times \vec{P}] + \hat{J}_C \vec{\omega}}$$

где \hat{J}_C - матрица тензора инерции.

В случае, когда $\vec{\omega}_a \perp \vec{r}'_i$: (плоско-параллельное движение, например)

$$\sum m_i [\vec{r}'_i \times [\vec{\omega}_a \times \vec{r}'_i]] = \vec{\omega}_a \sum m_i (\vec{r}'_i)^2 - \underbrace{\sum m_i \vec{r}'_i (\vec{\omega}_a \cdot \vec{r}'_i)}_{=0} = J_C^a \vec{\omega}_a$$

где J_C^ω - момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции C и параллельной вектору $\vec{\omega}_a$, т.е. в этом случае

$$\vec{K}_O = [\vec{r}_C \times \vec{P}] + J_C^\omega \vec{\omega}_a$$

Пример.

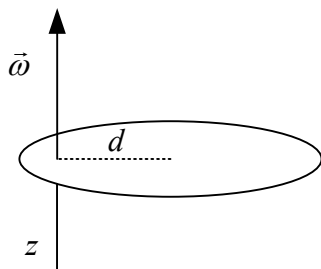


Рисунок 46

$$p = m\omega d$$

$$K_z = m\omega d^2 + J_C^\omega \omega = (J_C^\omega + md^2) \omega = J_z \omega$$

$$J_z = J_C^\omega + md^2 \text{ - момент инерции относительно оси } z \text{ .}$$

Последнее равенство ни что иное как использование теоремы Гюйгенса-Штейнера.

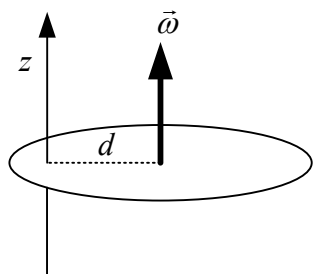


Рисунок 47

Теорему Гюйгенса-Штейнера можно применять только когда есть чистое вращение, а в последнем случае – нельзя, и надо применять общую формулу:

$$\vec{K}_O = [\vec{r}_C \times \vec{P}] + J_C^\omega \vec{\omega}_a$$

Кинетическая энергия по определению:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^r \text{ при } \omega_e = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \sum m_i (v_i^r)^2$$

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия системы точек (твердого тела) равна кинетической энергии движения центра масс системы с мысленно сосредоточенной в нем массой всех точек (твердого тела), плюс кинетическая энергия относительного движения относительно системы отсчета с началом в центре масс и движущейся поступательно.

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + T_{\text{отн}}$$

Такую систему еще называют кениговой. (начало в точке C , $\omega_e = 0$)

Если $\vec{\omega}_a \perp \vec{r}'_i$, то

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C^{\omega} \omega_a^2$$

В общем случае $T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_a^T \hat{J}_C \vec{\omega}_a$

Задача. (см. рис. 48)

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 3m_2\omega R, \quad P_3 = 7m_3\omega R, \quad P_{cm} = \frac{7}{2}m\omega R$$

- импульсы дисков и стержня.

Метод Виллиса:

$$-4\omega 2R = -(\omega_2 - \omega)R = (\omega_3 - \omega)3R$$

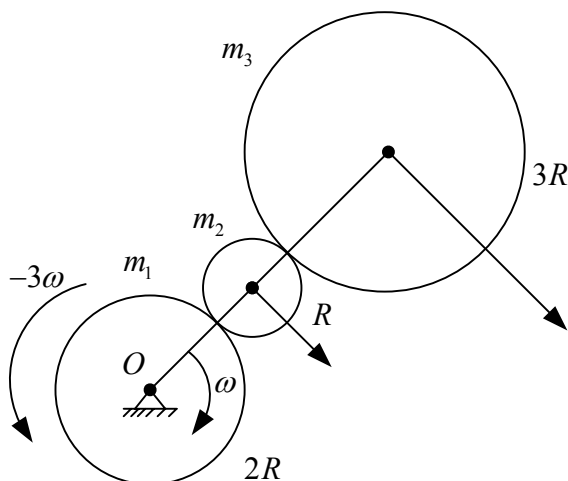


Рисунок 48

$$\omega_1 = -3\omega, \quad \omega_2 = 9\omega, \quad \omega_3 = -\frac{5}{3}\omega$$

$$\vec{K}_O = [\vec{r}_C \times \vec{P}] + J_C^{\omega} \vec{\omega}_a$$

$$K_{1O} = 0 + \frac{1}{2} m_1 (2R)^2 (-3\omega)$$

$$K_{2O} = 3R \cdot 3m_2 \omega R + \frac{1}{2} m_2 R^2 9\omega$$

$$K_{3O} = 7R \cdot 7m_3 \omega R + \frac{1}{2} m_3 (3R)^2 \left(-\frac{5}{3} \omega \right)$$

$$K_{cmO} = \frac{1}{3} m (7R)^2 \omega$$

$$K_O = K_{1O} + K_{2O} + K_{3O} + K_{cmO}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C^o \omega^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_1 (2R)^2 (-3\omega)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (3\omega R)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_2 R^2 (9\omega)^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (7\omega R)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_3 (3R)^2 \left(-\frac{5}{3} \omega \right)^2$$

$$T_{cm} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m (7R)^2 \omega^2$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_{cm}$$





ИЗМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК \vec{P}, \vec{K}_O, T

Теорема об изменении импульса:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}_{\text{внеш}}}$$

Наиболее широко используется запись в проекциях.

