

ТЕМЫ ВТОРОГО ЗАДАНИЯ

Семинар №10

ГЕОМЕТРИЯ МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА

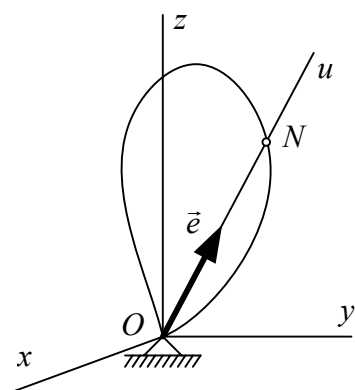


Рисунок 1

Момент инерции твердого тела относительно оси u :

$$J_u = \sum m_i r_i^2 ,$$

Где r_i - расстояние от i -той точки до оси u .

Орт $\vec{e}(\alpha, \beta, \gamma)$ задается направляющими косинусами:

$$\alpha = \cos \angle(x, u), \beta = \cos \angle(y, u), \gamma = \cos \angle(z, u) .$$

$$J_u = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{xz} \alpha \gamma - 2J_{yz} \beta \gamma$$

$$J_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \text{осевой момент инерции (другие по аналогии)} .$$

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i - \text{центробежный момент инерции (другие по аналогии)} .$$

Естественно желание записать выражение наиболее просто.

$$J_u = \vec{e}^T \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \vec{e}$$

Эта симметрическая матрица определяет тензор инерции тела (тензор второго ранга).

Если данная матрица диагональная, то соответствующая квадратичная форма для момента инерции будет канонической.

Ось называется главной, если ее центробежные моменты инерции равны нулю. Например, ось x главная, если $J_{xy} = J_{xz} = 0$.

$$\text{В главных осях } \xi, \eta, \zeta : J_u = J_\xi \alpha^2 + J_\eta \beta^2 + J_\zeta \gamma^2 .$$

Главные оси – это оси симметрии эллипсоида инерции. Главные оси, построенные в центре масс, называются главными центральными осями инерции.

Для того чтобы построить эллипсоид инерции, возьмем на оси u точку N на

расстоянии $ON = \frac{1}{\sqrt{J_u}}$, $\overline{ON} = \frac{\vec{e}}{\sqrt{J_u}}$. Точка N все время движения будет

находиться на поверхности эллипсоида инерции:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{xz} xz - 2J_{yz} yz = 1$$

Если возьмем оси симметрии этого эллипсоида инерции, то это будут главные оси для данной точки O .

Задача поиска главных осей сводится к поиску условного экстремума функции методом Лагранжа: $J_u = f(\alpha, \beta, \gamma)$ при условии $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

$$\varphi = J_u(\alpha, \beta, \gamma) - \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Система имеет нетривиальное решение если

$$\det \|J - \lambda E\| = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем полином третьей степени. Этот полином имеет три действительных корня, т.к. тензор J симметрический с действительными компонентами. Значения λ_i совпадают с главными моментами инерции в выбранной точке O .

Далее находим α, β, γ для λ_i , что дает направление главной оси в $Oxyz$.

Направления главных осей можно также найти из условия коллинеарности вектора нормали к поверхности эллипсоида инерции с радиусом-вектором \vec{R} точки эллипсоида, лежащей на главной оси: $grad J(x, y, z) = \lambda \vec{R}$.

Пример.

Допустим, нам известны главные центральные оси ξ, η, ζ и главные центральные моменты инерции A, B, C . Обозначим центр масс - O . Нужно построить матрицу тензора инерции в точке $D(a, b, c)$ в осях параллельных исходным.

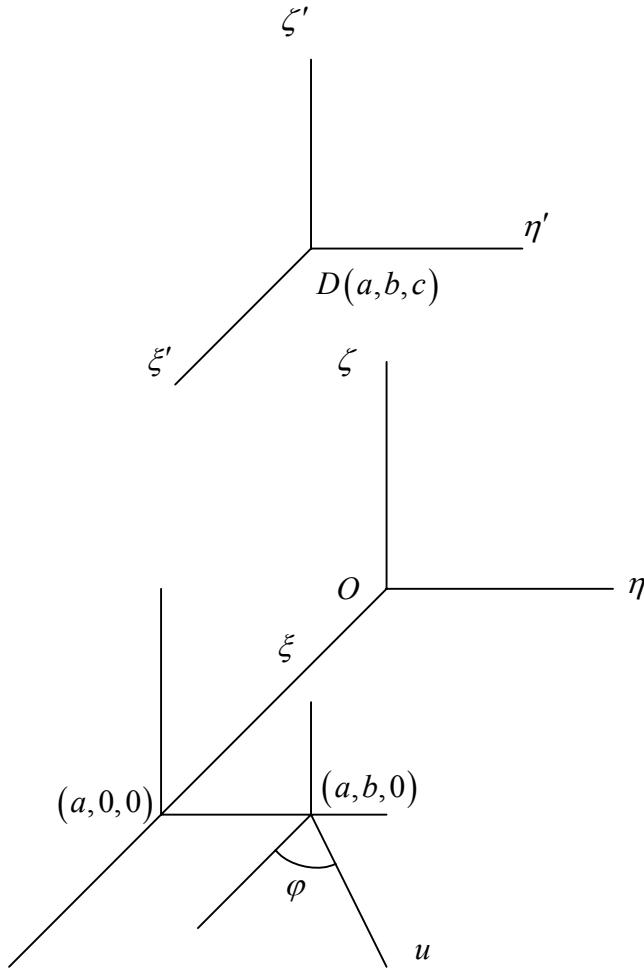


Рисунок 2

$$\begin{aligned}
 J_{\xi'} &= \sum m_i (\eta_i'^2 + \zeta_i'^2) = \sum m_i ((\eta_i - b)^2 + (\zeta_i - c)^2) = \\
 &= \sum m_i (\eta_i + \zeta_i)^2 - 2b \underbrace{\sum_{m\eta_0=0} m_i \eta_i} - 2c \underbrace{\sum_{m\zeta_0=0} m_i \zeta_i} + m(b^2 + c^2) = \\
 &= A + m(b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

$$J_{\xi'\eta'} = \sum m_i \xi_i' \eta_i' = \sum m_i (\xi_i - a)(\eta_i - b) = \underbrace{\sum_{J_{\xi\eta}=0} m_i \xi_i \eta_i} - b \underbrace{\sum_{m\xi_0=0} m_i \xi_i} - a \underbrace{\sum_{m\eta_0=0} m_i \eta_i} + mab$$

И т.д. для других моментов инерции. В итоге:

$$\hat{J}_D = \begin{vmatrix} A + m(b^2 + c^2) & -mab & -mac \\ -mab & B + m(a^2 + c^2) & -mbc \\ -mac & -mbc & C + m(a^2 + b^2) \end{vmatrix}$$

Можно сделать несколько выводов:

1. Момент инерции тела относительно оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями (т. Гюйгенса-Штейнера для частного случая, когда ось параллельна главной центральной оси).
2. Главная центральная ось инерции остается главной для любой своей точки.
3. Главные оси инерции для точек, лежащих на главной центральной оси, параллельны главным центральным осям инерции.
4. Ось, перпендикулярная плоскости, содержащей две главные центральные оси, является главной для точки пересечения этой оси с плоскостью.
5. Для точек пластины пренебрежимо малой толщины моменты инерции связаны равенством $J_{\xi} + J_{\eta} = J_{\zeta}$, где ось $O\zeta$ перпендикулярна плоскости пластины (для пространственной фигуры сумма моментов инерции относительно двух осей инерции всегда больше момента инерции относительно третьей, $J_{\xi} + J_{\eta} > J_{\zeta}, J_{\xi} + J_{\zeta} > J_{\eta}, J_{\zeta} + J_{\eta} > J_{\xi}$).

Наличие симметрии тела облегчает задачу подсчета момента инерции. Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью.

Пример. Однородный диск.

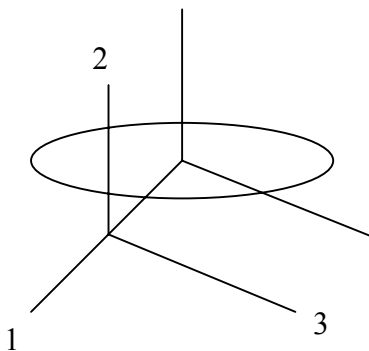


Рисунок 3

Через любую точку можно провести главные оси в три счета.

