ГЛАВА 10

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Определение. Пусть на множестве X заданы функции $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$. Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *поточечно сходится* к функции $f(x)$ на множестве X и писать $f_n(x) \underset{X}{\longrightarrow} f(x)$ при $n \to \infty$, если $\forall x \in X \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, т. е.

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon. \quad (1)$$

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится* к функции $f(x)$ на множестве X и писать $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon. \quad (2)$$

Отличие условий (1) и (2) состоит в том, что в условии (1) число N свое для каждого x, а в условии (2) число N не зависит от x. Поэтому из равномерной сходимости следует поточечная сходимость.

Заметим, что если $f_n(x) \underset{X}{\longrightarrow} f(x)$ при $n \to \infty$ и $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{f_n(x)\}$

не может сходиться равномерно и ни к какой другой функции $g(x)$, так как из условия $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} g(x)$ при $n \to \infty$ следовало бы, что $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. В этом случае говрят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ *неравномерно* на множестве X.

Теорема 1. (Критерий равномерной сходимости.)

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Доказательство. Поскольку условие $\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ эквивалентно условию $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, то условие (2) эквивалентно условию

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$

■

Следствие 1. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда существует числовая последовательность $\{a_n\}$:

$$\forall x \in X \; \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - f(x)| \le a_n \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

Доказательство. 1) Пусть выполнено условие (3). Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le a_n$. Отсюда и из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ по теореме о трех последовательностях получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$, что в силу критерия равномерной сходимости означает $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

2) Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. Определив $a_n = \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$, из критерия равномерной сходимости получим условие (3).

■

Следствие 2. $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\exists\{x_n\}\subset X: \quad f_n(x_n)-f(x_n)\not\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{4}$$

Доказательство. 1) Пусть выполняется условие (4). Тогда $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(x_n)-f(x_n)|\not\to 0$ при $n\to\infty$, следовательно, $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\not\to 0$ и по критерию равномерной сходимости $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

2) Пусть $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$. По определению супремума $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in X: \quad |f_n(x_n)-f(x_n)| \geq \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|-\frac{1}{n}$. Отсюда следует, что $|f_n(x_n)-f(x_n)|\not\to 0$ при $n\to\infty$, так как в противном случае по теореме о трех последовательностях из неравенств $0\leq \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \leq |f_n(x_n)-f(x_n)|+\frac{1}{n}$ следовало бы, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$, что в силу критерия равномерной сходимости противоречит условию $f_n(x) \underset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$ при $n\to\infty$.

■

Следствие 1 удобно для доказательства равномерной сходимости, а следствие 2 – для доказательства отсутствия равномерной сходимости конкретных функциональных последовательностей.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно ограниченной* на множестве X, если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \quad |f_n(x)| \le C.$$

Лемма 1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве X и $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, то $f_n(x)\, g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена, то

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sup_{x \in X} |f_n(x)| \le C.$$

Поскольку $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, то $\sup\limits_{x \in X} |g_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\sup_{x \in X} |f_n(x)\, g_n(x)| \le C \sup_{x \in X} |g_n(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. $f_n(x)\, g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

■

Замечание. В условии леммы 1 равномерную ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ нельзя заменить на ограниченность этой последовательности при любом фиксированном x.

Пусть, например, $X = (0,1)$, $f_n(x) = f(x) = \frac{1}{x}$, $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Поскольку $|g_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то в силу следствия 1 $g_n(x) \underset{(0,1)}{\rightrightarrows} 0$. Однако $f(x)\,g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx} \underset{(0,1)}{\not\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, что следует из следствия 2, поскольку для последовательности точек $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\} \subset \subset (0,1)$ имеет место соотношение $f(x_n)\,g_n(x_n) = \sin 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что $\forall x \in (0,1)$ $\left|\frac{\sin(nx)}{nx}\right| \le \frac{1}{nx} \to 0$ при $n \to \to \infty$, поэтому последовательность $\{f(x)\,g_n(x)\} = \{\frac{\sin(nx)}{nx}\}$ сходится к 0 на интервале $(0,1)$, но неравномерно.

Замечание. Из условий $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g_n(x)}{f_n(x)} = 1$ $\forall x \in X$ не следует, что $g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$.

Пусть, например, $X = (0,1)$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $g_n(x) = \frac{1}{n} + + \frac{1}{n^2 x}$. Тогда $\forall x \in (0,1)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g_n(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right) = 1$, $f_n(x) \underset{(0,1)}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, но $g_n(x) \underset{(0,1)}{\not\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, так как $g_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. (Критерий Коши.) Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши равномерной сходимости последовательности

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \\ |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le \varepsilon. \end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство. 1) Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \forall x \in X$

$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку $\forall p \in \mathbb{N} \quad n+p > n > N$, то $\forall x \in X \quad |f_{n+p}(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\forall x \in X$ $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$, т. е. выполняется условие (5).