Например, на оси естественного трехгранника.

$$m \frac{dv_C}{dt} = R_\tau$$

$$m \frac{v_C^2}{\rho_C} = R_n$$

Теорема об изменении момента импульса \vec{K}_O :

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{внеш}} - m[\vec{v}_O \times \vec{v}_C]}$$

если полюс O подвижен.

Точку O лучше выбирать так, чтобы уравнение имело простой вид. Например, выбирать точку O на неподвижной оси или в центре масс C .

Теорема об изменении кинетической энергии T :

$$\boxed{dT = \delta A^{\text{всех-сил}}}$$

Элементарная работа: $\delta A = \sum \vec{F}_k d\vec{r}_k$

Если сила зависит от положения, вводится понятие поля.

Если поле описывается одной функцией, то это поле будет потенциальным, при условии, что для $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$:

$$\text{ЭП}(x, y, z): \begin{cases} F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \end{cases}$$

- дифференциальный критерий потенциальности поля.

Для потенциального поля:

$$\delta A = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$$

Задача С.6.28.

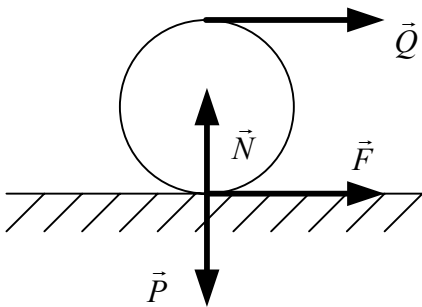


Рисунок 49

$$f = \frac{1}{8}$$

$W_C, \varepsilon - ?$

$$1) Q = \frac{1}{3}P$$

$$2) Q = P$$

Рисуем силы. Силу трения можно направить вправо, и знак в ответе скажет, правильно ли мы сделали.

$$(1) mW_C = Q + F$$

Если качение без проскальзывания, то за точку отсчета можно взять точку касания.

Если с проскальзыванием, то за точку отсчета лучше взять центр масс.

Нам неизвестно будет ли колесо проскальзывать, поэтому берем за точку отсчета центр масс C . Тогда:

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{внеш}}$$

$$\text{Т.к. } \vec{K}_C = J_C^o \vec{\omega}_a \Rightarrow \frac{d\vec{K}_C}{dt} = J_C^o \vec{\varepsilon}_a.$$

$$(2) \frac{1}{2} mr^2 \varepsilon = Qr - Fr$$

Если нет проскальзывания, то $F \leq fN$ и $W_C = \varepsilon r$, также учитывается, что $N = P$.

Если есть проскальзывание, то $F = fN$ и $W_C \neq \varepsilon r$.

Надо найти диапазон Q , при котором движение без проскальзывания.

$$(1)-(2)2: \{W_c = \varepsilon r\}:$$

$$0 = -Q + 3F \Rightarrow F = \frac{1}{3}Q$$

$$F \leq fN \Rightarrow \frac{1}{3}Q \leq \frac{1}{8}P$$

$$N = P \Rightarrow Q \leq \frac{3}{8}P$$

$$1) Q = \frac{1}{3}P$$

$$mW_c = \frac{1}{3}P + \frac{1}{9}P = \frac{4}{9}mg \Rightarrow W_c = \frac{4}{9}g$$

$$\varepsilon = \frac{4g}{9r}$$

$$2) Q = P$$

$$mW_c = P + \frac{1}{8}P = \frac{9}{8}mg \Rightarrow W_c = \frac{9}{8}g$$

$$\frac{1}{2}mr\varepsilon = P - \frac{1}{8}P \Rightarrow \varepsilon = \frac{7g}{4r}$$

Колесо буксует.

Либо колесо буксует ($\varepsilon r > W_c$), либо идет юзом ($\varepsilon r < W_c$), либо идет без проскальзывания ($\varepsilon r = W_c$).

Задача.

