Теорема 4. Пусть векторное поле $\vec{a}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемо в области Ω. Тогда условие

$$\operatorname{div} \vec{a}(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in \Omega \tag{7}$$

является необходимым, а в случае объемной односвязности области Ω – и достаточным условием соленоидальности поля $\vec{a}$.

Доказательство. 1) Необходимость условия (7) для соленоидальности поля $\vec{a}$ следует непосредственно из теоремы 3.

2) Пусть выполнено условие (7) и область Ω объемно односвязна. Пусть замкнутая кусочно-гладкая поверхность S ограничивает область G. Тогда в силу объемной односвязности области Ω $\quad G \subset \subset \Omega$, поэтому $\operatorname{div} \vec{a}(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in G$. Отсюда и из формулы Остроградского–Гаусса следует, что поток поля $\vec{a}$ через поверхность S равен нулю. $\square$

Замечание. Из условия (7) для объемно неодносвязной области Ω не следует соленоидальность поля $\vec{a}$. Пусть, например, $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ – электрическое поле точечного заряда, $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < |\vec{r}| < 3\}$, $S = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\vec{r}| = 2\}$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{a} = \left(\nabla, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right) = \frac{1}{|\vec{r}|^3}(\nabla, \vec{r}) + \left(\vec{r}, \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3}\right) =$$

$$= \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \left(\vec{r}, \frac{3\nabla|\vec{r}|}{|\vec{r}|^4}\right) = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - 3\left(\vec{r}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^5}\right) = 0,$$

т. е. условие (7) выполнено. Однако

$$\iint\limits_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_S \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) dS =$$

$$= \iint\limits_S \frac{dS}{|\vec{r}|^2} = \frac{2^2\, 4\pi}{2^2} = 4\pi \neq 0.$$

§ 6. Формула Стокса

Определение. Криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_\Gamma (\vec{a}(x,y,z), d\vec{r})$ от векторного поля $\vec{a}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ по замкнутой кривой Γ называется *циркуляцией*.

Теорема 1. Пусть

1) $S = \vec{r}(\overline{G})$ – простая гладкая ориентированная поверхность;

2) вектор-функция $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{G}$;

3) границей области G является простая замкнутая кусочно-гладкая кривая;

4) край поверхности ∂S^+ ориентирован положительно;

5) векторное поле $\vec{a}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемо в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащей поверхность S.

Тогда поток ротора поля $\vec{a}$ через поверхность S равен циркуляции поля $\vec{a}$ по кривой ∂S^+, т. е. справедлива *формула Стокса*:

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot} \vec{a}(x,y,z), d\vec{S}) = \int\limits_{\partial S^+} (\vec{a}(x,y,z), d\vec{r}). \tag{1}$$

Доказательство. Представим векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ как сумму трех векторных полей $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$. Для доказательства формулы Стокса достаточно доказать, что

$$\iint\limits_S \left(\operatorname{rot} \vec{a}_i, d\vec{S}\right) = \int\limits_{\partial S^+} (\vec{a}_i, d\vec{r}), \quad i = 1,2,3. \tag{2}$$

Докажем формулу (2) при $i = 1$. Пусть поверхность S ориентирована полем нормалей $\vec{n} = \frac{[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]}{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|}$, кривая ∂G^+ ориентирована положительно относительно области G, а система координат (u,v) – правая. Тогда согласно лемме 2 из § 1 край $\partial S^+ = \vec{r}(\partial G^+)$ поверхности S ориентирован положительно. Пусть кривая

$$\partial G^+ = \left\{ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \ : t \in [\alpha, \beta] \right\}$$

параметризована вектор-функцией $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, имеющей кусочно-непрерывную производную. Тогда $\partial S^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x(u(t),v(t)) \\ y(u(t),v(t)) \\ z(u(t),v(t)) \end{pmatrix} : t \in [\alpha,\beta] \right\}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial S^+} (\vec{a}_1, d\vec{r}) = \int\limits_{\partial S^+} P\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\,x'_t\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\,(x'_u\,u'_t + x'_v\,v'_t)\,dt = \int\limits_{\partial G^+} P\,x'_u\,du + P\,x'_v\,dv.$$

Отсюда в силу теоремы Грина получаем

$$\int\limits_{\partial S^+} (\vec{a}_1, d\vec{r}) = \iint\limits_{G} \Big((P\,x'_v)'_u - (P\,x'_u)'_v \Big)\,du\,dv.$$

Поскольку

$$(P\,x'_v)'_u - (P\,x'_u)'_v = P'_u\,x'_v + P\,x''_{vu} - P'_v\,x'_u - P\,x''_{uv} = P'_u\,x'_v - P'_v\,x'_u =$$

$$= (P'_x\,x'_u + P'_y\,y'_u + P'_z\,z'_u)\,x'_v - (P'_x\,x'_v + P'_y\,y'_v + P'_z\,z'_v)\,x'_u =$$

$$= P'_y(x'_v\,y'_u - x'_u\,y'_v) + P'_z(x'_v\,z'_u - x'_u\,z'_v) = -P'_y\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + P'_z\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},$$