1 – проходит через точку и центр, 2 - \perp плоскости диска, 3 – ортогонально 1 и 2.

Для любого правильного n -угольника центральный эллипсоид инерции – эллипсоид вращения.

Для любого шара, куба, правильного n -гранника центральный эллипсоид инерции – сфера.

Для центрального эллипсоида инерции в виде эллипсоида вращения введем направляющие косинусы главной оси u (см. рис. 2) $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$.

$$J_u = J_{\xi'} \cos^2 \varphi + J_{\eta'} \sin^2 \varphi - 2J_{\xi'\eta'} \sin \varphi \cos \varphi$$

Функция одной переменной. Ищем экстремум:

$$\frac{dJ_u}{d\varphi} = 0. \text{ Находим } \varphi.$$

Задача.

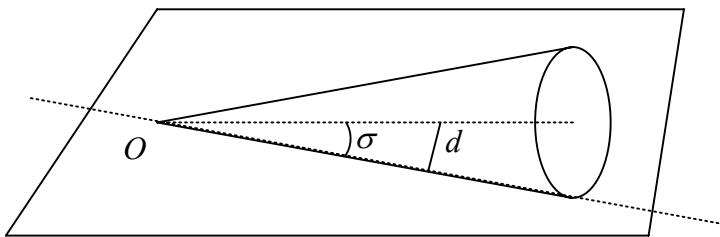


Рисунок 4

$$\vec{K}_O = \hat{J}_O \vec{\omega}$$

$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ - проекция угловой скорости на главные оси, т.е. разложение по базису этих осей.

$$\vec{K}_O = A p\vec{i} + B q\vec{j} + C r\vec{k}$$

A, B, C - осевые моменты инерции.

$\vec{K}_O \parallel \vec{\omega}$, когда $\vec{\omega} \parallel$ одной из главных осей.

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}_a^T \hat{J}_O \vec{\omega}_a = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2)$$

Либо по теореме Кенига:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} (A_C p^2 + B_C q^2 + C_C r^2).$$

Известно: $m, d, \omega, A, B, C, B = C, \sigma$. Без проскальзывания.

Найти: T .

По т. Кенига:

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} (A_C p^2 + B_C q^2 + C_C r^2) = \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 + \frac{1}{2} (A \cos^2 \sigma + C \sin^2 \sigma) \omega^2$$

Задача. С.11.19.

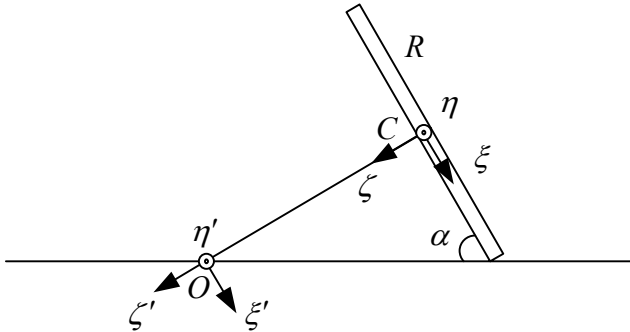


Рисунок 5

v, m, α, R

$$T = \frac{1}{2} J_O^o \omega_a^2 = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2)$$

$$\omega = \frac{v}{R \sin \alpha}$$

$C \xi \eta \zeta$ - главные центральные оси. Главные оси для точки O получаем параллельным переносом.

$$p = \omega \cos \alpha = \frac{v}{R \operatorname{tg} \alpha}$$

$$q = 0$$

$$r = -\omega \sin \alpha = -\frac{v}{R}$$

$$A = B = \frac{mR^2}{4} + md^2 = mR^2 \left(\frac{1}{4} + \operatorname{tg}^2 \alpha \right)$$

$$C = \frac{mR^2}{2} \text{ (в главных центральных осях } A + B = C \text{).}$$

$$T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) = \frac{1}{2} \left(mR^2 \left(\frac{1}{4} + \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \frac{v^2}{R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{mR^2}{2} \frac{v^2}{R^2} \right)$$

Можно было по т. Кенига.

$A_C = B_C = \frac{mR^2}{4}, C_C = \frac{mR^2}{2}$. Поскольку оси коллинеарны, p, q, r те же.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mR^2}{4} \frac{v^2}{R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{mR^2}{2} \frac{v^2}{R^2} \right)$$

СЕМИНАР №11

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ – ЧИСТОЕ ВРАЩЕНИЕ

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{внеш}}$$

$$\vec{K}_O = A p \vec{i} + B q \vec{j} + C r \vec{k}$$

В проекциях на главные оси.

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = A \dot{p} \vec{i} + B \dot{q} \vec{j} + C \dot{r} \vec{k} = \hat{J}_O \vec{\varepsilon} -$$

относительная скорость конца вектора кинетического момента, называют локальной производной.

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}], \frac{d\vec{j}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}], \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}],$$

$\vec{\omega}$ - угловая скорость твердого тела.

В итоге получим:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{K}_O] = \vec{M}_O$$

- векторная запись динамических уравнений Эйлера.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d(\omega \vec{\omega}_0)}{dt} = \frac{d(p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k})}{dt} = \dot{p} \vec{i} + \dot{q} \vec{j} + \dot{r} \vec{k} + [\vec{\omega}, \vec{\omega}] = \dot{p} \vec{i} + \dot{q} \vec{j} + \dot{r} \vec{k}$$

$$[\vec{\omega}, \vec{K}_O] = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta \\ C\dot{r} + (B - A)qp = M_\zeta \end{cases} - \text{Динамические уравнения Эйлера}$$

ДУЭ очень компактны, лаконичны.

В каких осях записываются ДУЭ? В главных.

Относительно каких осей реализуется движение в ДУЭ? Относительно неподвижных (относительно абсолютной СО).

*Определение динамических реакций
при вращении тела вокруг неподвижной оси*

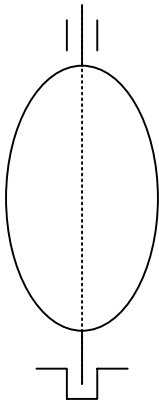


Рисунок 6

Динамические реакции – это добавки к статическим, возникшие вследствие вращения.

При каких условиях эти вредные разрушающие реакции возникают?

Запишем теоремы об изменении импульса и момента импульса.

$$m\vec{W}_C = \vec{R} = \underbrace{\vec{R}^{\text{активные}} + \vec{R}^{\text{статические}}}_{\text{статические}} + \vec{R}^{\text{динамические}} = \underbrace{\vec{R}^a + \vec{R}^{cm}}_{\text{статические}} + \vec{R}^{\delta}$$

$$\frac{d'\vec{K}_O}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{K}_O] = \vec{M}_O = \underbrace{\vec{M}_O^a + \vec{M}_O^{cm}}_{\text{статические}} + \vec{M}_O^{\delta}$$

Активные силы: силы тяжести, вращающий момент и т.п., т.е. силы-причины.

Пассивные силы: силы реакции, силы трения и т.п. – они следствия действия активных.

Те силы, которые подчеркнуты скобой, до начала и во время вращения

уравновешивают друг друга, поэтому

$$\vec{R}^a + \vec{R}^{cm} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O^a + \vec{M}_O^{cm} = \vec{0}$$

Вращение *равномерное*: $\omega = const \Rightarrow \frac{d'\vec{K}_O}{dt} = \hat{J}_O \vec{\varepsilon} = \vec{0}$. Поэтому:

$$\boxed{\begin{cases} m\vec{W}_C = \vec{R}^{\delta} \\ [\vec{\omega}, \vec{K}_O] = \vec{M}_O^{\delta} \end{cases}}$$

Чтобы система сил была эквивалентна нулю, нужно, чтобы центр масс C был на оси вращения ($\vec{W}_C = \vec{0}$) и ось вращения была главной центральной осью ($\vec{\omega} \parallel \vec{K}_O$). Такую ось, где отсутствуют динамические реакции, называют *осью свободного вращения*.

Пример. М.1.105.