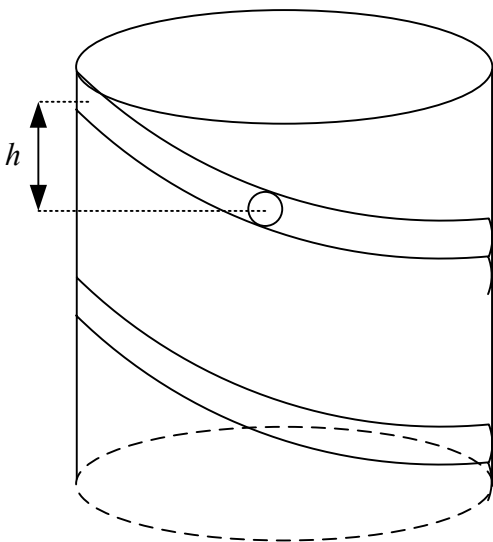


Рисунок 50

Гладкий желоб в цилиндре

$$M, R, m, \frac{1}{2}MR^2$$

$$\omega(h) = ?$$

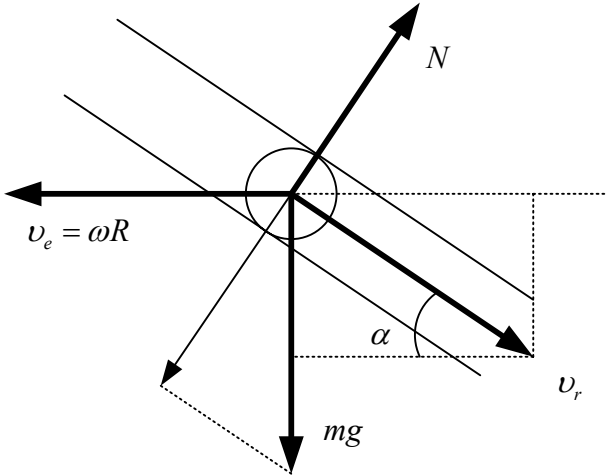


Рисунок 51

Используем теорему о сохранении момента относительно оси вращения:

$$\frac{MR^2}{2}\omega - m(v_r \cos \alpha - \omega R)R = 0$$

Закон сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_a^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}MR^2\omega^2}{2}$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до константы.

$$v_a^2 = (v_r \cos \alpha - \omega R)^2 + v_r^2 \sin^2 \alpha$$

$$v_r \cos \alpha - \omega R = \frac{MR\omega}{2m}$$

$$v_r = \left(\frac{MR\omega}{2m} + \omega R \right) \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$v_a^2 = \left(\frac{M^2 R^2}{4m^2} + \left(\frac{MR}{2m} + R \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \omega^2$$

$$2mgh = m\omega^2 \left(A + \frac{1}{2}MR^2 \right)$$

$$A = \frac{M^2 R^2}{4m^2} + \left(\frac{MR}{2m} + R \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2gh}{A + \frac{1}{2}MR^2}}$$

Задача.

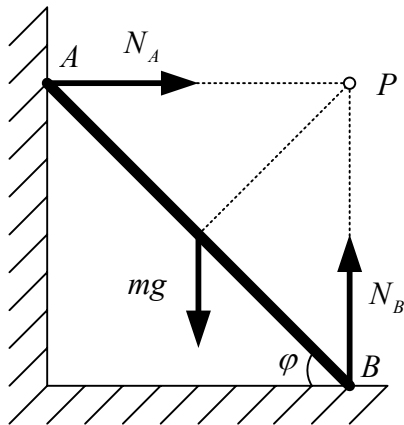


Рисунок 52

$$AB = a$$

$$\varphi(0) = \varphi_0$$

$$1) \omega_{cm}, \varepsilon_{cm} = ?$$

$$2) \varphi_1 = ?, \text{ когда стержень отойдет от стены}$$

Закон сохранения энергии:

$$mg \frac{a}{2} \sin \varphi_0 = mg \frac{a}{2} \sin \varphi + \frac{1}{6} ma^2 \omega^2$$

$$J_P = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4}$$

P - мгновенный центр вращений

$$\omega^2 = g \frac{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}{a} 3$$

Выбирая точку P , избавляемся от моментов сил реакций у стенок.

Закон сохранения моментов импульсов:

$$J_P \ddot{\varphi} = \frac{ma^2}{3} \ddot{\varphi} = -\frac{a}{2} \cos \varphi \cdot mg$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g \cos \varphi}{2a}$$

Условие отрыва: $N_A = 0$.

$$m\ddot{x}_C = N_A = 0$$

$$x_C = -\frac{a}{2} \cos \varphi$$

$$\dot{x}_C = \frac{a}{2} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x}_C = \frac{a}{2} \cos \varphi (\dot{\varphi})^2 + \frac{a}{2} \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\cos \varphi (\dot{\varphi})^2 + \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} = 0$$

$$\cos \varphi \frac{g(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)3}{a} + \sin \varphi \left(-\frac{3g \cos \varphi}{2a} \right) = 0$$

$$\sin \varphi_0 - \frac{3}{2} \sin \varphi = 0$$

$$\sin \varphi = \frac{2}{3} \sin \varphi_0$$

Отрыв будет при таком $\tilde{\varphi}$: $\sin \tilde{\varphi} = \frac{2}{3} \sin \varphi_0$





ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА И В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Формула Кориолиса:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k$$

С ее помощью можно получить закон изменения импульса в неинерциальной СО:

$$\frac{d\vec{P}_r}{dt} = m\vec{W}_r^C = \vec{R}^{внеш} + \vec{F}_e + \vec{F}_k$$

где вводятся **переносная и кориолисова силы инерции**:

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{F}_e} &= -\sum m_i \vec{W}_i^e = -\sum m_i \left(\vec{W}_O + [\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}'_i] + [\vec{\omega}_e \times [\vec{\omega}_e \times \vec{r}'_i]] \right) = \\ &= -m \left(\vec{W}_O + [\vec{\varepsilon}_e \times \vec{r}'_C] + [\vec{\omega}_e \times [\vec{\omega}_e \times \vec{r}'_C]] \right) = \boxed{-m\vec{W}_e^C} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F}_k} = -\sum m_i \vec{W}_i^k = \boxed{-m\vec{W}_k^C}$$

Для момента импульса:

$$\frac{d\vec{K}_r^O}{dt} = \vec{M}_O^{внеш} + \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^k - m[\vec{v}_O \times \vec{v}_C]$$

Для кинетической энергии:

$$\boxed{dT_r = \delta A^{всех-сил} + \delta A^e}$$

Т.к. $\vec{W}_k = 2[\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r] \perp \vec{v}_r \Rightarrow$ кориолисова сила в неинерциальной системе отсчета работы не совершает.