2) Пусть выполняется условие (5). Следовательно,

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N}$$

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le \varepsilon,$$

т. е. для любого фиксированного $x \in X$ выполняется условие Коши сходимости числовой последовательности $\{f_n(x)\}$. В силу критерия Коши для числовых последовательностей $\forall x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится. Обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Перепишем условие (5) в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; \forall x \in X \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le \varepsilon$$

и рассмотрим отдельно условие $\forall p \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - - f_{n+p}(x)| \le \varepsilon$. Поскольку $\lim\limits_{p\to\infty} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| = |f_n(x) - - f(x)|$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Итак, из условия (5) следует, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, т. е. $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$.

■

§ 2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение. Пусть на множестве X задана функциональная последовательность $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X к сумме $S(x)$ этого ряда. Аналогично определяется *поточечная сходимость* ряда.

Поскольку из равномерной сходимости последовательности следует поточечная сходимость последовательности, то из равномерной сходимости ряда следует поточечная сходимость этого ряда.

Определение. *Остатком* поточечно сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Непосредственно из определения равномерной сходимости ряда и критерия равномерной сходимости функциональной последовательности следует

Теорема 1. (Критерий равномерной сходимости ряда.) Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$\text{т. е.} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |r_n(x)| = 0.$$

Теорема 2. (Критерий Коши.) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши равномерной сходимости ряда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство состоит в применении критерия Коши равномерной сходимости последовательности к последовательности частичных сумм ряда.

■

Следствие. (Необходимое условие равномерной сходимости ряда.) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X, то $u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. В силу критерия Коши из равномерной сходимости ряда следует условие Коши равномерной сходимости ряда (1). Полагая в условии (1) $p = 1$, получим

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \forall x \in X \quad |u_{n+1}(x)| \le \varepsilon,$$

т. е. $u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

■

Замечание. Из необходимого условия равномерной сходимости ряда и следствия 2 § 1 вытекает, что если $\exists\{x_k\} \subset X : u_k(x_k) \not\to 0$ при $k \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ не является равномерно сходящимся на множестве X.

Замечание. Существование последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ такой, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_k)$ расходится, <u>не доказывает</u> отсутствие равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X.

Действительно, пусть, например,

$$u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Остаток ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеет вид

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x \in \left[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}\right), k \geq n+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку $|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, то $r_n(x) \underset{(0,1)}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на интервале $(0,1)$. Тем не менее числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\left(\frac{1}{2^k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

Теорема 3. (Признак сравнения.) Пусть $\forall k \in I\!N$ $\forall x \in X$ $|u_k(x)| \leq v_k(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сходится равномерно на множестве X. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. В силу признака сравнения для числовых рядов ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ сходится поточечно, а значит, поточечно сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Обозначим остатки рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ через $r_n(x)$ и $R_n(x)$ соответственно: $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k(x)$. Из неравенств $|u_k(x)| \leq v_k(x)$ следует, что

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n+1\ \forall x \in X$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x),$$

следовательно,

$$|r_n(x)| = \left|\lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \leq$$

$$\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x) = R_n(x) = |R_n(x)|.$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сходится равномерно, то $\sup\limits_{x\in X}|R_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, следовательно, $\sup\limits_{x\in X}|r_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

■

Следствие 1. (Признак Вейерштрасса.) Если $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \quad |u_k(x)| \leq a_k$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Следствие 2. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ сходится равномерно на множестве X, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Теорема 4. (Признак Дирихле.) Пусть на множестве X заданы две функциональные последовательности $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условиям:

1) последовательность частичных сумм $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно ограничена, т. е. существует число C, не зависящее от x и от n:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \qquad |A_n(x)| \leq C;$$

2) $b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$;

3) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \qquad 0 \leq b_{k+1}(x) \leq b_k(x)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Обозначим $\beta_k(x) = b_{k+1}(x) - b_k(x)$. Выполним преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(x) = \sum_{k=1}^{n}(A_k(x) - A_{k-1}(x))b_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\, b_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\, b_{k+1}(x) \overset{A_0(x)=0}{=}$$

$$= A_n(x)\, b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)) =$$

$$= A_n(x)\, b_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\, \beta_k(x).$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(x) = A_n(x)\, b_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\, \beta_k(x). \tag{2}$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (b_{k+1}(x) - b_k(x)) = b_{n+1}(x) - b_1(x) \underset{X}{\rightrightarrows} -b_1(x)$ при $n \to \infty$, т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k(x)$ равномерно сходится, следовательно, равномерно сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C\,(-\beta_k(x))$. Поскольку $|A_k(x)| \le C$, $\beta_k(x) \le 0$, то $|A_k(x)\,\beta_k(x)| \le C\,(-\beta_k(x))$, и в силу теоремы 3 получаем равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x)\,\beta_k(x)$, т. е. существует функция $S(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\,\beta_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