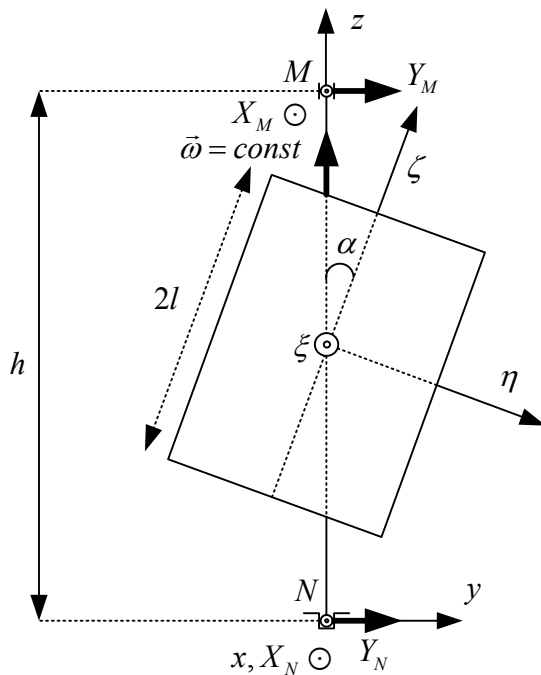


Рисунок 7

Цилиндр вращается. Найти боковые давления на подпятник и подшипник?

Ось неподвижна:

$$X_M + X_N = 0 \Rightarrow X_M = -X_N$$

$$Y_M + Y_N = 0 \Rightarrow Y_M = -Y_N$$

Т.е. динамические реакции приводятся к паре.

Проекции угловой скорости на главные центральные оси $\xi\eta\zeta$:

$$p = 0$$

$$q = -\omega \sin \alpha$$

$$r = \omega \cos \alpha$$

Главные центральные моменты инерции цилиндра:

$$A = B = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$$

$$C = \frac{mR^2}{2}$$

Динамические уравнения Эйлера:

$$(C - B)qr = -m \left(\frac{R^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = Y_M h(-1) \Rightarrow$$

$$Y_M = \frac{m}{h} \left(\frac{R^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(A - C)pr = 0 = X_M h_1 \Rightarrow X_M = -X_N = 0$$

Если $R = \frac{2l}{\sqrt{3}}$, то $A = B = C \Rightarrow$ центральный эллипсоид инерции – сфера.

Если $\sin \alpha = 0, \alpha = 0 \Rightarrow$ вращение происходит вокруг главной центральной оси.

Если $\cos \alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ вращение происходит вокруг главной центральной оси.

При этих условиях не возникают динамические моменты сил.

Возможности построения решений системы уравнений Эйлера

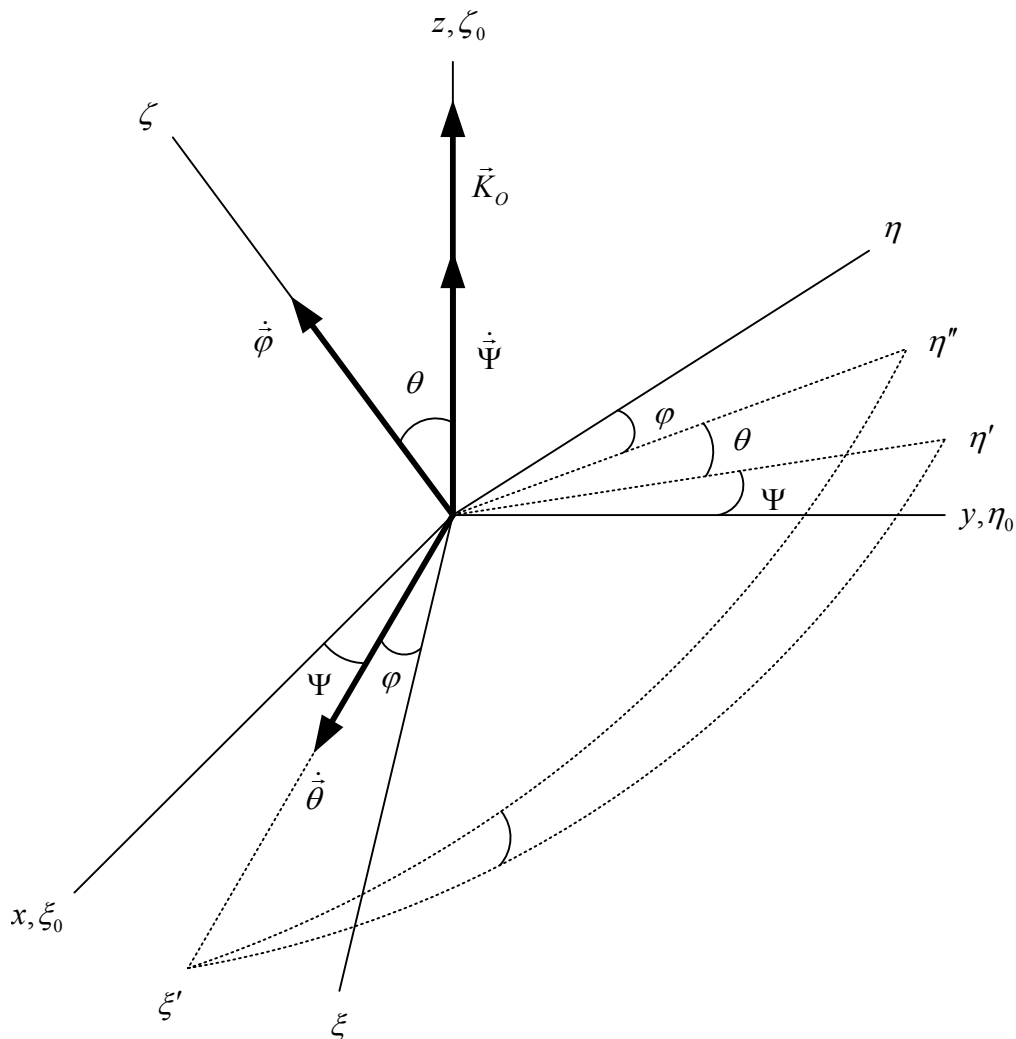


Рисунок 8

Запишем систему уравнений Эйлера.

Для этого понадобятся углы Эйлера (см. рис. 8):

Ψ - угол прецессии, θ - угол нутации, φ - угол собственного вращения.

$$\vec{\omega} = \dot{\Psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi}.$$

Ось z выбрана так, что $z \parallel \vec{K}_O$.

Система уравнений Эйлера:

$$\left. \begin{cases} p = \dot{\Psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\Psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\Psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \right\} \text{— кинематические уравнения Эйлера}$$

$$\left. \begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_{\xi} \\ B\dot{q} + (A - C)pr = M_{\eta} \\ C\dot{r} + (B - A)rp = M_{\zeta} \end{cases} \right\} \text{— динамические уравнения Эйлера}$$

Эта система полностью описывает движение твердого тела с неподвижной точкой. Она может быть решена в квадратурах¹ для любого твердого тела при любых начальных условиях только в трех случаях:

1. Случай Эйлера;
2. Случай Лагранжа;
3. Случай Ковалевской.

Случай Эйлера ($\vec{M}_O = \vec{0}$, т.е. $\vec{K}_O = const$)

Решение может быть доведено до эллиптических функций², т.е. до квадратур, для любого тела.

В случае Эйлера, когда тело обладает динамической симметрией ($A = B$), тело будет совершать регулярную прецессию.

Регулярная прецессия – такое движение, при котором тело вращается относительно оси динамической симметрии (собственное вращение), которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси (прецессионное вращение). Угол между осью собственного вращения и осью прецессии (угол

¹ КВАДРАТУРА – операция нахождения, вычисления интеграла.

² ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ – функции, связанные с интегралами, содержащими квадратные корни из многочленов 3-й или 4-й степеней (появляются, напр., при вычислении длины дуги эллипса).

нутации) сохраняется постоянным, также как и угловые скорости прецессии и собственного вращения.

Параметры регулярной прецессии:

$$\dot{\Psi} = \frac{K_o}{A}, \dot{\phi} = \frac{A-C}{A} r, \operatorname{tg} \theta = \frac{A\sqrt{p^2 + q^2}}{Cr}$$

Бывают прямая и обратная прецессия.

Прямая прецессия будет, если $A > C$.