Условия относительного равновесия – условия равновесия в неинерциальной системе отсчета, при этом приравнивают к нулю левые части уравнений, записанных выше.

Задача.

$$l, mg, \omega$$

$$\varphi = ?$$

$$v_r = 0 \Rightarrow W_k = 0$$

$$F^e = m\omega^2 \frac{l}{2} \sin \varphi$$

X_o, Y_o, Z_o - силы реакции, $X_o \perp$ плоскости, содержащей вертикаль и стержень.

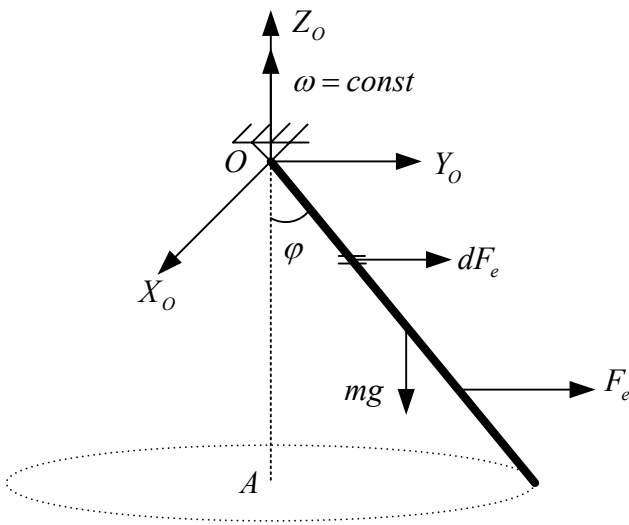


Рисунок 53

$$X_o = 0$$

$$Y_o + F^e = 0 \Rightarrow Y_o = -F^e = -m\omega^2 \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$$Z_o - mg = 0 \Rightarrow Z_o = mg$$

$$N = \sqrt{m^2 g^2 + \left(m\omega^2 \frac{l}{2} \sin \varphi \right)^2} - \text{полная реакция}$$

Теперь моменты сил:

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi + M_o^e = 0 \quad (*)$$

Так как не знаем, где приложена равнодействующая, выделим элемент на стержне:

$$M_o^e = \int dM_o^e$$

$$dF^e = dm \cdot \omega^2 \xi \sin \varphi, \text{ где } \xi - \text{расстояние от } O \text{ до элемента } dm$$

$$dM_o^e = dF^e \xi \cos \varphi$$

$$dm = \rho d\xi$$

$$M_o^e = \int dM_o^e = \int_0^l \rho \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \xi^2 d\xi = m\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{l^2}{3}$$

Подставим в (*):

$$-mg \frac{l}{2} \sin \varphi + m\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{l^2}{3} = 0$$

$$1. \varphi = 0$$

2. $\varphi = \pi$

3. $\varphi = \arccos\left(\frac{3g}{2l\omega^2}\right)$, возможно при $\omega^2 \geq \frac{3g}{2l}$

Найдем точку приложения равнодействующей переносных сил инерции:

$$M_o^e = F^e h$$

$$h = \frac{M_o^e}{F^e} = \frac{2m\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi l^2}{3m\omega^2 l \sin \varphi} = \frac{2}{3} l \cos \varphi$$

Можно было найти по-другому:

$$dF^e = dm \cdot \omega^2 \xi \sin \varphi \sim \xi$$

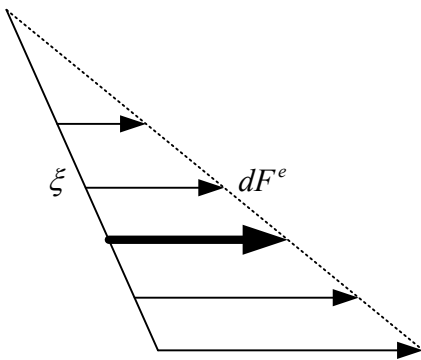


Рисунок 54

В треугольниках центр тяжести на расстоянии двух третей от вершины на медиане.

Задача.

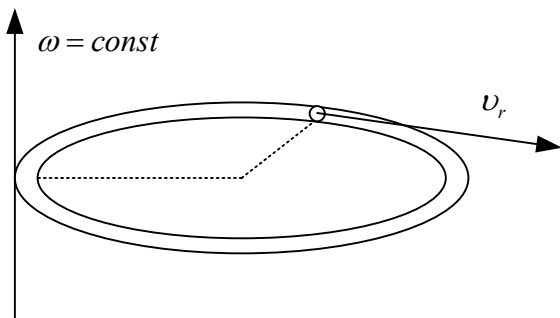


Рисунок 55

Гладкая трубка вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = const$

Шарик массы m

$$\varphi_0, v_0^r$$

$$v_r(\varphi) = ?$$

$$N^r$$

Вид сверху:

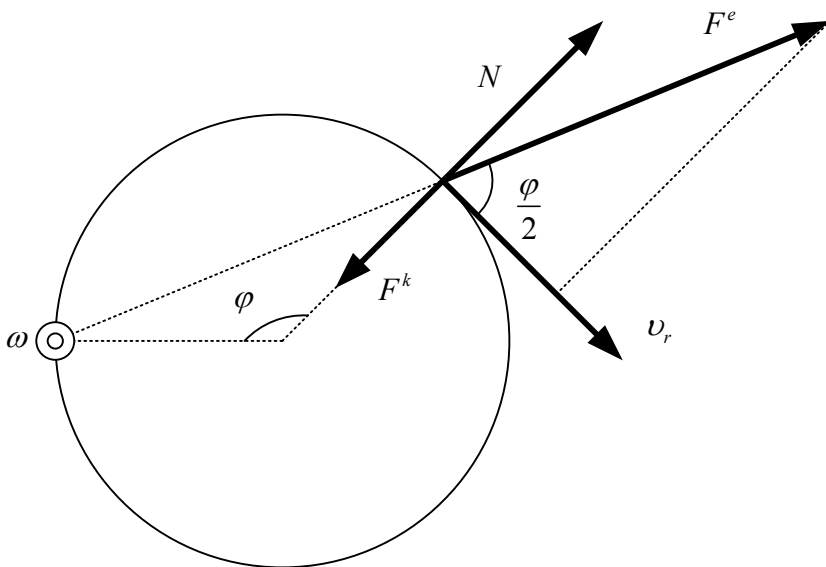


Рисунок 56

Реально действующих сил, совершающих работу, нет.

$$\vec{F}_k = -m\vec{W}_k$$

$$F^e = m\omega^2 2r \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$F^k = 2m\omega v_r$$

$$\frac{mv_r^2}{2} - \frac{mv_{r0}^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} 2m\omega^2 r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} r d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} m\omega^2 \sin \varphi r^2 d\varphi =$$

$$= -m\omega^2 r^2 \cos \varphi \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = m\omega^2 r^2 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

Отсюда:

$$v_r^2 = 2\omega^2 r^2 (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + v_{r0}^2$$

Возьмем уравнение импульсов на нормаль траектории:

$$\frac{mv_c^2}{\rho_c} = R_n$$

С плюсом проецируются те векторы, которые направлены в сторону вогнутости:

$$\frac{mv_r^2}{r} = 2m\omega v_r - 2m\omega^2 r \sin^2 \frac{\varphi}{2} - N$$

Отсюда находим $N(\varphi)$

По другому:

$$m \frac{dv_r}{dt} = R_r = F^e \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$v_r = r \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow dt = \frac{rd\varphi}{v_r} \Rightarrow m \int_{v_{r0}}^{v_r} v_r dv_r = \int_{\varphi_0}^{\varphi} F^e \cos \frac{\varphi}{2} r d\varphi$$

ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Центральное поле

$$\vec{F}(r) = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

- - сила притяжения

+ - сила отталкивания

В центральном поле выполняется закон сохранения момента импульса:

$$\vec{K}_O = [\vec{r} \times m\vec{v}] = \overline{const}$$

В полярных координатах:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{\varphi}_0$$

$r^2\dot{\varphi} = const = c$ - закон площадей справедлив для любого центрального поля.

Закон сохранения энергии также имеет место:

$$T + \Pi = const$$

Действительно,

$$\delta A = \vec{F}(r) d\vec{r} = \pm F(r) \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r}$$

$$\vec{r} d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = r dr$$

$$\delta A = \pm F(r) dr$$

Последнее выражение зависит от одной переменной и всегда может быть рассмотрено как полный дифференциал. Это значит, что работа зависит только от начального и конечного положения и на замкнутом контуре равна нулю.

Формулы Бине

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c}{r^2} = -c \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}$$

С учетом этого, а также $\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$, получим:

Первую формулу Бине:

$$v^2 = c^2 \left(\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right)$$

Запишем закон Ньютона:

$$mW_{\text{рад}} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m \left(-\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} - \frac{c^2}{r^3} \right) = \pm F(r)$$

Вторая формула Бине:

$$-\frac{mc^2}{r^2} \left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right) = \pm F(r)$$

Если в поле всемирного тяготения

$$F(r) = -\frac{\gamma m}{r^2}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\gamma}{c^2}$$

$$\frac{1}{r} = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{\gamma}{c^2} \text{ - решение}$$

Уравнение конического сечения чаще пишут:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \text{ - решение в другой форме, в этом случае полярная ось совпадает с}$$

направлением на перигелий (перигей).

Перигелий - точка орбиты планеты, кометы или искусственного спутника Солнца, ближайшая к Солнцу; противоположное - афелий.

Перигей - точка лунной орбиты или искусственного спутника Земли, ближайшая к центру Земли; противоположное – апогей.