В силу леммы 1 § 1 из равномерной сходимости последовательности $\{b_n(x)\}$ к 0 и равномерной ограниченности последовательности $\{A_n(x)\}$ следует, что $A_n(x)\,b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из условий (2), (3) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} -S(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X.

■

Теорема 5. (Признак Лейбница.) Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $\quad 0 \le b_{k+1}(x) \le b_k(x)$ и $b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$. Тогда ряд Лейбница $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k(x)$ равномерно сходится.

Доказательство. Обозначим $a_k(x) = (-1)^k$. Тогда $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\right| \le 1$. В силу признака Дирихле ряд Лейбница сходится.

■

Исследование ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на равномерную сходимость на множестве X можно проводить по следующему плану:

1) Если существует такое $x_0 \in X$, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ расходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ не является поточечно (а значит, и равномерно) сходящимся на X.

2) Если существует последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ такая, что $u_k(x_k) \not\to 0$ при $k \to \infty$, то не выполняется необходимое условие равномерной сходимости ряда, и, следовательно, ряд не сходится равномерно.

3) Если выполняются условия признака Вейерштрасса, то ряд сходится равномерно.

4) Если выполняются условия признака Лейбница, то ряд сходится равномерно.

5) Если выполняются условия признака Дирихле, то ряд сходится равномерно.

6) Если выполняется отрицание к условию Коши равномерной сходимости ряда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\; \exists n > N\; \exists p \in \mathbb{N}\; \exists x \in X \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| > \varepsilon,$$

то ряд не сходится равномерно. (Обратим внимание, что в отрицании условия Коши равномерной сходимости ряда точка x может зависеть от N, но не должна зависеть от индекса суммирования k.)

При решении конкретной задачи нужно найти тот из пунктов (1)–(6), условия которого выполняются, затем это нужно обосновать и тем самым завершить исследование равномерной сходимости ряда.

Пример. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ на отрезках $[0,\pi]$ и $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Решение. 1) При $\alpha \le 0$ члены ряда $\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ не стремятся к нулю при $k \to \infty$ (т.к., например, при $x = \frac{\pi}{2}$ $\frac{\sin(kx)}{k^\alpha} = \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \not\to 0$ при $k \to \infty$). Следовательно, при $\alpha \le 0$ данный ряд не является поточечно сходящимся на отрезках $[0,\pi]$ и $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

2) При $\alpha > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ сходится равномерно на отрезке $[0,\pi]$ (а значит, и на отрезке $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$). Это следует из признака Вейерштрасса, поскольку $\left|\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}\right| \le \frac{1}{k^\alpha}$, и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$.

3) Покажем, что при $\alpha > 0$ данный ряд сходится поточечно на отрезке $[0,\pi]$.

Пусть $x \in (0,\pi]$. Покажем, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$ ограничены. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\,\sin(x/2) =$$

$$= -\frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{k=1}^{n} \Big(\cos\left((k+\tfrac{1}{2})x\right) - \cos\left((k-\tfrac{1}{2})x\right)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2\sin(x/2)} \left(\cos\left((n+\tfrac{1}{2})x\right) - \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right),$$

следовательно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \le \frac{1}{\sin(x/2)} \qquad \forall x\in(0,\pi] \quad \forall n\in I\!N. \qquad (4)$$

Так как при $\alpha>0$ последовательность $\left\{\frac{1}{k^\alpha}\right\}$ монотонно стремится к нулю, то в силу признака Дирихле для числовых рядов $\forall x\in(0,\pi]$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ сходится. Поскольку в точке $x=0$: $\quad \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}=0$, данный ряд сходится и в точке $x=0$. Таким образом, при $\alpha>0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ сходится поточечно на отрезке $[0,\pi]$ (следовательно, и на отрезке $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$).

4) Покажем, что при $\alpha>0$ данный ряд сходится равномерно на $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Из (4) следует, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \le \frac{1}{\sin(\pi/4)}=\sqrt{2} \qquad \forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \quad \forall n\in I\!N.$$

Следовательно, частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin(kx)$ равномерно ограничены на $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Так как при $\alpha>0$ последовательность $\left\{\frac{1}{k^\alpha}\right\}$ монотонно стремится к нулю, то в силу признака Дирихле для функциональных рядов данный ряд сходится равномерно на $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ при $\alpha>0$.