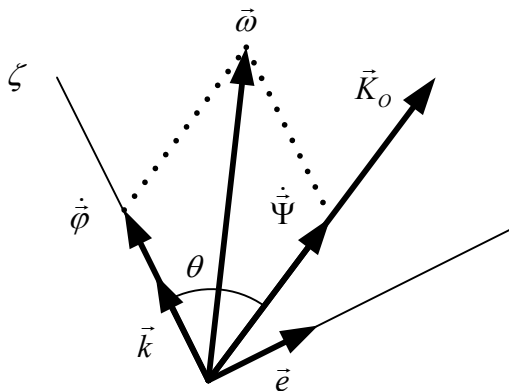


Рисунок 9

$$\vec{\omega} = \sqrt{p^2 + q^2} \vec{e} + r \vec{k} = \dot{\psi} + \dot{\phi}$$

$$\vec{K}_o = A\sqrt{p^2 + q^2} \vec{e} + Cr \vec{k}$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \vec{k}$$

Обратная прецессия будет, если $A < C$.

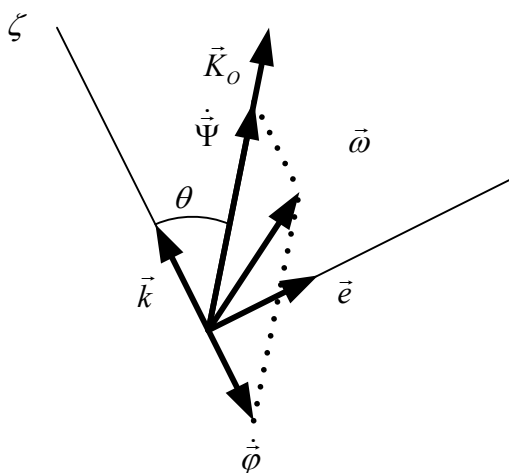


Рисунок 10

Динамическая симметрия тела – необходимое и достаточное условие для регулярной прецессии в случае Эйлера.

Пример.

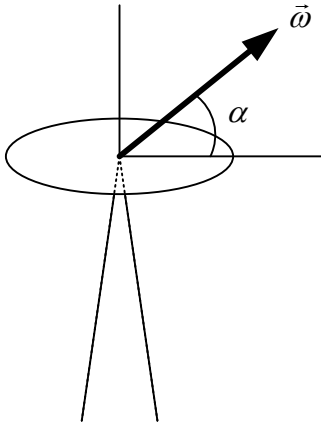


Рисунок 11

Диск получил в некоторый момент $\vec{\omega}$ под углом α . Описать дальнейшее движение.

$\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow$ случай Эйлера.

Тело динамически симметрично: $\frac{C}{2} = A = B = \frac{mR^2}{4} \Rightarrow$ будет регулярная

прецессия.

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \omega \cos \alpha$$

$$r = \omega \sin \alpha$$

$$K = \sqrt{A^2 \omega^2 \cos^2 \alpha + 4A^2 \omega^2 \sin^2 \alpha} = A\omega \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{K}{A} = \omega \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}$$

$$\dot{\phi} = \frac{A - C}{A} r = -\omega \sin \alpha$$

Обратная прецессия, т.к. $C > A$.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A \sqrt{p^2 + q^2}}{Cr} = \frac{1}{2} \frac{\omega \cos \alpha}{\omega \sin \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha$$

Интерпретация Пуансо.

В случае Эйлера, когда динамической симметрии нет, возможна геометрическая интерпретация движения – интерпретация Пуансо. Будем для определенности считать, что $A < B < C$.

Представим тело эллипсоидом инерции в неподвижной точке O (см. рис. 12).

Уравнение эллипсоида в главных осях:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 1 = 0$$

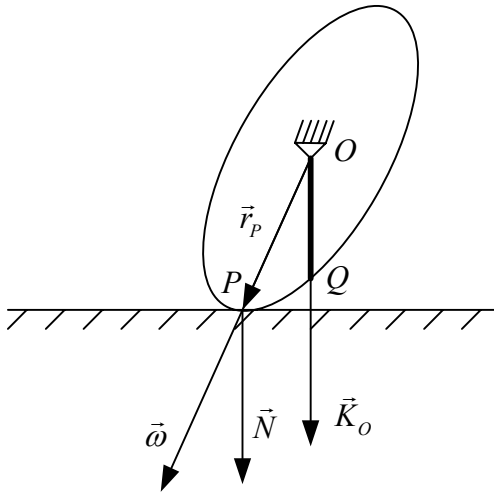


Рисунок 12

Пусть P - точка пересечения эллипсоида инерции с $\vec{\omega}$, а радиус-вектор к ней \vec{r}_p .

Заметим, что

$$\vec{v}_p = [\vec{\omega}, \vec{r}_p] = 0 \text{ и } \vec{r}_p = \lambda \vec{\omega},$$

Т.е. $\alpha = \lambda p, \beta = \lambda q, \gamma = \lambda r$, подставим:

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 1 = \lambda^2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - 1 = 2\lambda^2 T - 1 = 0, \text{ где}$$

$$\text{учтено: } Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T.$$

В итоге:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2T} = \text{const}$$

Нормаль \vec{N} к эллипсоиду в точке P :

$$\vec{N} = \text{grad} f(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}, \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right) = 2\lambda (Ap, Bq, Cr) = 2\lambda \vec{K}_O = \text{const}$$

Т.е. направление нормали в точке P пересечения угловой скоростью эллипсоида неизменно, а плоскость, касательная к эллипсоиду в точке P , перемещается параллельно сама себе. Чтобы показать, что эта плоскость неподвижна, вычислим OQ от неподвижной точки O до плоскости:

$$OQ = \left(\vec{r}_p, \frac{\vec{K}_O}{K_O} \right) = \frac{\lambda}{K_O} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{2\lambda T}{K_O} = \text{const}$$

Геометрическая интерпретация Пуансо звучит и изображается так (см. рис.). В начале движения образуется плоскость, касательная к эллипсоиду инерции в точке пересечения эллипсоида начальной угловой скоростью. В дальнейшем плоскость занимает неизменное положение, а эллипсоид инерции с неподвижным центром O катается по ней без проскальзывания. О других деталях качения сказать понятно не можем.

СЕМИНАР №12

ТЕОРИЯ ГИРОСКОПИИ. СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА

Обратная задача динамики – по движению определить силу, вынуждающее воздействие, вызывающее это движение.

$$\begin{cases} A = B \\ \dot{\Psi} = const \\ \dot{\phi} = const \\ \theta = const \end{cases} \Rightarrow \vec{M}_O = C \left[\dot{\Psi}, \dot{\phi} \right] \left(1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\Psi}}{\dot{\phi}} \cos \theta \right)$$

Точная формула гироскопии, определяющая момент сил, вызывающий вынужденную регулярную прецессию.

При дополнительном условии: $\dot{\theta}_0 = 0$ это равенство также и достаточное условие регулярной прецессии. При $\dot{\theta}_0 \neq 0$ регулярной прецессии быть не может.

Задача.

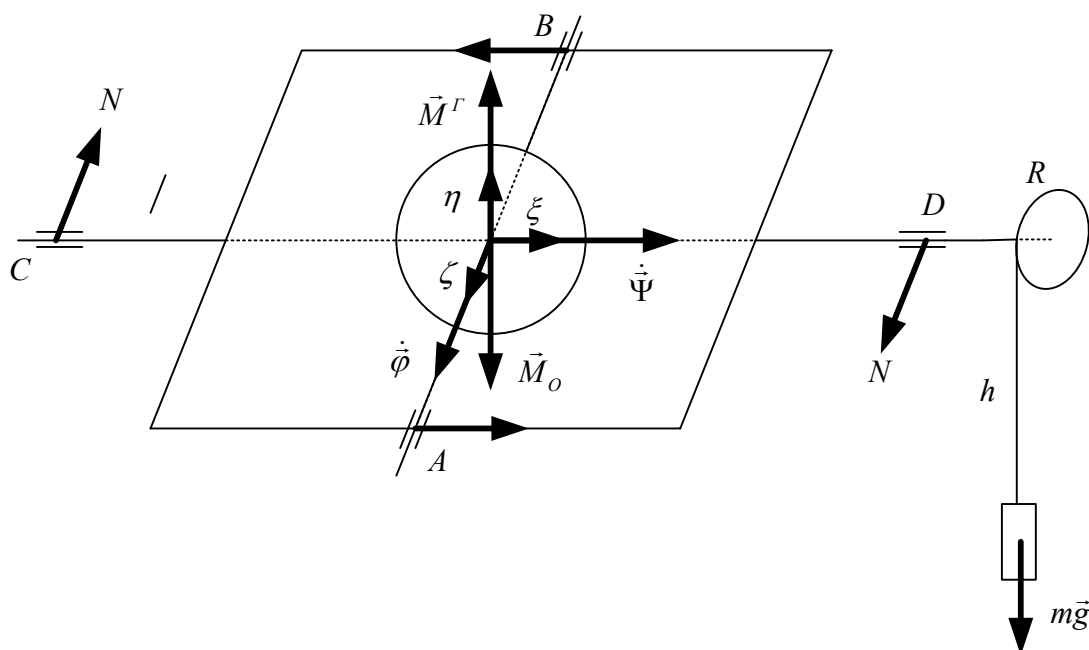


Рисунок 13

$C, A, A_1, m, CD = b$, где A_1 - момент инерции рамки.

