Классическое вариационное исчисление изучает общие методы нахождения экстремумов функционалов, являющихся, как правило, некоторыми интегралами, заданных в определенных функциональных пространствах. Как мы позже увидим, функционалы интегрального типа встречаются во многих задачах математики, механики и физики. Поэтому методы вариационного исчисления широко используются в классической механике, математической физике, квантовой механике, механике сплошных сред и полей и в других разделах науки.

Отметим, что вариационное исчисление является разделом дифференциального исчисления в бесконечномерных пространствах $Y$ и не является разделом классического анализа. Например, задача о брахистохроне не относится к конечномерному анализу, так как в ней должны сравниваться друг с другом все гладкие кривые, проходящие через заданные точки $A$ и $B$, т. е. бесконечномерный объект. Таким образом, классическое вариационное исчисление является составной частью общей теории экстремальных задач для функционалов в бесконечномерных пространствах. Кроме классического вариационного исчисления, теория экстремальных задач в качестве своих разделов содержит также математическое и линейное программирование, оптимальное управление. Теория экстремальных задач интенсивно развивается и в настоящее время (см. [10], [14]).

В настоящей главе будут изложены элементы классического вариационного исчисления. Значения всех функций в этой главе предполагаются действительными.

## § 1. Простейшая вариационная задача

Обозначим через $\mathbb{C}^1[a,b]$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[a,b]$. Для $\forall y_1(x)$, $y_2(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ введем расстояние между ними по формуле

$$\|y_1(x) - y_(x)\|_{\mathbb{C}^1[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x\in[a,b]} \left|y_1'(x) - y_2'(x)\right|.$$

Множество функций $\mathbb{C}^1[a,b]$ с введенной метрикой является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x,y,p)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция для $\forall x \in [a,b]$ и $\forall (y,p) \in R^2_{(y,p)}$ — плоскости с декартовыми прямоугольными координатами $y,p$. Рассмотрим интеграл

$$J(y) = \int\limits_a^b F\left[x, y(x), y'(x)\right] dx \tag{1}$$

на множестве $M$ тех функций $y(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{2}$$

где $A$ и $B$ — заданные числа. Функции $y(x) \in M$ будем называть допустимыми.

Очевидно, для $\forall y(x) \in M$ интеграл (1) определен и задает функционал с областью определения $M$ в пространстве $\mathbb{C}^1[a,b]$.

**Определение.** Говорят, что функция $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум функционала (1), если $\exists$ число $\varepsilon > 0$ такое, что для $\forall y(x) \in M$, для которой $\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{\mathbb{C}^1[a,b]} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J(y) \geq J(\hat{y})$.

Если в этом определении последнее неравенство заменить неравенством $J(y) \leq J(\hat{y})$, то для (1) получим определение слабого локального максимума. Оба понятия — слабый локальный минимум и слабый локальный максимум объединяются единым термином: слабый локальный экстремум.

**Замечание.** Кроме слабого локального экстремума, в классическом вариационном исчислении изучается еще сильный локальный экстремум, о чем будет речь впереди. Кроме того, употребляется термин абсолютного (или глобального) экстремума. Говорят, что $\hat{y}(x) \in M$ дает абсолютный минимум функционала (1), если $J(y) \geq J(\hat{y})$ для всех $y(x) \in M$. Если $J(y) \leq J(\hat{y})$ для всех $y(x) \in M$, то говорят, что $\hat{y}(x) \in M$ дает функционалу (1) абсолютный максимум. Абсолютные минимум и максимум объединяются единым термином абсолютного экстремума.

**Определение.** Задача нахождения слабого локального экстремума функционала (1) называется простейшей вариационной задачей.

Простейшую вариационную задачу иногда называют задачей с закрепленными концами в силу того, что допустимые кривые обязаны проходить через две закрепленные точки $M_1(a, A)$ и $M_2(b, B)$ (см. рис. 2) плоскости $R^2_{(x,y)}$.

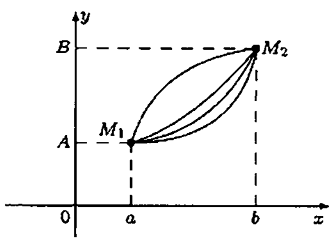


**Рис. 2**

Как известно, при исследовании функции на экстремум существенную роль играет производная функции. При исследовании экстремумов функционалов аналогичную роль играет вариация функционала. Введем это понятие.