Задача С.8.23.

$$\frac{1}{r} = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{\gamma}{c^2}$$

$$-mg = -\frac{\gamma m}{R^2} \Rightarrow \gamma = gR^2$$

$$c = r \cdot r\dot{\varphi} = Rv_0 \cos \alpha$$

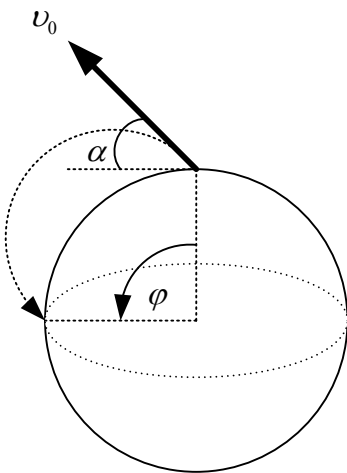


Рисунок 57

В начальный момент $\varphi = 0, r = R$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $r = R$

$$\frac{1}{R} = A + \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \text{ для } \varphi = 0$$

$$\frac{1}{R} = B + \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \text{ для } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$A = B = \frac{1}{R} - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Общее решение:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{R} - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) (\cos \varphi - \sin \varphi) + \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Однако, отсюда v_0 не определить. Из задачи Коши (т.е. из граничных условий):

$$\left. \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right|_0 = \frac{1}{R} - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (*)$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_0 = -c \left. \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right|_0 \quad (\text{см. вывод первой формулы Бине})$$

С другой стороны радиальная скорость $\left. \frac{dr}{dt} \right|_0 = v_0 \sin \alpha$.

$$v_0 \sin \alpha = -R v_0 \cos \alpha \left. \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right|_0 \Rightarrow \left. \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right|_0 = -\frac{1}{R} \operatorname{tg} \alpha, \text{ подставляем в } (*):$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$v_0^2 = \frac{gR}{\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)}$$

Рассмотрим формулу конического сечения подробно:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

Траектория:

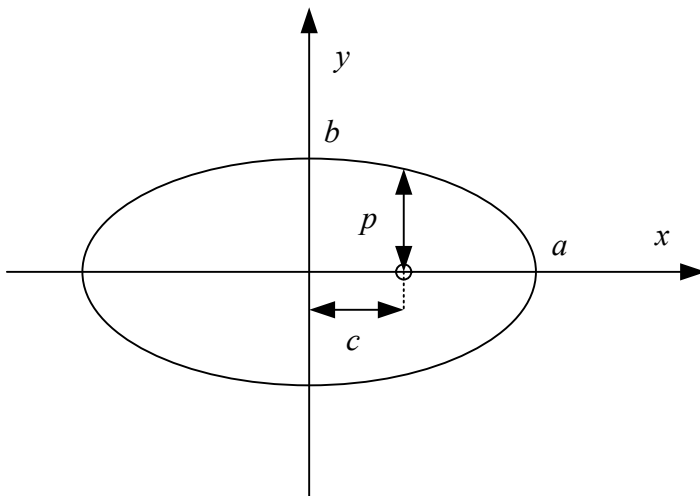


Рисунок 58

e - эксцентриситет

$e < 1$ - финитное движение (спутники, планеты), $e \geq 1$ - инфинитное движение

1. $e < 1$ эллипс, при $e = 0$ окружность радиуса p .

2. $e = 1$ парабола

3. $e > 1$ гипербола

$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Законы Кеплера для планет:

1. Каждая из планет солнечной системы совершает плоское движение с постоянной секторальной скоростью.

2. Траекториями всех планет служат эллипсы, в общем фокусе которых расположено Солнце.

3. Отношение квадратов времен T обращения планет к кубам больших полуосей их эллиптических траекторий одинаково для всех планет:

$$\frac{T^2}{a^3} = const$$

В центральном поле с потенциальной энергией $\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r}$:

$$p = \frac{K_o^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + 2E_o \frac{K_o^2}{m\alpha^2}}$$





КВАТЕРНИОНЫ

Кватернионы введены в математику и механику гениальным ирландцем Уильямом Роуаном Гамильтоном в 1843 году за 18 лет до отмены крепостного права в России.

Кватернион (от лат. quaterni - по четыре) - обобщение понятия комплексного числа.

Имеет вид:

$$\Lambda = \lambda_0 i_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3,$$

где i_0, i_1, i_2, i_3 - специальные единицы.

$$\Lambda + M = (\lambda_0 + \mu_0) i_0 + (\lambda_1 + \mu_1) i_1 + (\lambda_2 + \mu_2) i_2 + (\lambda_3 + \mu_3) i_3$$

Для базисных векторов вводится **операция кватернионного умножения**.

$$\left. \begin{aligned} i_0 \circ i_0 = i_0, i_0 \circ i_k = i_k \circ i_0 = i_k, i_k \circ i_k = -1, \\ i_1 \circ i_2 = i_3, i_2 \circ i_3 = i_1, i_3 \circ i_1 = i_2, \\ i_2 \circ i_1 = -i_3, i_3 \circ i_2 = -i_1, i_1 \circ i_3 = -i_2 \end{aligned} \right\} \leftrightarrow i_k \circ i_j = -(i_k, i_j) + [i_k \times i_j],$$

$k, j = 1, 2, 3$

Если запишем $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}, M = \mu_0 + \vec{\mu}$, то

$$\vec{\lambda} \circ \vec{\mu} = -(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + [\vec{\lambda} \times \vec{\mu}]$$

$$\begin{aligned} \Lambda \circ M &= (\lambda_0 + \vec{\lambda}) \circ (\mu_0 + \vec{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \vec{\mu} + \vec{\lambda} \mu_0 + \vec{\lambda} \circ \vec{\mu} = \\ &= \lambda_0 \mu_0 + \lambda_0 \vec{\mu} + \vec{\lambda} \mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + [\vec{\lambda} \times \vec{\mu}] \end{aligned}$$