Определить давление на подшипники, обусловленное гироскопическим моментом. Угловая скорость собственного вращения $\dot{\phi} = 2\pi n$. Гироскоп совершает прецессию за счет \vec{M}_O , действующего на него со стороны

подшипников основания крепления гироскопа. Сам же гироскоп действует на основание с моментом $\vec{M}^G = -\vec{M}_O$, который называет гироскопическим моментом. На рамку действуют пары сил в подшипниках A и B , и в подшипниках C и D . Причем, так как рамка поворачиваться вокруг вертикальной оси не может, то:

$$\vec{M}_{AB} = \vec{M}^G = -\vec{M}_{CD} = -\vec{M}_O$$

Используя точную формулу гироскопии, получим: $\left\{ \theta = \frac{\pi}{2} \right\}$

$$M_O = 2\pi n C \dot{\Psi} = Nb$$

$$N = \frac{M_O}{b}$$

Закон сохранения энергии:

$$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$$

$$\left(C \frac{\dot{\phi}^2}{2} + A \frac{\dot{\Psi}^2}{2} + A_1 \frac{\dot{\Psi}^2}{2} + \frac{1}{2} m R^2 \frac{\dot{\Psi}^2}{2} + \frac{1}{2} m (R \dot{\Psi})^2 \right) - \left(C \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right) = mgh$$

$$\dot{\Psi} = \sqrt{\frac{2mgh}{A + A_1 + \frac{3}{2}mR^2}}$$

Динамические реакции можно было найти через ДУЭ:

$$p = \dot{\Psi}, q = 0, r = \dot{\phi}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + [\vec{\Omega}, \vec{\omega}] \Rightarrow \dot{q} = -\dot{\Psi} \dot{\phi}$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta$$

$$-A\dot{\Psi}\dot{\phi} + (A - C)\dot{\Psi}\dot{\phi} = -Nb$$

$$C\dot{\Psi}\dot{\phi} = Nb$$

СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА

Это движение динамически симметричного твердого тела с одной неподвижной точкой в поле тяжести, причем центр масс не совпадает с неподвижной точкой.

$$\vec{M}_O \neq \vec{0}.$$

Регулярная прецессия не всегда в случае Лагранжа.

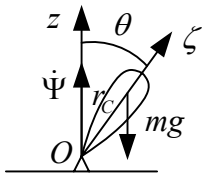


Рисунок 14

Центр масс, оставаясь на сфере радиуса \vec{r}_c , будет двигаться между двумя параллелями, соответствующими θ_{\min} и θ_{\max} - **нутационное движение** твердого тела. Данное движение имеет колебательный характер. Траектория центра масс имеет вид сферической циклоиды. Время движения от одной параллели к другой остается постоянным ($t_{12} = t_{21}$).

Если мы нашли $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$, то θ_{\min} и θ_{\max} находим из условия $\dot{\theta} = 0$, т.е. из уравнения $f(\theta) = 0$.

Центр масс на поверхности сферы радиуса \vec{r}_c .

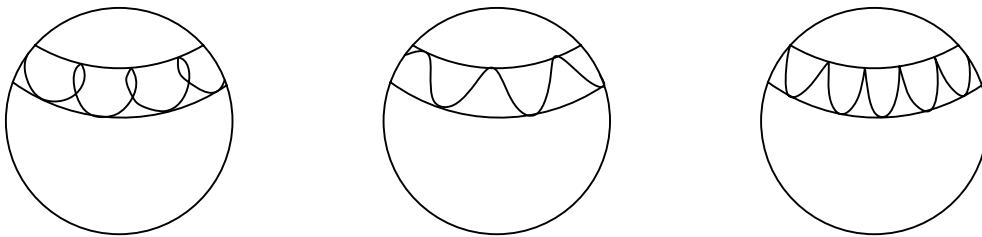


Рисунок 15

Сферическая циклоида в трех случаях (примерный рисунок).

Когда $\theta_{\min} = \theta_{\max}$, будет **вынужденная регулярная прецессия**.

Качественное исследование движения в случае Лагранжа может быть проведено с помощью интегралов³ движения. Т.к. движение реализуется в поле тяжести, то имеет место интеграл энергии:

$$T + \Pi = const$$

Или

$$\boxed{\frac{1}{2} A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2} Cr^2 + Pl \cos \theta = h_0},$$

где l - расстояние от центра тяжести до неподвижной точки.

³ Первый интеграл движения – функция от обобщенных координат и времени, которая при подстановке в нее любого решения системы уравнений движения, сохраняет как функция времени свое значение.

Поскольку $M_z = 0$, то

$$K_z = \vec{K}_O \frac{\dot{\Psi}}{\dot{\Psi}} = const$$

Третий интеграл получается из третьего ДУЭ:

$$C\dot{r} + \underbrace{(B-A)qp}_{=0} = \underbrace{M_\zeta}_{=0} \Rightarrow C\dot{r} = 0 \Rightarrow$$

$$r = const$$

В итоге в случае Лагранжа имеем три первых интеграла движения.

Ось прецессии в случае Лагранжа только вертикаль z .

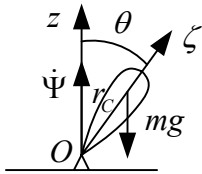
$$[\vec{r}_C, \vec{P}] = C \left[\dot{\Psi}, \dot{\phi} \right] \left(1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\Psi}}{\dot{\phi}} \cos \theta \right)$$

Задача. С.11.80.

Движение – регулярная прецессия.

$$\dot{\Psi} = ?$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{2}; \dot{\phi} \gg \frac{mgl}{C}$$



$$lP \sin \theta = C\dot{\Psi} \dot{\phi} \sin \theta \left(1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\Psi}}{\dot{\phi}} \cos \theta \right)$$

$$(\dot{\Psi})^2 (C-A) \cos \theta + \dot{\Psi} C \dot{\phi} - mgl = 0$$

$$\dot{\Psi} = \frac{-C\dot{\phi} \pm \sqrt{C^2 \dot{\phi}^2 + 4mgl(C-A) \cos \theta}}{2(C-A) \cos \theta}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots, \text{ если } x \ll 1$$

$$\dot{\Psi} = \frac{-C\dot{\phi} \pm C\dot{\phi} \left(1 + \frac{2mgl(C-A)\cos\theta}{C\dot{\phi}} \right)}{2(C-A)\cos\theta} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{mgl}{C\dot{\phi}}, \\ -\frac{C\dot{\phi}}{(C-A)\cos\theta}. \end{array} \right.$$

Первый случай соответствует медленной прецессии и не зависит от угла нутации. Второй случай – быстрая прецессия, имеет зависимость от θ и другое направление вращения.

Задача С.11.44.

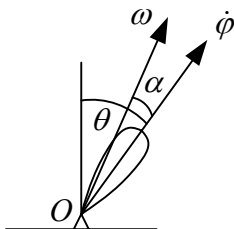


Рисунок 16

θ_0

$$K_o = \sqrt{A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2}$$

$$\sqrt{(p_0^2 + q_0^2)} = \omega \sin \alpha$$

$$r_0 = \omega \cos \alpha = r$$

$r = const$ в случае Лагранжа.

Используем первый интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}Cr^2 = mgl(l \cos \theta_0 - l \cos \theta) + \frac{1}{2}A(p_0^2 + q_0^2) + \frac{1}{2}Cr_0^2$$

$$p^2 + q^2 = \frac{2mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta) + A(p_0^2 + q_0^2)}{A}$$

$$K_o = \sqrt{2Amgl(\cos \theta_0 - \cos \theta) + A(p_0^2 + q_0^2) + Cr_0^2}$$

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Если $\dot{\phi} \gg \dot{\Psi}$, то можно применить элементарную теорию гироскопа.

