выбором вектора $\mathbf{n}$. Изменение направления этого вектора равносильно умножению уравнения плоскости на (-1). При этом "положительное" полупространство становится "отрицательным", и наоборот.

Вот, однако, факт, не зависящий от выбора направления нормального вектора: если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ две точки, не лежащие в плоскости, то результаты подстановки их координат в левую часть уравнения плоскости $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ имеют один знак тогда и только тогда, когда точки лежат в одном полупространстве.

Для решения задач бывает полезно следующее замечание: если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на плоскости, то точка с координатами $x_0 + A, y_0 + B, z_0 + C$ лежит в "положительном" полупространстве. Иначе говоря, вектор с координатами A, B, C направлен в "положительное" полупространство. Это легко проверяется подстановкой.

Вполне аналогично сказанному о полупространствах мы можем определить, что такое полуплоскость, и доказать, что неравенство $Ax + By + C \geqslant 0$, связывающее декартовы координаты точки на плоскости, определяет полуплоскость. Вторая полуплоскость, ограниченная прямой $Ax + By + C = 0$, задается неравенством $Ax + By + C \leqslant 0$.

Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат по одну сторону от прямой тогда и только тогда, когда $(Ax_1 + By_2 + C)(Ax_2 + By_2 + C) > 0$.

5. Расстояние от точки до плоскости. Пусть дана плоскость с уравнением $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$ и точка M с радиус-вектором $\mathbf{R}$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{R} - \mathbf{r}_0$, соединяющий начальную точку плоскости с M (рис. 22). Расстояние от точки до плоскости равно модулю его скалярной проекции на вектор $\mathbf{n}$, т. е.

$$h = \frac{|(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|}. \tag{6}$$

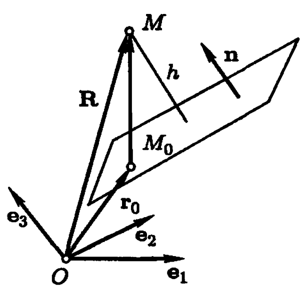

Рис. 22

Если в декартовой прямоугольной системе координат точка M имеет координаты (X, Y, Z), то равенство (6) запишется согласно предложениям 3 и 4 § 2 так:

$$h = \frac{|AX + BY + CZ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7}$$

6. Расстояние от точки до прямой. Если прямая задана уравнением $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$, то мы можем найти расстояние h от точки M с радиус-вектором $\mathbf{R}$ до этой прямой, разделив площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{R} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$, на длину его основания (рис. 23). Результат можно записать формулой

$$h = \frac{|[\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|} \tag{8}$$

Для прямой в пространстве мы не будем получать координатной записи этого выражения.

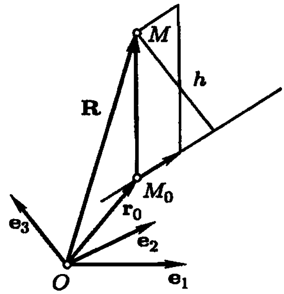

Рис. 23

Рассмотрим прямую на плоскости, заданную уравнением $Ax + By + C = 0$ в декартовой прямоугольной системе координат. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — начальная точка прямой, а $M(X, Y)$ — некоторая точка плоскости. В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\mathbf{a}(-B, A)$. Из формулы (25) § 4 гл. I следует, что площадь параллелограмма равна $S = |(X - x_0)A - (Y - y_0)(-B)|$. Тогда по формуле (9) § 2 $S = |AX + BY + C|$ и

$$h = \frac{|AX + BY + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9}$$

Легко заметить также, что для нахождения расстояния от точки до прямой на плоскости можно воспользоваться формулой (6), считая, что $\mathbf{n}$ — нормальный вектор прямой.

7. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Пусть прямые p и q не параллельны. Известно, что в этом случае существуют такие параллельные плоскости P и Q, что прямая p лежит в P, а прямая q лежит в Q. (Если уравнения прямых $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$, то плоскость P имеет начальную точку $\mathbf{r}_1$ и направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Аналогично строится плоскость Q.) Расстояние h между P и Q называется *расстоянием между прямыми p и q*. Если p и q пересекаются, то P и Q совпадают и $h = 0$.

Для того чтобы найти расстояние h, проще всего разделить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, на площадь его основания (рис. 24). Мы получим

$$h = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}.$$

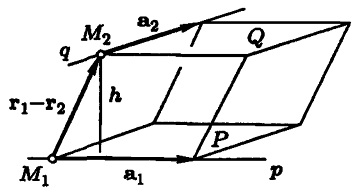

Рис. 24

Знаменатель этой дроби отличен от нуля, поскольку прямые не параллельны.

Предложение 1. *Прямые линии с уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ пересекаются тогда и только тогда, когда $h = 0$, т. е.*

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0, \quad [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq 0.$$

8. Вычисление углов. Чтобы найти угол между двумя прямыми, следует найти их направляющие векторы и вычислить косинус угла между ними, используя скалярное произведение. При этом следует иметь в виду, что, изменив направление одного из векторов, мы получим косинус смежного угла.