Свойства кватернионного умножения:

1. Дистрибутивность

$$\Lambda \circ (M + N) = \Lambda \circ M + \Lambda \circ N$$

2. Ассоциативность

$$\Lambda \circ (M \circ N) = (\Lambda \circ M) \circ N$$

3. Нет коммутативности

$$\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$$

$$\Lambda \circ M = M \circ \Lambda \text{ при коллинеарности, т.е. когда } [\vec{\lambda} \times \vec{\mu}] = 0$$

4. При циклической перестановке

$$sqal(\Lambda \circ M \circ N) = sqal(N \circ \Lambda \circ M)$$

Т.е. для кватерниона справедливы все основные законы действий, кроме коммутативности умножения.

Сопряженный кватернион:

$$\bar{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda}$$

$$\overline{\Lambda \circ M} = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}$$

$$\overline{\Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n} = \bar{\Lambda}_n \circ \dots \circ \bar{\Lambda}_1$$

Норма кватерниона:

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \lambda_0^2 + (\vec{\lambda}, \vec{\lambda}) = \sum_{k=0}^3 \lambda_k^2$$

$$\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \circ \|M\|$$

$$\|\Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n\| = \|\Lambda_1\| \circ \dots \circ \|\Lambda_n\|$$

Нормированный кватернион:

$$\|\Lambda\| = 1$$

Обратный кватернион:

$$\Lambda^{-1} : \{\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1\}$$

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}, (\|\Lambda\| \neq 0)$$

$$\|\Lambda^{-1}\| = \frac{1}{\|\Lambda\|}$$

$$(\Lambda_1 \circ \dots \circ \Lambda_n)^{-1} = \Lambda_n^{-1} \circ \dots \circ \Lambda_1^{-1}$$

Тригонометрическая запись.

Для нормированного кватерниона:

$$\lambda_0 = \cos \nu, \vec{\lambda} = \vec{e} \sin \nu$$

\vec{e} - единичный вектор, коллинеарный $\vec{\lambda}$

$$\Lambda = \cos \nu + \vec{e} \sin \nu$$

Для ненормированного кватерниона:

$$\Lambda = |\Lambda|(\cos \nu + \vec{e} \sin \nu), |\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$$

Нетрудно проверить, что если $\Lambda_1 = |\Lambda_1|(\cos \nu_1 + \vec{e} \sin \nu_1)$ и $\Lambda_2 = |\Lambda_2|(\cos \nu_2 + \vec{e} \sin \nu_2)$, то

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = |\Lambda_1| |\Lambda_2| (\cos(\nu_1 + \nu_2) + \bar{e} \sin(\nu_1 + \nu_2)).$$

Откуда следует, что $\Lambda^n = |\Lambda|^n (\cos n\nu + \bar{e} \sin n\nu)$.

Рассмотрим поворот твердого тела с неподвижной точкой.

$\vec{i}_k, \vec{e}_j, (k, j = 1, 2, 3)$ - единичные векторы, связанные с ТТ в начальном и конечном положении.

Обозначим:

$\alpha_{kj} = (\vec{i}_k, \vec{e}_j)$ - направляющие косинусы.

Тогда

$$\vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_{kj} \vec{i}_k,$$

$\|\alpha_{kj}\|$ - матрица, задающая положение твердого тела с неподвижной точкой.

Положение (поворот) можно также задавать с помощью углов Эйлера и кватернионов.

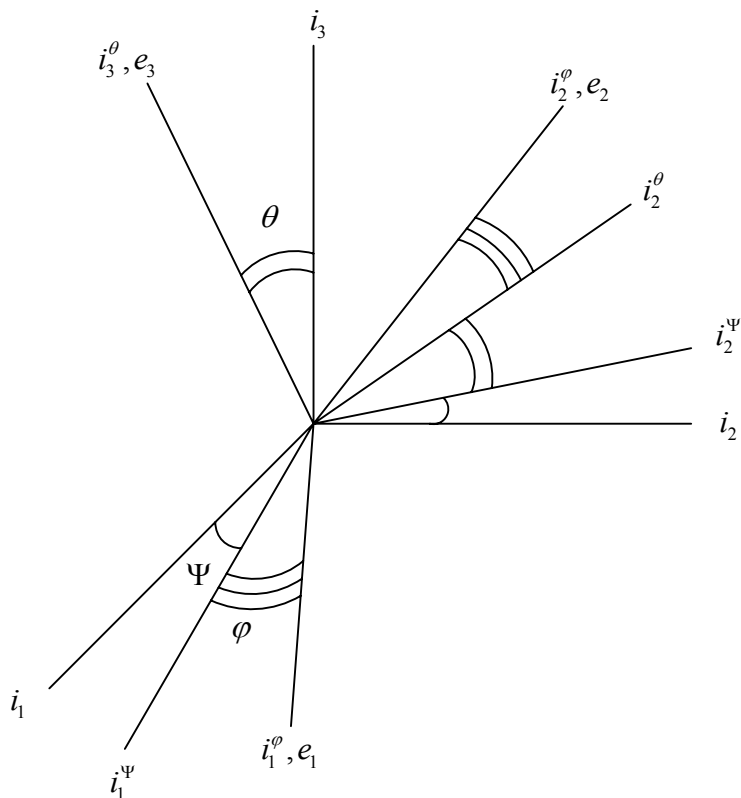


Рисунок 59

Углы Эйлера (см. рис.):

Ψ - угол прецессии,

θ - угол нутации,

φ - угол собственного вращения.

