**24. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.**

Прежде чем приступить непосредственно к указанному вопросу, необходимо вспомнить материал о билинейных функциях (формах).

Определение 1. Пусть L – линейное пространство над полем K (для изложения вопроса достаточно считать, что поле скаляров – R – действительные числа). Функция  называется *билинейной функцией*, если она линейна по каждому аргументу, то есть :

(1),

(2) для любых векторов  и любых скаляров .

Пусть L имеет размерность n, - базис L. Обозначим .

Определение 2. Матрицу  называют *матрицей билинейной функции*  *b* в базисе .

*Координатная запись*. Пусть , тогда

(3), где

, , , а .

Определение 3. Запись билинейной функции в виде многочлена (3) называют билинейной формой. (По традиции, термин «билинейная форма» используется и для билинейной функции, не записанной в координатах.)

Утверждение 1. Пусть и  - два базиса пространства L, S – матрица перехода от базиса  к базису, B, B’ – матрицы билинейной формы **b** в базисах  соответственно. Тогда . (4)

Из формулы (4) следует, что ранг матрицы B и знак ее определителя (если он не равен 0) не зависят от выбора базиса.

Определение 4. Билинейная форма  называется *симметрической*, если .

Утверждение 2. Матрица *симметрической* билинейной формы в любом базисе является симметрической, т.е. .

**Определение 4.** Квадратичной функцией (формой), порожденной симметрической билинейной формой  , называется функция .

**Утверждение 3**. Для любой квадратичной функции существует единственная симметрическая билинейная форма  такая, что .

Доказательство. Имеем .

Матрицей квадратичной формы называют матрицу породившей ее симметрической билинейной формы. Рассмотрим к*оординатную запись квадратичной формы*. Пусть , тогда

(3), где

, , , а .

С учетом симметричности коэффициентов квадратичной формы, ее можно записать в виде

.

**Определение 5**. Квадратичная форма вида называется *диагональной*.

Она называется *канонической*, если . Более детально,

. Числа p и q называются положительным и отрицательным индексами инерции квадратичной формы.

Теорема 1. (О приведении квадратичной формы к каноническому виду) Для любой квадратичной формы  существует такая невырожденная замена переменных , что в новых переменных она принимает канонический вид .

Теорема 2 (о единственности – закон инерции). Если - другая замена переменных, приводящая квадратичную форму  к каноническому виду , то , причем .

Теорему 2 оставим без доказательства, только заметим, что равенство следует из сохранения ранга матрицы B при замене базиса.

Доказательство теоремы 1 – алгоритм Лагранжа выделения полных квадратов.

1. Допустим, что , при необходимости перенумеровав переменные, можем считать, что . Тогда выделим в квадратичной форме все одночлены, содержащие *x*1, и дополним это выражение до квадрата: Тогда сделаем замену 

Квадратичная форма  не зависит от x1, и к ней можно применить тот же метод, в результате получится квадратичная форма .

Остается сделать замену 

1. Препятствие к выделению квадратов может возникнуть, если. Так как

Пусть . Перенумеровав при необходимости переменные, можем добиться, чтобы . Тогда сделаем подготовительную замену и  где в  нет . Далее можно продолжать, как в п. 1). 

(Замечание. Вместо параметров p и q, введенных выше, нередко рассматривают величины r=p+q – ранг В и - сигнатуру.)