24. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Прежде чем приступить непосредственно к указанному вопросу, необходимо вспомнить материал о билинейных функциях (формах).

Определение 1. Пусть L – линейное пространство над полем K (для изложения вопроса достаточно считать, что поле скаляров – R – действительные числа). Функция $b(x,y): L\times L \to K$ называется *билинейной функцией*, если она линейна по каждому аргументу, то есть :

(1) $b(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 b(x_1, y) + \alpha_2 b(x_2, y)$,

(2) $b(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 b(x, y_1) + \beta_2 b(x, y_2)$ для любых векторов $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in L$ и любых скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$.

Пусть L имеет размерность n, $e = \|e_1, e_2, ..., e_n\|$ - базис L. Обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j)\,(1 \le i,\, j \le n)$.

Определение 2. Матрицу $B = (b_{ij}) = B_e$ называют *матрицей билинейной функции* **b** в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$.

Координатная запись. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, тогда

$$b(x,y) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = X^T BY \quad (3), \text{ где}$$

$$B = (b_{ij}),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ а } X^T = (x_1 \dots x_n).$$

Определение 3. Запись билинейной функции в виде многочлена (3) называют билинейной формой. (По традиции, термин «билинейная форма» используется и для билинейной функции, не записанной в координатах.)

Утверждение 1. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ - два базиса пространства L, S – матрица перехода от базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ к базису $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$, B, B’ – матрицы билинейной формы **b** в базисах e, e' соответственно. Тогда $B' = S^T BS$. (4)

Из формулы (4) следует, что ранг матрицы B и знак ее определителя (если он не равен 0) не зависят от выбора базиса.

Определение 4. Билинейная форма $b(x,y)$ называется *симметрической*, если $\forall x, y \in L,\ \ b(x,y) = b(y,x)$.

Утверждение 2. Матрица *симметрической* билинейной формы в любом базисе является симметрической, т.е. $B^T = B$.

Определение 4. Квадратичной функцией (формой), порожденной симметрической билинейной формой $b(x,y) \neq 0$, называется функция $k(x) = b(x,x),\ \forall x \in L$.

Утверждение 3. Для любой квадратичной функции $k(x)$ существует единственная симметрическая билинейная форма $b(x,y)$ такая, что $k(x) = b(x,x),\ \forall x \in L$.

Доказательство. Имеем

$$k(x) = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(y,y) + 2b(x,y) = k(x) + k(y) + 2b(x,y) \Rightarrow$$
$$b(x,y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}.$$

Матрицей квадратичной формы называют матрицу породившей ее симметрической билинейной формы. Рассмотрим к*оординатную запись квадратичной формы*. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, тогда

$$b(x,y) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = X^T BY \quad (3),$$ где

$B = (b_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, а $X^T = (x_1 \dots x_n)$.

С учетом симметричности коэффициентов квадратичной формы, ее можно записать в виде

$$k(x) = b_{11} x_1^2 + ... + b_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij} x_i x_j .$$

Определение 5. Квадратичная форма вида $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ называется *диагональной*.

Она называется *канонической*, если $\alpha_i = 1, -1, 0$. Более детально,

$q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$. Числа p и q называются положительным и отрицательным индексами инерции квадратичной формы.

Теорема 1. (О приведении квадратичной формы к каноническому виду) Для любой квадратичной формы $k(x) = b_{11} x_1^2 + ... + b_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij} x_i x_j \neq 0$ существует такая невырожденная замена переменных $X = SY$ $(\det S \neq 0)$, что в новых переменных она принимает канонический вид

$$k = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2 .$$

Теорема 2 (о единственности – закон инерции). Если $X = TZ$ $(\det T \neq 0)$ - другая замена переменных, приводящая квадратичную форму $k(x)$ к каноническому виду $k = \sum_{i=1}^{s} z_j^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} z_j^2$,

то $p = s, q = t$, причем $p + q = rgB$.

Теорему 2 оставим без доказательства, только заметим, что равенство $p+q=rgB$ следует из сохранения ранга матрицы В при замене базиса.

Доказательство теоремы 1 – алгоритм Лагранжа выделения полных квадратов.

1) Допустим, что $\exists i:\ b_{ii}\neq 0$, при необходимости перенумеровав переменные, можем считать, что $b_{11}\neq 0$. Тогда выделим в квадратичной форме все одночлены, содержащие x_1, и дополним это выражение до квадрата:

$$k(x)=b_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n}b_{1j}x_1x_j+(\sum_{i=2}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n}b_{ij}x_ix_j)\ =$$

$$=b_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2+(\sum_{i=2}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n}b_{ij}x_ix_j-(\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2)=b_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2+k_1(x_2,...,x_n)$$

Тогда сделаем замену $z_1=(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j),\ z_2=x_2,...,\ z_n=x_n.$

Квадратичная форма $k_1(x_2,...,x_n)$ не зависит от x_1, и к ней можно применить тот же метод, в результате получится квадратичная форма $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i z_i^2\quad(\alpha_1=b_{11},\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r\neq 0,r=rgB)$.

Остается сделать замену $y_i=\sqrt{|\alpha_i|}z_i,i=1,...,r;\ \ y_k=z_k,k=r+1,...,n$

2) Препятствие к выделению квадратов может возникнуть, если $a_{ii}=0,\ \forall i=1,...,n$. Так как Пусть $k(x)\neq 0,\exists i,\ j:b_{ij}\neq 0$. Перенумеровав при необходимости переменные, можем добиться, чтобы $b_{12}\neq 0$. Тогда сделаем подготовительную замену $x_1=x'_1-x'_2,\ x_2=x'_1+x'_2,\ x_j=x'_j\ (j\ge 3)$. и $k(x')=2b_{12}(x'^2_1-x'^2_2)+q'(x'),$ где в $q'(x')$ нет x'^2_1. Далее можно продолжать, как в п. 1). □

(Замечание. Вместо параметров p и q, введенных выше, нередко рассматривают величины r=p+q – ранг В и $\sigma=p-q$ - сигнатуру.)