Теорема. Произвольное положение твердого тела с неподвижной точкой O относительно базиса $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ задается некоторым нормированным кватернионом Λ по формулам: $\vec{e}_k = \Lambda \circ \vec{i}_k \circ \bar{\Lambda}$. При этом каждому положению твердого тела соответствуют два значения кватерниона, отличающиеся знаком.

Для точки: $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \bar{\Lambda}$

Теорема (Эйлера о конечном повороте). Любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг некоторой оси \vec{e} на некоторый угол α . При этом ось \vec{e} конечного поворота коллинеарна векторной части кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$, а угол α конечного поворота определяется формулой $\alpha = 2 \arccos \lambda_0$. $\Lambda = \cos \frac{\alpha}{2} + \vec{e} \sin \frac{\alpha}{2}$

Формулы сложения поворотов.

В общем базисе в случае n поворотов, задаваемых кватернионами $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ итоговый поворот задается произведением в обратном порядке:

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \dots \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1.$$

В собственном базисе – в прямом порядке (*- значит, что кватернионы заданы в собственном базисе):

$$\Lambda = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* \circ \dots \circ \Lambda_n^*.$$

Параметры Родрига-Гамильтона – компоненты кватерниона в его собственном базисе.

Собственный базис кватерниона Λ - тот базис, поворот из которого задается этим кватернионом.

Например, повороты на углы Эйлера задаются в собственном базисе:

$$\Lambda_\Psi = \cos \frac{\Psi}{2} + i_3 \sin \frac{\Psi}{2}$$

$$\Lambda_\theta = \cos \frac{\theta}{2} + i_1 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\Lambda_\varphi = \cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2}$$

Итоговый поворот задается прямым кватернионным произведением:

$$\Lambda = \Lambda_{\psi} \circ \Lambda_{\theta} \circ \Lambda_{\varphi}$$

СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

Закон изменения импульса:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{\text{внеш}} + \vec{R}^{\text{дон}},$$

$$\text{где } \vec{R}^{\text{дон}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta \vec{Q}^{\text{yx}}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{Q}^{\text{np}}}{\Delta t} \right).$$

Закон изменения момента импульса:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{внеш}} + \vec{M}_O^{\text{дон}},$$

$$\text{где } \vec{M}_O^{\text{дон}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta \vec{K}_O^{\text{yx}}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{K}_O^{\text{np}}}{\Delta t} \right).$$

Закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{dT}{dt} = N + N^{\text{дон}},$$

где $N = \sum (\vec{F}_i, \vec{v}_i)$ - мощность внешних и внутренних сил, действующих на систему,

$$N^{\text{дон}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta T^{\text{yx}}}{\Delta t} + \frac{\Delta T^{\text{np}}}{\Delta t} \right) - \text{дополнительная мощность.}$$

Уравнение Мещерского:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R}^{\text{внеш}} - \sum_{i=1}^n \frac{dm_i^{\text{yx}}}{dt} \vec{u}_i^{\text{yx}} + \sum_{l=1}^r \frac{dm_l^{\text{np}}}{dt} \vec{u}_l^{\text{np}},$$

где $\vec{u}_i^{\text{yx}} = \vec{C}_i^{\text{yx}} - \vec{v}$, $\vec{u}_l^{\text{np}} = \vec{C}_l^{\text{np}} - \vec{v}$ - скорости уходящих и приходящих масс в подвижной поступательной системе, связанной с телом.

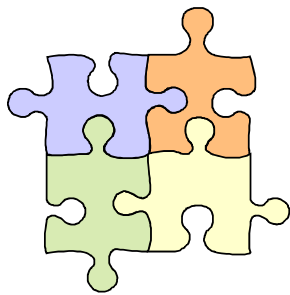
Из уравнения Мещерского при определенных условиях получается **формула**

Циолковского:

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$



РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА



- [1]. Айзерман М.А. Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980.
- [2]. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001.
- [3]. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.
- [4]. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001.
- [5]. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.

Часто спрашиваете, «по какому учебнику готовиться»? Лучше всего – ходить на лекции, готовиться по книге лектора и сдавать лектору, - тогда не будет недоразумений (в разных учебниках бывают разные формулировки).

Большинство находится в другой ситуации. Поэтому я бы посоветовал взять за основу книгу [3], как строгий базис (математическая основа). Затем на основе этого базиса ориентироваться в книгах [1,2] (большой объем, суждения, примеры).

Развивать знания в новом направлении (академическая точка зрения) по книге [4]. А книга [5] подойдет в качестве справочника по некоторым вопросам (самый большой объем). Можете просто прочитать все книжки в порядке [1],[2],[3],[4],[5] (проштудировать, так сказать).

Дополнительная литература (методички и др. в pdf-формате):

- на сайте кафедры теоретической механики <http://teormech.fizteh.ru> или <http://teormech.mipt.ru> (зеркало)
- методические пособия (спрашивайте у преподавателя).

Успехов!