И точная формула гироскопии имеет приближенную форму, простую:

$$\vec{M}_o = C \left[\dot{\Psi}, \dot{\phi} \right]$$

$$\begin{cases} \vec{K}_o = A\sqrt{p^2 + q^2}\vec{e} + Cr\vec{k} \\ \vec{\omega} = \sqrt{p^2 + q^2}\vec{e} + r\vec{k} \\ \dot{\phi} = \dot{\phi}\vec{k} \end{cases}$$

В силу $\dot{\phi} \gg \dot{\Psi}$, можно считать, что эти векторы сонаправлены по оси симметрии.

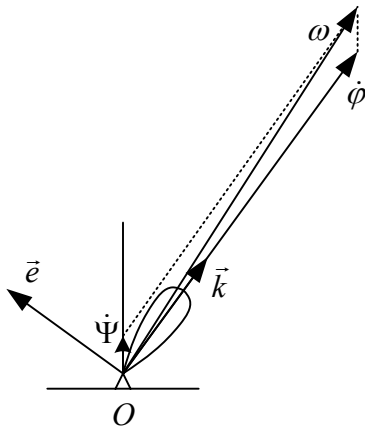


Рисунок 17

По поведению \vec{K}_o можем судить о поведении оси симметрии.

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{M}_o \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{v}_K = \vec{M}_o}$$

Последнюю формулу называют формулой Резаля для элементарного гироскопа. Ее можно интерпретировать следующим образом.

Пусть K - точка оси, совпадающая с концом вектора \vec{K}_o , тогда ее скорость равна \vec{M}_o .

Таким образом, скорость конца вектора кинетического момента, а значит, и скорость точки K оси гироскопа, равна по величине и направлению главному моменту внешних сил относительно неподвижной точки.

Можно отметить следующие гироскопические эффекты:

1. Если на ось гироскопа начнет действовать сила, то ось отклонится не в направлении действия силы, а в направлении момента \vec{M}_o этой силы относительно неподвижной точки.

2. Безынерционность движения оси гироскопа: с прекращением действия силы, \vec{M}_O этой силы мгновенно обращается в нуль. Следовательно, $\vec{v}_K = \vec{0}$, т.е. с прекращением действия силы движение оси гироскопа прекращается мгновенно.

СЕМИНАР №13

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Сперва продолжение темы: случай Лагранжа.

Итак, ранее мы записывали формулу для момента сил, который поддерживает регулярную прецессию с заданными параметрами для тела, обладающего динамической симметрией $A = B \neq C$.

$$\vec{M}_O = C \left[\dot{\Psi}, \dot{\phi} \right] \left(1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\Psi}}{\dot{\phi}} \cos \theta \right).$$

Эту формулу можно применять только если заведомо известно, что движение будет прецессией. Это всего лишь частный случай динамических уравнений Эйлера, и эту формулу нельзя использовать для любого твердого тела.

Пример.

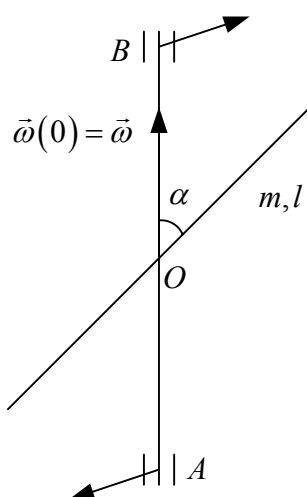


Рисунок 18

Найти силы реакции в точках A и B. В начальный момент задана $\vec{\omega}$. Трения в осях нет.

1) Если мы определим, что движение – регулярная прецессия, определим ее параметры, той найдем \vec{M}_O .

Есть предположение, что T сохраняется, т.к. трения нет.

Момент инерции относительно оси вращения сохраняется, следовательно,

$$\frac{J\omega^2}{2} = const \Rightarrow \omega = const .$$

Является ли равномерное вращение регулярной прецессией?

Да, если считать, что $\dot{\psi} = \omega, \dot{\phi} = 0, \theta = \alpha$.

Но момент сил не равен нулю!

Вдобавок, $\frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}} \rightarrow \infty$.

Дело в том, что при выводе формулы использовался вектор $\vec{e}_\zeta \equiv \frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}}$.

Поэтому,

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= C \left[\dot{\Psi}, \dot{\phi} \right] \left(1 + \frac{C-A}{C} \frac{\dot{\Psi}}{\dot{\phi}} \cos \theta \right) = -\dot{\Psi} \left[\dot{\Psi}, \frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}} \right] A \cos \theta = -\dot{\Psi} \left[\dot{\Psi}, \vec{e}_\zeta \right] A \cos \theta = \\ &= -A \dot{\Psi}^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_3, \end{aligned}$$

$$M_O = A \dot{\Psi}^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$N_A = N_B = \frac{M_O}{AB}$$

2) Вторая постановка задачи.

Добавим угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$. Неравномерное вращение не является регулярной прецессией. Поэтому динамические реакции ищем через динамические уравнения Эйлера.

$\omega \rightarrow p, q, r$ и т.д.

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Что есть механическая связь?

Механическая связь – это ограничения, накладываемые на движение механической системы вследствие распределения в пространстве материи (тел и поверхностей).

Математическая запись механической связи для N точек выглядит так:

$$f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0 \quad (*)$$

Связи (*) называются *удерживающими* (двусторонними), если условия (*) имеют вид равенств ($= 0$) в отличие от *неудерживающих* (односторонних, освобождающих) (≥ 0).

Если уравнение связи (*) не содержит времени t , связь называется *стационарной* (склерономной), в противном случае *нестационарной* (реономной).

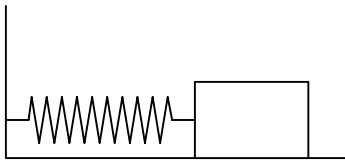
Связи называются *конечными* (голономными, геометрическими), если в уравнения (*) не входят производные $\dot{\vec{r}}_k$, и *дифференциальными* (кинематическими), если входят.

Существует промежуточный тип связей – *дифференциальные интегрируемые* (полуголономные), - уравнения которых есть результат взятия полной производной по времени t от конечной связи. Типичный пример – качение без проскальзывания: $\dot{x} - \dot{\varphi}R = 0 \Rightarrow x - \varphi R + C = 0$.

Обычно в задачах имеем дело с голономными связями.

Пример.

Имеет ли связь груз на пружине?



$$m\ddot{x} = -kx$$

\ddot{x} не может входить в уравнение связи, следовательно, не связь, а уравнение движения.

Независимые переменные обозначим

$$q_1, \dots, q_n \begin{cases} \vec{r}_j = \vec{r}_j(q, t) \\ \forall j \end{cases}$$

однозначно определяющие движение.

Числом степеней свободы голономной системы называют число независимых координат, определяющих каждую точку системы однозначно.

Точка в \mathbb{R}^3 - 3 степени свободы.

Твердое тело – 6.

Стержень – 5.

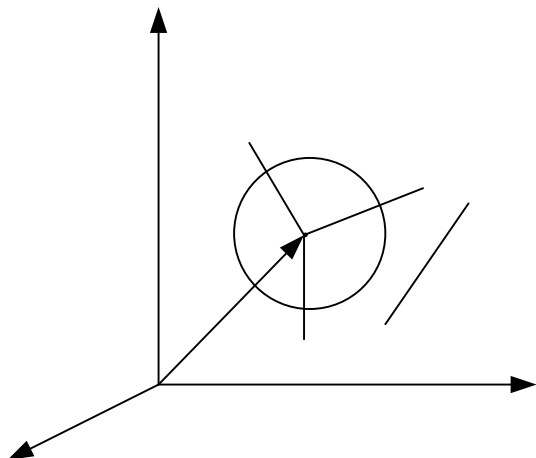


Рисунок 19

Пример.

На плоскости система из двух стержней, соединенных шарниром.