Обозначим через $\dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$ множество всех тех функций $y(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, для которых $y(a) = y(b) = 0$.

Пусть $y(x) \in M$ и $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Рассмотрим семейство функций, зависящих от действительного параметра $\alpha$: $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\cdot\eta(x)$. Поскольку $y(x,\alpha) \in M$ при $\forall\alpha$, то можно рассмотреть интеграл

$$J(y+\alpha\eta) = \int_a^b F\left[x, y(x) + \alpha\eta(x),\, y'(x) + \alpha\eta'(x)\right] dx. \tag{3}$$

При фиксированных $y(x)$ и $\eta(x)$ интеграл (3) является собственным интегралом $\Phi(\alpha)$, зависящим от параметра $\alpha$. Если взять некоторое $\varepsilon > 0$, то при $|\alpha| \le \varepsilon$, $x \in [a,b]$ подынтегральная функция $F$ и ее производная по $\alpha$ в силу наложенных на $F$ условий являются непрерывными. Тогда по известной из курса анализа теореме $\Phi(\alpha) = J(y+\alpha\eta)$ является дифференцируемой функцией $\alpha$ при $|\alpha| \le \varepsilon$ и по правилу Лейбница

$$\Phi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J\left[y(x) + \alpha\eta(x)\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\cdot\eta'(x) \right\} dx.$$

**Определение.** Допустимым приращением (вариацией) функции $y(x) \in M$ называется любая функция $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Выражение $\frac{d}{d\alpha}J\left[y(x) + \alpha\eta(x)\right]\big|_{\alpha=0}$, где $\eta(x)$ — любая функция из $\dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$, называется первой вариацией функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ и обозначается $\delta J[y, \eta(x)]$, $\forall\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$.

Таким образом, вариация функционала (1)

$$\delta J[y, \eta(x)] =$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\cdot\eta'(x) \right\} dx, \tag{4}$$

где $\eta(x)$ — любая допустимая вариация функции $y(x) \in M$.

Отметим, что первая вариация $\delta J[y, \eta(x)]$ линейно зависит от $\eta(x)$ и $\eta'(x)$.

**Замечание.** Данное здесь определение первой вариации (по Лагранжу) функционала (1) является одним из аналогов определения дифференциала функций многих переменных $f(x)$. Для функционалов возможны и другие определения аналогов дифференциала таких функций: так называемые сильный дифференциал (дифференциал Фреше) функционала и слабый дифференциал (дифференциал Гато) функционала.

Теперь можно доказать необходимое условие решения простейшей вариационной задачи.

**Теорема 1.** *Если $\hat{y}(x) \in M$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо $\delta J\left[\hat{y}, \eta(x)\right] = 0$ для любой допустимой $\eta(x)$.*

○ Пусть для определенности $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум для функционала $J(y)$, т.е. $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $J(\hat{y}+h) \geq J(\hat{y})$ для $\forall h(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$, для которой $\|h(x)\| < \varepsilon$. Положим $h(x) = \alpha\eta(x)$, где $\alpha \in R$, $\eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$. Тогда $\hat{y}(x) + h(x) \in M$ и для достаточно малых $|\alpha|$ при фиксированной $\eta(x)$

$$\|h\|_{C^1[a,b]} = |\alpha| \left\{ \max_{[a,b]} |\eta(x)| + \max_{[a,b]} |\eta'(x)| \right\} < \varepsilon,$$

$$\Phi(\alpha) = J(\hat{y} + \alpha\eta) \geq J(\hat{y}) = \Phi(0).$$

Это значит, что дифференцируемая функция $\Phi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$. Значит, $\Phi'(0) = 0$, и тогда $\delta J\left[y, \eta(x)\right] = \Phi'(0) = 0$, $\forall \eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$. ●

Теорема 1 является неудобной для практического использования. Чтобы получить удобное для практики необходимое условие решения простейшей вариационной задачи, предварительно установим лемму, которая в силу своей важности носит название основной леммы вариационного исчисления (или леммы Лагранжа).

