Глава II

РЕГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 7. Дифференцируемые функции. Условия Коши — Римана

1. Производная. Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Если существует конечный предел отношения $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0 и обозначается $f'(z_0)$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0. Таким образом,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{1}$$

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в области*, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Пусть $\Delta f = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$. Тогда соотношение (1) примет вид

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0). \tag{2}$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

имеет место, если $0 < |\Delta z| < \delta$. Из (2) следует, что

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z) \qquad (\Delta z \to 0).$$

Обратно, если приращение Δf функции $f(z)$ представляется в виде

$$\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z), \tag{3}$$

где A — комплексная постоянная, не зависящая от Δz, то функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $A = f'(z_0)$.

Таким образом, равенство (3) является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $f(z)$ в точке

z_0. Из (3), в частности, следует, что функция, дифференцируемая в точке z_0, непрерывна в этой точке.

Пример 1. Функция $f(z)=z^n$ ($n \geqslant 1$ — целое) дифференцируема во всей комплексной плоскости, так как

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{nz^{n-1}\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = nz^{n-1}. \tag{4}$$

Следовательно,

$$(z^n)' = nz^{n-1}. \ \square \tag{5}$$

Из определения производной и свойств пределов вытекает, что на функции комплексного переменного распространяются известные из курса математического анализа правила дифференцирования.

1. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в точке z, то их сумма, разность, произведение и частное (при $g(z) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место равенства

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf' \quad (c = \text{const}),$$
$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{6}$$

2. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, а функция $F(w)$ дифференцируема в точке $w = f(z)$, то функция $\Phi(z) = F[f(z)]$ дифференцируема в точке z, причем

$$\Phi'(z) = F'(w) f'(z). \tag{7}$$

Пример 2. Из формул (5) и (6) следует, что

а) функция $f(z) = z^m$, где $m < 0$ — целое, дифференцируема во всей комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$, и $(z^m)' = mz^{m-1}$; в частности,

$$(z^{-1})' = \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2};$$

б) многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ — дифференцируемая во всей комплексной плоскости функция и

$$P_n'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2} z + a_{n-1};$$

в) рациональная функция $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ имеет производную во всех точках, где $Q_m(z) \neq 0$, причем формула для $R'(z)$ имеет тот же вид, что и соответствующая формула для действительных x. $\square$

В определении производной содержится требование, чтобы предел (1) не зависел от способа стремления Δz к нулю. Это накладывает на дифференцируемую функцию комплексного переменного значительно более сильные ограничения, чем на дифференцируемую функцию действительного переменного. В § 12 будет доказано, что функция комплексного переменного, дифференцируемая в области, обладает производными всех порядков в этой области.

В § 4 было отмечено, что непрерывность функции комплексного переменного $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ в точке $z=x+iy$ равносильна непрерывности функций u и v в точке (x, y). Аналогичное утверждение не имеет места для дифференцируемости. Именно, требование дифференцируемости функции $f(z)=u+iv$ налагает дополнительные условия на частные производные функций u и v.

2. Условия Коши — Римана.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z)=u(x, y)+$ $+iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z=x+iy$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y);*

2) *в точке (x, y) выполнялись условия Коши — Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{8}$$

Для производной $f'(z)$ справедлива формула

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z. Тогда в силу (3) имеем

$$\Delta f=f'(z)\Delta z+\varepsilon(\rho), \tag{10}$$

где $\varepsilon(\rho)=o(\rho)$ при $\rho\to 0$. Здесь обозначено $\rho=|\Delta z|=$ $=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Функция $\varepsilon(\rho)$ комплекснозначная, представим ее в виде $\varepsilon(\rho)=\varepsilon_1(\rho)+i\varepsilon_2(\rho)$, где функции $\varepsilon_1(\rho)$, $\varepsilon_2(\rho)$ принимают действительные значения. Так как $\frac{\varepsilon(\rho)}{\rho}\to 0$ при $\rho\to 0$, то $\frac{\varepsilon_1(\rho)}{\rho}\to 0$, $\frac{\varepsilon_2(\rho)}{\rho}\to 0$ при $\rho\to 0$, и поэтому

$$\varepsilon_1(\rho)=o(\rho), \quad \varepsilon_2(\rho)=o(\rho) \quad (\rho\to 0). \tag{11}$$

Обозначим $\Delta f=\Delta u+i\Delta v$, $f'(z)=A+iB$ и подставим в (10), тогда получим

$$\Delta u+i\,\Delta v=(A+iB)(\Delta x+i\,\Delta y)+\varepsilon_1+i\varepsilon_2. \tag{12}$$

Приравнивая в этом соотношении действительные и мнимые части, получаем

$$\Delta u=A\Delta x-B\Delta y+\varepsilon_1, \quad \Delta v=B\Delta x+A\Delta y+\varepsilon_2. \tag{13}$$

Тем самым доказано, что функции u, v дифференцируемы в точке (x, y).