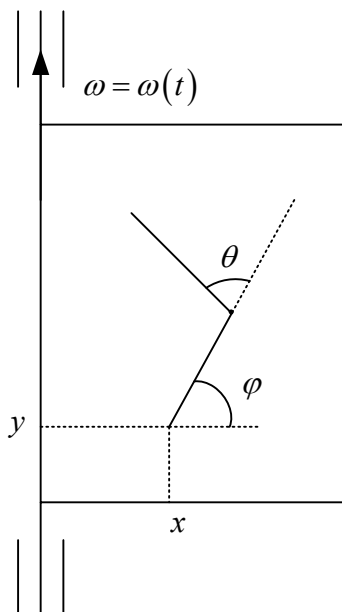


Рисунок 20

Один стержень – 3 степени свободы (x, y, φ) .

Два стержня – 4 степени.

Связи могут зависеть от времени: $\omega = \omega(t)$ - связь. Частный случай связи: $\omega = const$. Нет смысла вводить угол поворота плоскости в обобщенные координаты, поскольку в любой момент времени этот угол известен. Но если бы не было известно $\omega = \omega(t)$, то нужна была бы еще одна степень свободы, и для системы из двух стержней было бы уже пять 5 степеней свободы.

Теперь запишем сами **уравнения Лагранжа**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = \sum_j \left(\vec{F}_j, \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \\ i = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

$T(t, q, \dot{q})$ - кинетическая энергия.

Вводятся **переменные Лагранжа** – совокупность переменных: время t , *обобщенные координаты q_i , обобщенные скорости \dot{q}_i* .

При этом подразумевается, что происходит дифференцирование по независимым переменным Лагранжа (частные производные по ним).

В правой части так называемые **обобщенные силы**. Их можно записать так:

$$Q_i = \sum_j \left(\vec{F}_j, \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = \sum_j \left(\vec{F}_j, \frac{d\vec{r}_j(dq_i)}{dq_i} \right) = \frac{\delta A^{virt}(dq_i)}{dq_i}$$

$\delta A^{virt}(dq_i)$ - работа на виртуальном перемещении.

Чтобы найти виртуальную работу, нужно задать приращение dq_i и посмотреть приращение системы при $t = const$, при замороженном времени или, как говорят, при замороженной связи. Виртуальное перемещение, это мысленное перемещение, которое допускают замороженные связи.

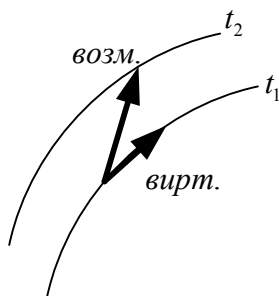


Рисунок 21

Возможные перемещения: $d\vec{r}_j = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dq_i$.

Виртуальные перемещения: $\delta\vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dq_i$.

Решим задачу на использование уравнений Лагранжа. Это один из видов записи уравнений движения. Точнее, уравнения Лагранжа – это метод составления уравнений. Есть даже выражение – формализм Лагранжа. Есть рецепт, следуя ему, получите результат, т.е. уравнения.

В случае $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ уравнения Лагранжа дадут уравнения Ньютона.

Пример.

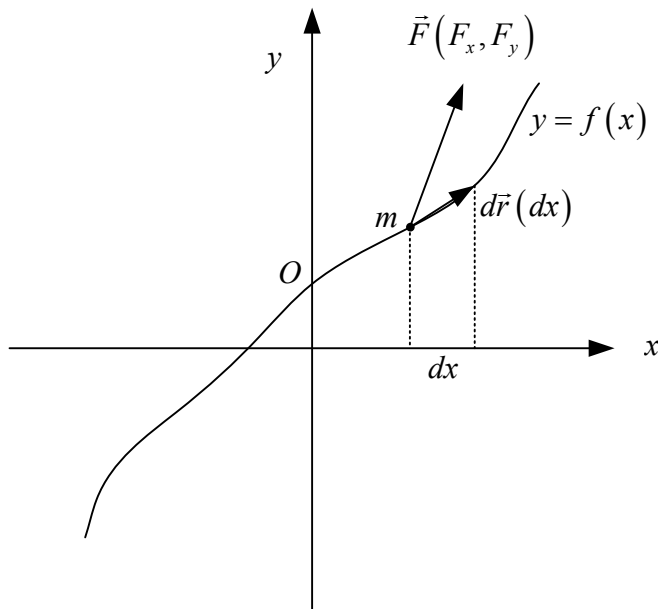


Рисунок 22

$y = f(x)$ - эта линия определяет связь. y можно выразить через x .

Трения нет, но известна сила $\vec{F}(F_x, F_y)$.

Порядок действий лагранжева формализма таков:

1. Определяем число степеней свободы.
2. Выбираем обобщенные координаты.
3. Записываем уравнения Лагранжа.

В нашем примере 1 степень свободы. За обобщенную координату можно, например, взять длину дуги траектории, но гораздо удобнее (и целесообразнее, поскольку есть связь $y = f(x)$) взять x .

Посчитаем обобщенную силу:

$$Q_x = \frac{(\vec{F}, d\vec{r}(dx))}{dx} = \frac{F_x dx + F_y dy}{dx} = \frac{F_x dx + F_y f'_x dx}{dx} = F_x + F_y f'_x$$

В общем случае нельзя трактовать обобщенную силу как проекцию на какое-то направление, и записанная выше $Q_x = F_x + F_y f'_x$ тому пример.

Запишем кинетическую энергию:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + (f'_x \dot{x})^2) = \frac{m}{2}(1 + (f'_x)^2)\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(1 + (f'_x)^2)\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} (m(1 + (f'_x)^2)\dot{x}) = m(1 + (f'_x)^2)\ddot{x} + 2mf'_x f''_{xx} \dot{x}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = mf'_x f''_{xx} \dot{x}^2$$

В итоге $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$ дает:

$$m(1 + (f'_x)^2)\ddot{x} + mf'_x f''_{xx} \dot{x}^2 = F_x + F_y f'_x$$

Можно подставить любую линию ($f(x) = kx$, например) и получить уравнение движения.

Во многих задачах силы являются потенциальными.

$$\vec{F}_j = -\frac{\partial \Pi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)}{\partial \vec{r}_j} \quad (\text{градиент по } \vec{r}_j).$$

Тогда

$$Q_i = \sum_j \left(\vec{F}_j, \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = -\sum_j \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_j}, \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial \Pi(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial q_i}$$

Перенеся $\frac{\partial \Pi(q_1, \dots, q_N, t)}{\partial q_i}$ из правой части лагранжевой системы в левую,

можно ввести функцию Лагранжа

$$L = T - \Pi$$

и записать уравнения Лагранжа через нее:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*$$

Справа тогда уже не нужно учитывать потенциальные силы в Q_i^* .

Если все силы потенциальные, то удобно записать:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

В задачнике бывает ответ в виде Лагранжиана. В решении же желательно записывать и сами уравнения. Решать эти уравнения не обязательно (порой и просто невозможно). Но выписать необходимо.

Задача.

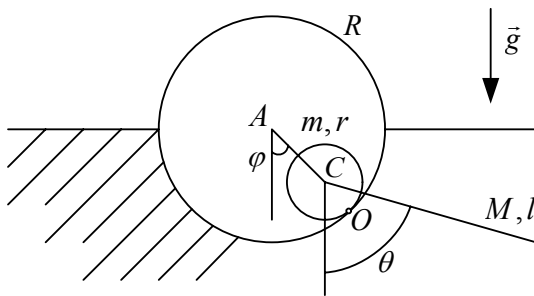
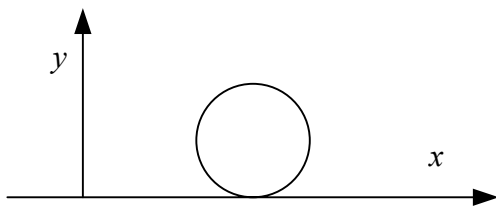


Рисунок 23

Катится диск без подпрыгивания, без проскальзывания. К центру подвешен маятник.

Эту ситуацию можно сравнить с качением диска без проскальзывания по горизонтальной плоскости.



Движение диска можно описать координатам центра масс x_C, y_C и углом поворота диска φ . Однако $y_C = R$, $\dot{x}_C = R\dot{\varphi}$ - голономная связь, т.е.

$x_C = R(\varphi - \varphi_0) + x_C^0$. Т.е. у диска только 1 степень свободы.