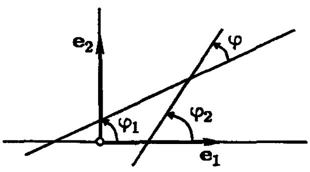

Рис. 25. $\varphi=\varphi_2=\varphi_1$

Для нахождения угла между прямой и плоскостью определяют угол θ между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости. Если векторы выбрать так, чтобы $\cos\theta \geqslant 0$, и взять $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, то искомый угол дополняет θ до $\pi/2$.

Угол между плоскостями находят как угол между их нормальными векторами.

Полезна бывает формула для угла между прямыми линиями на плоскости, заданными уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ в декартовой прямоугольной системе координат. Обозначим через φ угол между прямыми, отсчитываемый от первой прямой ко второй в том же направлении, в котором производится кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму. Тогда $\operatorname{tg}\varphi$ можно найти как тангенс разности углов, которые прямые составляют с осью абсцисс. Так как тангенсы этих углов равны угловым коэффициентам прямых, мы получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{10}$$

Конечно, эта формула не имеет смысла, когда знаменатель дроби обращается в нуль. В этом случае прямые перпендикулярны. Действительно, согласно предложению 1 §2 векторы с компонентами $(1, k_1)$ и $(1, k_2)$ — направляющие векторы прямых, и их скалярное произведение равно $1 + k_1k_2$. Мы получили

Предложение 2. *Для перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 в декартовой прямоугольной системе координат необходимо и достаточно выполнение равенства $1 + k_1k_2 = 0$.*

9. Некоторые задачи на построение. а) *Перпендикуляр из точки на плоскость. Проекция точки.* Если $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$ — уравнение плоскости и дана точка M с радиус-вектором $\mathbf{R}$, то прямая с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{R} + t\mathbf{n}$ проходит через M и перпендикулярна плоскости. Решая совместно уравнения прямой и плоскости, найдем ортогональную проекцию M на плоскость. Из $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0 + t\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 0$ находим t и подставляем в уравнение прямой. Мы получим радиус-вектор проекции

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$$

Обратите внимание на структуру этой формулы: из радиус-вектора $\mathbf{R}$ вычитается проекция $\mathbf{R}-\mathbf{r}_0$ на нормальный вектор плоскости. Из этих соображений можно было получить ответ.

б) *Перпендикуляр из точки на прямую.* Пусть прямая задана уравнением $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$ и дана точка M с радиус-вектором $\mathbf{R}$. Вектор $\mathbf{p} = [\mathbf{R}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$ перпендикулярен плоскости, проходящей через прямую и точку M. Если точка не лежит на прямой, то $\mathbf{p} \neq 0$, и вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{p}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{R}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]]$ также ненулевой и перпендикулярен $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$. Следовательно, он лежит в указанной плоскости и перпендикулярен прямой. Итак, получено уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + t[\mathbf{a}, [\mathbf{R}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]]$$

перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую.

Применив формулу двойного векторного произведения, вы заметите, что $[\mathbf{a}, \mathbf{p}]$ коллинеарен разности вектора $\mathbf{R}-\mathbf{r}_0$ и его проекции на вектор $\mathbf{a}$. Задачу можно было решить, заметив это свойство направляющего вектора перпендикуляра.

в) *Уравнение проекции прямой на плоскость.* Его просто получить, если не требуется находить направляющий вектор и начальную точку. Пусть заданная плоскость имеет уравнение $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$, а прямая — уравнение $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$, причем $[\mathbf{a}, \mathbf{n}] \neq \mathbf{0}$. Тогда плоскость $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$ проходит через прямую перпендикулярно заданной плоскости. Таким образом, проекция прямой может быть задана системой из двух уравнений:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0.$$

Направляющий вектор проекции $\mathbf{b}$ — проекция $\mathbf{a}$ на плоскость. Она получается из $\mathbf{a}$ вычитанием из него его проекции на нормаль:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$$

За начальную точку может быть принята точка пересечения проектируемой прямой с плоскостью, если она существует, или же проекция начальной точки прямой.

г) *Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.* Пусть прямые с уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}_2$ не параллельны, т. е. $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0}$. Вектор $\mathbf{p} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ перпендикулярен обеим прямым. Следовательно, плоскость

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0 \qquad (11)$$

проходит через первую прямую и общий перпендикуляр к обеим прямым (рис. 26), а плоскость

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0 \qquad (12)$$

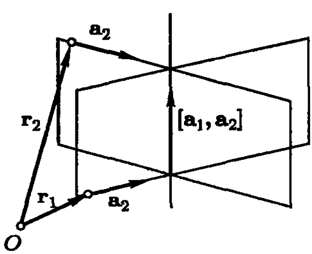

Рис. 26