Из равенств (13) находим

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -B = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad A = \frac{\partial v}{\partial y},$$

откуда следуют условия Коши — Римана и формула (9), так как $f'(z) = A + iB$.

Достаточность. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) и пусть выполняются условия (8). Тогда имеют место равенства (13), где $\varepsilon_1 = o(\rho)$, $\varepsilon_2 = o(\rho)$. Умножая второе из этих равенств на i и складывая с первым, получаем

$$\Delta u + i\,\Delta v = A\Delta x - B\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y) + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

или

$$\Delta f = (A + iB)(\Delta x + i\,\Delta y) + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

или

$$\Delta f = (A + iB)\Delta z + \varepsilon(\rho),$$

где $\varepsilon(\rho) = o(\rho)$, откуда в силу (3) вытекает дифференцируемость функции $f(z)$ в точке z. Теорема доказана.

Пример 3. а) Функция $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ дифференцируема во всей комплексной плоскости, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

По формуле (9) находим

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z,$$

т. е.

$$(e^z)' = e^z. \tag{14}$$

б) Функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ дифференцируемы во всей комплексной плоскости, и их производные вычисляются по формулам

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \tag{15}$$
$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z. \tag{16}$$

в) Рассмотрим функцию $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - i2xy$. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2x$. Условия (8) выполняются только при $x = y = 0$, следовательно, функция $\bar{z}^2$ дифференцируема только в точке $z = 0$. □

Пусть $z = re^{i\varphi}$, тогда $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$, и условия Коши — Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right). \tag{18}$$

Пример 4. Пусть D — плоскость z с разрезом вдоль положительной действительной полуоси.

а) Функция $\sqrt{z}=\sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}$, где $z=re^{i\varphi}$, $0<\varphi<2\pi$, удовлетворяет условиям (17) и поэтому $\sqrt{z}$ — дифференцируемая в области D функция. По формулам (18) находим $(\sqrt{z})'=\frac{1}{2\sqrt{r}\,e^{i\varphi/2}}$, т. е.

$$(\sqrt{z})'=\frac{1}{2\sqrt{z}}. \tag{19}$$

б) Функция $\ln z=\ln r+i\varphi$ $(z=re^{i\varphi},\ 0<\varphi<2\pi)$ удовлетворяет условиям (17) и

$$(\ln z)'=\frac{1}{z}. \quad \square \tag{20}$$

3. Сопряженные гармонические функции. Пусть функция $f(z)=u+iv$ дифференцируема в области D и, кроме того, функции u и v имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда, дифференцируя первое из равенств (8) по x, а второе — по y, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что производные $\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$ в силу их непрерывности равны, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{21}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Действительная функция $u(x, y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению (21), называется *гармонической* в области D, а уравнение (21) — *уравнением Лапласа.*

Выше было указано, что дифференцируемая в области D функция имеет производные любого порядка в этой области и, следовательно, обладает непрерывными частными производными любого порядка. Поэтому действительная и мнимая части функции $f(z)=u+iv$, дифференцируемой в области D, являются гармоническими функциями в этой области.

Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные между собой условиями Коши — Римана, называются *сопряженными*. Таким образом, действительная и мнимая части дифференцируемой в области функции являются в этой области сопряженными гармоническими функциями.

Обратно, если в области D даны две сопряженные гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то, по теореме 1, функция $f(z)=u+iv$ дифференцируема в области D. Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для дифференцируемости функции $f(z)=u+iv$ в области D необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были сопряженными гармоническими в этой области.*

Зная одну из функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, можно в односвязной области найти другую функцию.

Теорема 3. *Для всякой функции $u(x, y)$, гармонической в односвязной области D, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию, которая определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.*

Доказательство. Так как $u(x, y)$ — гармоническая в односвязной области D функция, то

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

и следовательно, выражение $-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ является полным дифференциалом некоторой однозначной функции $v(x, y)$, определяемой с точностью до произвольного постоянного слагаемого C формулой (§ 6, п. 2)

$$v(x, y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C. \tag{22}$$

Здесь $(x_0, y_0)\in D$ и $(x, y)\in D$ (интеграл не зависит от кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y), а зависит лишь от точки (x, y), если точка (x_0, y_0) фиксирована).

Из (22) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

откуда следует, что $v(x, y)$ — гармоническая в области D функция, сопряженная с $u(x, y)$.