**Лемма.** *Если $f(x) \in C[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$ для $\forall \eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.*

○ Рассуждаем от противного. Пусть $f(x) \not\equiv 0$ на $[a,b]$. Тогда $\exists x_0 \in (a,b)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$. Из непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$ следует, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0)$, $\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$. Возьмем

$$\eta(x) = \begin{cases} \left[x - (x_0 - \varepsilon)\right]^2 \cdot \left[x - (x_0 + \varepsilon)\right]^2, & x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \\ 0, & x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $\eta(x) \in \overset{\circ}{\mathrm{C}}{}^1[a,b]$. По интегральной теореме о среднем получаем, что

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\eta(x)dx =$$

$$= f(\zeta)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \eta(x)dx \geq \frac{1}{2}f(x_0)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \eta(x)dx > 0,$$

где $\zeta \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. А это неравенство противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение о том, что $f(x) \not\equiv 0$ на $[a,b]$ неверно. Лемма доказана. ●

**Теорема 2.** *Пусть функция $F(x,y,p)$ — дважды непрерывно дифференцируема при $\forall x \in [a,b]$, $\forall (y,p) \in R^2_{(y,p)}$. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x)$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо функция $\hat{y}(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{5}$$

*(здесь $\frac{d}{dx}$ — полная производная по $x$).*

○ Если $\hat{y}(x)$ — решение задачи, то в силу теоремы 1 $\delta J[\hat{y},\eta(x)] = 0$ для любой допустимой вариации $\eta(x)$. Учитывая, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, проинтегрируем по частям слагаемое, содержащее $\eta'(x)$ в формуле (4). Это законно, так как выражение

$$\frac{d}{dx}\left.\frac{\partial F[x,y(x),y'(x)]}{\partial y'}\right|_{y=\hat{y}(x)} =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}\cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot y''\right]_{y=\hat{y}(x)}$$

в силу условий теоремы 2 является непрерывной на $[a,b]$ функцией. Имеем

$$0 = \int_a^b \left\{\frac{\partial F[x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)]}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial F[x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)]}{\partial y'}\cdot\eta'(x)\right\}dx =$$

$$= \frac{\partial F[x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)]}{\partial y'}\cdot\eta(x)\Big|_{x=a}^{b} + \int_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(x)dx =$$

$$= \int_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(x)dx.$$

Поскольку функция $\eta(x) \in \mathring{C}^1[a,b]$, а функция

$$\left\{\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right\}_{y=\hat{y}(x)}$$

является непрерывной на $[a,b]$, то в силу основной леммы вариационного исчисления

$$\left\{\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right\}_{y=\hat{y}(x)} \equiv 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Это значит, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (5). ●

**Определение.** Всякое решение уравнения Эйлера (5) называют экстремалью функционала (1). Всякая же экстремаль $y(x)$ функционала (1), являющаяся допустимой функцией, т.е. $y(x) \in M$, называется допустимой экстремалью функционала (1).

Из теоремы 2 вытекает, что только среди допустимых экстремалей (1), т.е. среди экстремалей (1), удовлетворяющих граничным условиям (2), нужно искать решение простейшей вариационной задачи.

**Замечание.** Условие непрерывности $\hat{y}''(x)$ в теореме 2 было наложено лишь с целью упрощения доказательства теоремы 2. Используя так называемую лемму Дюбуа-Реймона, можно доказать теорему 2 и без предположения непрерывности $\hat{y}''(x)$. Более того, если $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{y=\hat{y}(x)} \neq 0$, то можно доказать и непрерывность $\hat{y}''(x)$ на $[a,b]$.

Уравнение Эйлера (5) является дифференциальным уравнением второго порядка при $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \not\equiv 0$, так как, найдя полную производную $\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}$, его можно записать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}\cdot y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot y'' = 0.$$

Следовательно, экстремали функционала (1) образуют двухпараметрическое семейство $y(x, C_1, C_2)$. Допустимые экстремали функционала (1) находят, определяя параметры $C_1, C_2$ из граничных условий (2):

$$y(a, C_1, C_2) = A, \quad y(b, C_1, C_2) = B.$$

Из этой системы не всегда можно однозначно определить параметры $C_1, C_2$. Эта система не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

**Пример 1.** Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int_{-1}^{1} e^x \left[(y')^2 + 6y^2\right] dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 2e^2 \operatorname{sh} 5.$$