5) Покажем, что при $\alpha\le 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ не является равномерно сходящимся на $[0,\pi]$, так как выполняется отрицание условия Коши равномерной сходимости этого ряда:

$$\exists\varepsilon>0:\forall N\in I\!N\ \exists n>N\ \exists p\in I\!N\ \exists x\in[0,\pi]:$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}\right| \geq \varepsilon.$$

Положим $p = n = N + 1$, $x = \frac{\pi}{4n}$, тогда для любого $k \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ выполняется $kx \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ и, следовательно, $\sin(kx) \geq \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Итак,

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}} : \forall N \in I\!N \ \exists n = N + 1 \ \exists p = n \ \exists x = \frac{\pi}{4n} :$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}\right| \geq \varepsilon.$$

Следовательно, в силу критерия Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ не является равномерно сходящимся на $[0, \pi]$ при $\alpha \leq 1$. Отсюда и из пункта (3) следует, что при $\alpha \in (0, 1]$ данный ряд сходится неравномерно на $[0, \pi]$.

Ответ. Данный ряд на отрезке $[0, \pi]$: расходится при $\alpha \leq 0$, сходится неравномерно при $\alpha \in (0, 1]$, сходится равномерно при $\alpha > 1$; на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$: расходится при $\alpha \leq 0$, сходится равномерно при $\alpha > 0$.

■

§ 3. Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 1. Если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на множестве X функций сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве X, то функция $f(x)$ непрерывна на множестве X.

Доказательство. По определению равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in I\!N : \forall n > N\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1)$$

Поскольку функция $f_{N+1}(x)$ непрерывна на множестве X, то

$$\begin{gathered} \forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \\ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| \leq \tfrac{\varepsilon}{4}. \end{gathered} \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in I\!N\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \qquad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{N+1}(x)| +$$

$$+ |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| + |f_{N+1}(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Итак,

$$\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функция $f(x)$ непрерывна на множестве X.

■

Замечание. Из поточечной сходимости последовательности непрерывных функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции $f(x)$ не следует непрерывность функции $f(x)$.

Например, последовательность непрерывных функций $f_n(x) = x^n$ сходится на отрезке $[0,1]$ к разрывной функции $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in [0,1), \\ 1, & \text{если} \quad x = 1. \end{cases}$

Теорема 2. Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X и все функции $u_k(x)$ непрерывны на множестве X, то сумма ряда является непрерывной функцией.

Доказательство состоит в применении теоремы 1 к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Теорема 3. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $f(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \right) = \int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а значит, интегрируема по Риману на этом отрезке. По теореме об интегрировании неравенств

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Так как $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$, то $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

■

Замечание. Из поточечной сходимости $f_n(x) \underset{[a,b]}{\longrightarrow} f(x)$ при $n \to \infty$ не следует, что $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Например, $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{если} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 2n - n^2 x, & \text{если} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \\ 0, & \text{если} \quad x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]; \end{cases}$

$f_n(x) \underset{[0,1]}{\longrightarrow} 0$ при $n \to \infty$, но $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 4. Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ и все функции $u_k(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b u_k(x)\,dx\right)$ сходится к интегралу от суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, т.е. справедлива формула почленного интегрирования ряда:

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b u_k(x)\,dx\right).$$

Доказательство. Применяя теорему 3 к последовательности частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b u_k(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_a^b S_n(x)\,dx\right) =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right) dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx.$$

■

Теорема 5. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, а последовательность производных $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, причем

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Доказательство. По условию существует функция $\varphi(x)$: $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$. Поскольку функции $f_n'(x)$ непрерывны, то в силу теоремы 1 функция $\varphi(x)$ непрерывна. Из условия теоремы следует также, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A \in \mathbb{R}$. Определим функцию $f(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt$. Заметим, что $f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt$, следовательно, $|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - A| + \int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(t) - \varphi(t)|\, dt$. Поэтому

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - A| + (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)|.$$

Поскольку $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$, то $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le$$

$$\leq |f_n(x_0) - A| + (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - \varphi(t)| \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

т. е. $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$. Из определения функции $f(x)$ следует, что $\quad f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x).$

■

Теорема 6. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, все функции $u_k(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ и справедлива формула почленного дифференцирования ряда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Доказательство. Применеяя теорему 5 к последовательности частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, получим равномерную сходимость этой последовательности и справедливость формулы

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)' =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

■