Из теорем 2 и 3 следует, что если задана гармоническая функция $u(x, y)$ в односвязной области D, то можно найти, с точностью до постоянного слагаемого, дифференцируемую в области D функцию $f(z)=u+iv$, т. е. восстановить дифференцируемую функцию по заданной ее действительной (или мнимой) части. Если область D многосвязна, то функция v, определяемая интегралом (22), а также функция $f(z)=u+iv$ могут оказаться неоднозначными.

Отметим, что при нахождении функции $v(x, y)$ по заданной функции $u(x, y)$ (или наоборот) часто бывает более удобным вместо формулы (22) непосредственно использовать условия Коши — Римана (см. пример 5).

Пример 5. Найдем дифференцируемую функцию $f(z)$, если

$$\operatorname{Re} f(z)=u(x, y)=y^3-3x^2y.$$

Функция $u=y^3-3x^3y$ является гармонической во всей комплексной плоскости. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy,$$

откуда

$$v=-3xy^2+g(x). \tag{23}$$

Из (23) находим

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x). \tag{24}$$

С другой стороны, в силу (8) получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2. \tag{25}$$

Сравнивая (24) и (25), находим $g'(x)=3x^2$, откуда $g(x)=x^3+ C$, где C — действительная постоянная, и из (23) получаем $v=-3xy^2+x^3+C$. Искомая функция

$$f(z)=u+iv=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2)+iC=i(z^3+C)$$

дифференцируема во всей комплексной плоскости. $\square$

4. Понятие регулярной функции. Введем одно из основных понятий теории функций комплексного переменного — понятие регулярной функции.

Определение 1. Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности точки $z=a$ $(a\neq\infty)$ и разлагается в ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{26}$$

сходящийся в некоторой окрестности точки $z=a$ (т. е. в круге $|z-a|<\rho$, $\rho>0$). Тогда функция $f(z)$ называется *регулярной в точке* $z=a$.

Функция $f(z)$ называется *регулярной в области* D, если она регулярна в каждой точке области D.

§ 9. Интегральная теорема Коши

В этом параграфе будет доказана интегральная теорема Коши — один из наиболее важных результатов теории функций комплексного переменного.

1. Теорема Коши для случая непрерывной производной.

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D и ее производная непрерывна в D. Тогда интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равен нулю*:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Если $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, то по формуле (3) § 5 имеем

$$\int_\gamma f(z)\,dz = J_1 + iJ_2,$$

где

$$J_1 = \int_\gamma u\,dx - v\,dy, \quad J_2 = \int_\gamma v\,dx + u\,dy.$$

Так как функция $f(z)$ имеет непрерывную производную в области D, то частные производные первого порядка функций u, v непрерывны в области D и выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

В силу сформулированной в § 6 (п. 2) теоремы из (2) следует, что $J_1 = J_2 = 0$. Таким образом, $\int\limits_\gamma f(z)\,dz = J_1 + iJ_2 = 0$.

2. Теорема Коши (общий случай).

Теорема 2 (интегральная теорема Коши). *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D. Тогда интеграл от $f(z)$ по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равен нулю*:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Приведем доказательство интегральной теоремы Коши, принадлежащее Гурса.

1. Докажем сначала теорему для случая, когда кривая γ является контуром треугольника, лежащего в области D. Проведем доказательство от противного. Пусть теорема неверна. Тогда найдется треугольник (контур этого треугольника и сам тре-

угольник обозначим символом Δ) такой, что

$$\left|\int\limits_{\Delta} f(z)\,dz\right| = \alpha > 0. \tag{4}$$

Соединив середины сторон треугольника Δ (рис. 42) отрезками прямых, разобьем его на четыре треугольника $\Delta^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\Delta^{(k)}} f(z)\,dz = \int\limits_{\Delta} f(z)\,dz. \tag{5}$$

В самом деле, левая часть (5) равна сумме, состоящей из интеграла по контуру треугольника Δ и интегралов, взятых два раза (в противоположных направлениях) по каждой стороне треугольника $\Delta^{(4)}$ (эти интегралы взаимно уничтожаются).

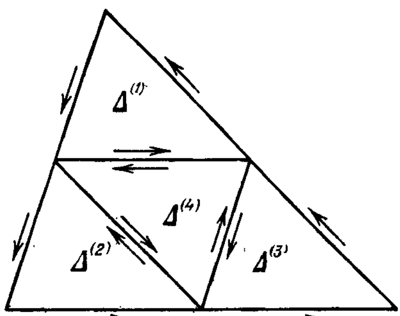

Рис. 42

Из равенств (4) и (5) следует, что по крайней мере для одного из интегралов в левой части (5) (обозначим соответствующий треугольник Δ_1) справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\alpha}{4}, \tag{6}$$

так как в противном случае

$$\alpha = \left|\int\limits_{\Delta} f(z)\,dz\right| \leqslant \sum_{k=1}^{4} \left|\int\limits_{\Delta^{(k)}} f(z)\,dz\right| < 4\frac{\alpha}{4} = \alpha,$$

т. е. $\alpha < \alpha$, что невозможно.