В задаче положение системы «диск-стержень» определяется 2 координатами (углами φ, θ).

$$L = T - \Pi.$$

$$T_\delta = \frac{1}{2} J_O \omega_\delta^2 = \frac{3}{4} m r^2 \frac{(R-r) \dot{\varphi}^2}{r^2}$$

Точка B - центр стержня. Тогда по теореме Кенига:

$$T_{cm} = \frac{M v_B^2}{2} + \frac{1}{2} J_B^{cm} \omega_{cm}^2$$

$$J_B^{cm} = \frac{M l^2}{12}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \overline{CB}]$$

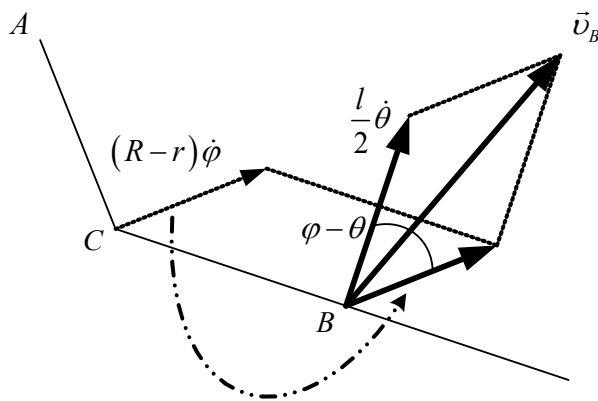


Рисунок 24

$$v_B^2 = (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 + 2(R-r) \dot{\varphi} \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta)$$

Π написать легко, если выбрать какой-то уровень за нулевой.

$$\Pi_\delta = -mg(R-r)\cos\varphi$$

$$\Pi_{cm} = -Mg \left((R-r)\cos\varphi + \frac{l}{2}\cos\theta \right)$$

$$T = T_\delta + T_{cm}$$

$$\Pi = \Pi_\delta + \Pi_{cm}$$

$$L = T - \Pi$$

Далее подставляем в уравнения Лагранжа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

СЕМИНАР №14

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА В СЛУЧАЕ НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Поведение какого класса систем полностью описывается уравнениями Лагранжа?

Голономные системы с идеальными связями.

Голономные системы – это механические системы, на которые наложены голономные связи (в том числе и полуголономные).

Идеальные связи – механические связи, виртуальная работа реакций которых равна нулю. Эквивалентное условие – обобщенная сила, соответствующая реакции связи, равна нулю: $Q_i = 0$.

Эквивалентность является следствием независимости обобщенных координат:

$$\delta A = \sum_{j=1}^k (\vec{R}_j, \delta \vec{r}_j) = \sum_{i=1}^n \tilde{Q}_i \delta q_i = 0$$

Если связи неидеальны, то в уравнения Лагранжа входят обобщенные силы их реакций. В этом случае одними уравнениями не обойтись, поскольку включение в систему одной неизвестной делает систему неразрешимой.

Когда движение с проскальзыванием, сила трения будет совершать работу, $F_{mp} = fN$, N можно определить из теоремы об изменении импульса на направление нормали.

Примеры, когда уравнения Лагранжа применимы:

1. Абсолютно гладкие поверхности.

2. Невесомые нерастяжимые стержни.
3. Невесомые шарниры без трения.
4. Абсолютно шероховатые поверхности.

Общий порядок уравнений Лагранжа второй. С учетом n степеней свободы получаем $2n$. Итак уравнения Лагранжа – обыкновенные дифференциальные уравнения порядка $2n$, а не в частных производных.

Уравнения Лагранжа в случае неинерциальных систем

За обобщенные координаты берутся координаты в неинерциальной СО.

Следует добавить силы инерции, как переносные, так и кориолисовы.

$\delta A_{кор} \neq 0$, т.к. виртуальные перемещения не совпадают с действительными.

Можно взять за q обобщенные координаты в инерциальной СО, при этом не будет сил инерции и кинетическую энергию следует считать в абсолютной СО.

Пример.

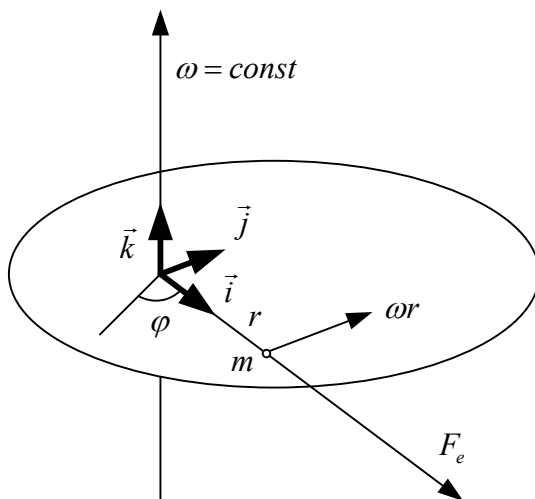


Рисунок 25

Записать уравнения Лагранжа для движения точки по вращающейся плоскости.

$$n = 2$$

$$q = \{r, \varphi\}$$

В неинерциальной СО:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$$

Силы инерции:

$$F_e = m \omega^2 r$$

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] = 2m \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = 2m(\vec{i} \omega r \dot{\varphi} - \vec{j} \omega \dot{r})$$

$$\delta A_r = (m\omega^2 r + 2m\omega r \dot{\varphi}) dr = Q_r dr$$

$$\delta A_\varphi = -2m\omega r \dot{r} d\varphi = Q_\varphi d\varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

Подставив, получаем:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 = m\omega^2 r + 2m\omega r \dot{\varphi} \\ m r^2 \ddot{\varphi} + 2m r \dot{r} \dot{\varphi} = -2m\omega \dot{r} \end{cases}$$

Если же записывать в абсолютной СО:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (\omega r + r\dot{\varphi})^2)$$

$$Q_r = Q_\varphi = 0$$

Подставив, получаем:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - m r (\omega + \dot{\varphi})^2 = 0 \\ m r^2 \ddot{\varphi} - 2m\omega \dot{r} + 2m r \dot{r} \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Получили тот же результат.

Пример.

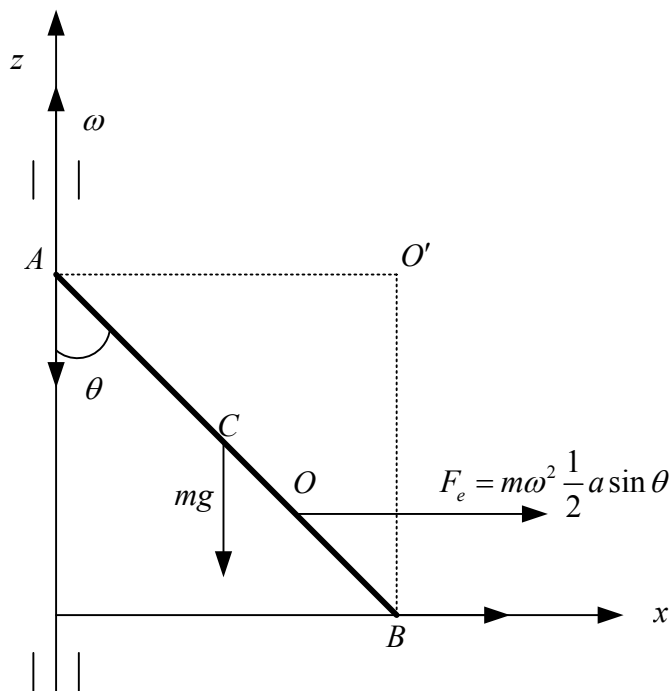


Рисунок 26

$$AB = a$$

Точки A и B скользят без трения. Составить уравнение движения стержня.

Перейдем в неинерциальную CO .

Относительно точки O' движение записывается как чистое вращение:

$$T = \frac{ma^2}{6} \dot{\theta}^2$$

Запишем виртуальную работу

$$\delta A = -mg dz_c + m\omega^2 \frac{1}{2} a \sin \theta dx_o = Q_\theta d\theta$$

$$z_c = \frac{a}{2} \cos \theta \Rightarrow dz_c = -\frac{a}{2} \sin \theta d\theta$$

$$x_o = \frac{2}{3} a \sin \theta \Rightarrow dx_o = \frac{2}{3} a \cos \theta d\theta$$

Следовательно,

$$Q_\theta = \frac{mga}{2} \sin \theta + m\omega^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{3} a$$

Если же решать задачу в абсолютной CO без теоремы Кенига не обойтись:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{A}{2} p^2 + \frac{B}{2} q^2 + \frac{C}{2} r^2$$

И т.д. Это пример, когда целесообразно решать в неинерциальной CO .