то

$$\int\limits_{\partial S^+} (\vec{a}_1, d\vec{r}) = \iint\limits_{G} \left(-P'_y\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + P'_z\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right)\,du\,dv. \qquad (3)$$

С другой стороны, в силу теоремы 2 § 3 и формулы $\operatorname{rot}\vec{a}_1 = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{j}\,P'_z - \vec{k}\,P'_y$ получаем

$$\iint\limits_{S} (\operatorname{rot}\vec{a}_1, d\vec{S}) = \iint\limits_{G} \det \begin{pmatrix} 0 & P'_z & -P'_y \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_G \left(-P'_y \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + P'_z \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) du\, dv.$$

Отсюда и из формулы (3) получаем формулу (2) при $i = 1$. При $i = 2, 3$ формула (2) доказывается аналогично. Складывая формулы (2) при $i = 1, 2, 3$, получаем формулу Стокса. $\square$

Замечание. Теорему 1 можно доказать, не предполагая, что выполняется условие (2), т. е. от вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ достаточно требовать непрерывную дифференцируемость, а не непрерывность ее вторых производных, но доказательство будет значительно сложнее.

Если поверхность S составлена из конечного числа простых гладких поверхностей S_i, то при суммировании криволинейных интегралов $\int\limits_{\partial S_i^+} (\vec{a}, d\vec{r})$ интегралы по общему краю двух соседних поверхностей S_i войдут с противоположными знаками и взаимно уничтожатся. Складывая формулы Стокса для гладких поверхностей S_i, можно получить формулу Стокса для кусочно-гладкой поверхности S.

Итак, справедлива следующая теорема Стокса для кусочно-гладкой поверхности, полное доказательство которой выходит за рамки нашего курса.

Теорема 2. Пусть S – кусочно-гладкая поверхность, край которой ∂S^+ состоит из конечного числа простых замкнутых кусочно-гладких кривых, ориентированных положительно. Пусть векторное поле $\vec{a}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемо в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащей поверхность S. Тогда справедлива формула Стокса (1).

Теорема 3. (Геометрическое определение ротора.) Пусть векторное поле $\vec{a}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемо в области $G \subset \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть заданы точка $\vec{r}_0 \in G$ и единичный вектор $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$. Пусть S_δ – круг радиуса δ с центром в точке $\vec{r}_0$ и лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}$. Тогда

$$(\operatorname{rot} \vec{a}(\vec{r}_0), \vec{n}) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\pi \delta^2} \int\limits_{\partial S_\delta^+} (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{r}),$$

где ∂S_δ^+ – граница круга S_δ, ориентированная согласованно с направлением вектора $\vec{n}$ по правилу "правого буравчика".

Доказательство. Из непрерывной дифференцируемости поля $\vec{a}$ следует непрерывность функции $(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}),\vec{n})$ в точке $\vec{r}_0$, поэтому для величины

$$\varepsilon(\delta)=\sup_{\vec{r}\in S_\delta}\left|(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}),\vec{n})-(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}_0),\vec{n})\right|$$

выполняется условие $\lim\limits_{\delta\to+0}\varepsilon(\delta)=0$.

Из определения величины $\varepsilon(\delta)$ следует, что

$$\left|\iint\limits_{S_\delta}(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}),\vec{n})\,dS-\iint\limits_{S_\delta}(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}_0),\vec{n})\,dS\right|\le\iint\limits_{S_\delta}\varepsilon(\delta)\,dS=\pi\delta^2\,\varepsilon(\delta),$$

т. е.

$$\left|\iint\limits_{S_\delta}(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}),d\vec{S})-\pi\delta^2\,(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}_0),\vec{n})\right|\le\pi\delta^2\,\varepsilon(\delta).$$

В силу формулы Стокса

$$\iint\limits_{S_\delta}(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}),d\vec{S})=\int\limits_{\partial S_\delta^+}(\vec{a}(\vec{r}),d\vec{r}),$$

следовательно,

$$\left|\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{\partial S_\delta^+}(\vec{a}(\vec{r}),d\vec{r})-(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}_0),\vec{n})\right|\le\varepsilon(\delta),$$

что вместе с условием $\lim\limits_{\delta\to+0}\varepsilon(\delta)=0$ доказывает теорему. □

Замечание. Поскольку циркуляция поля $\vec{a}$ не зависит от системы координат, то из теоремы 3 следует, что для любого вектора $\vec{n}\in\mathbb{R}^3$ величина $(\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}_0),\vec{n})$ не зависит от системы координат. Поэтому ротор векторного поля не зависит от системы координат.

Задача 1. Пусть G – область в $\mathbb{R}^3$, поле $\vec{a}:G\to\mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемо. Верно ли, что поле $\vec{b}=\operatorname{rot}\vec{a}$ соленоидально в G?