Далее, разбивая треугольник Δ_1 указанным выше способом на четыре треугольника и повторяя предыдущие рассуждения, найдем такой треугольник Δ_2, что

$$\left|\int\limits_{\Delta_2} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\alpha}{4^2}.$$

Продолжая этот процесс, получаем последовательность треугольников $\{\Delta_n\}$ такую, что каждый треугольник Δ_n содержит треугольник Δ_{n+1} ($n = 1, 2, \ldots$) и имеет место неравенство

$$J_n = \left|\int\limits_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\alpha}{4^n}. \tag{7}$$

Формула (7) дает оценку снизу для J_n. Найдем для J_n оценку сверху. Пусть P — периметр исходного треугольника; тогда периметр P_n треугольника Δ_n равен $P/2^n$ и, следовательно, $P_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Таким образом, последовательность треугольников $\{\Delta_n\}$ является стягивающейся: каждый треугольник Δ_n содержит все последующие треугольники Δ_{n+1}, Δ_{n+2}, ..., и периметр треугольника Δ_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что существует единственная точка z_0, лежащая внутри или на границе треугольника Δ и принадлежащая всем треугольникам Δ_1, Δ_2, ... По условию, точка z_0 принадлежит области D. Так как функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),$$

откуда

$$\int_{\Delta_n} f(z)\,dz =$$

$$= f(z_0)\int_{\Delta_n} dz + f'(z_0)\int_{\Delta_n} z\,dz - z_0 f'(z_0)\int_{\Delta_n} dz + \int_{\Delta_n} o(z - z_0)\,dz. \qquad (8)$$

Так как $\int\limits_{\Delta_n} dz = 0$, $\int\limits_{\Delta_n} z\,dz = 0$ (§ 5, примеры 1, 2), то из равенства (8) имеем

$$\int_{\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\Delta_n} o(z - z_0)\,dz. \qquad (9)$$

Из определения величины $o(z - z_0)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех z: $|z - z_0| < \delta$ имеет место неравенство

$$|o(z - z_0)| < \varepsilon\,|z - z_0|. \qquad (10)$$

Выберем n столь большим, чтобы треугольник Δ_n лежал в круге $|z - z_0| < \delta$. Тогда из (9) и (10) имеем

$$J_n = \left|\int_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \varepsilon \int_{\Delta_n} |z - z_0|\,|dz| < \varepsilon P_n \int_{\Delta_n} |dz| = \varepsilon P_n^2 = \varepsilon\frac{P^2}{4^n},$$

т. е.

$$J_n < \varepsilon\frac{P^2}{4^n}. \qquad (11)$$

Сравнивая (7) и (11), получаем $\alpha/4^n < \varepsilon P^2/4^n$, т. е. $\alpha < \varepsilon P^2$, что при $\alpha > 0$ невозможно, так как $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Следовательно, $\alpha = 0$, т. е. равенство (3) справедливо для любого треугольника, лежащего в области D.

2. Пусть теперь в качестве γ взят контур произвольного замкнутого многоугольника, лежащего в области D.

Если многоугольник является выпуклым, то его можно разбить на треугольники диагоналями, проведенными из одной вершины. Представляя $J = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ в виде суммы интегралов, взятых по границам треугольников, на которые разбивается данный многоугольник, получаем $J = 0$.

Далее, любой многоугольник можно разбить на конечное число выпуклых многоугольников. Следовательно, и в этом случае $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$.

3. Пусть, наконец, γ — произвольная замкнутая кривая, лежащая в области D. По лемме 2, § 5 $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ можно с любой точностью приблизить интегралом по замкнутой ломаной, лежащей в области D, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутая ломаная L такая, что

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz - \int\limits_{L} f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

По доказанному выше $\int\limits_{L} f(z)\,dz = 0$ и поэтому последнее неравенство принимает вид $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| < \varepsilon$, откуда в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ заключаем, что $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$.

3. Следствия, дополнения и замечания к теореме Коши.

Замечание 1. Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ дифференцируема в кольце $0 < |z| < 2$, но $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} \neq 0$ (§ 5, пример 3). Этот пример показывает, что требование односвязности области в теореме Коши существенно.

Следствие 1. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования. Именно, если кривые γ, γ_1 лежат в области D и имеют общие начало и конец, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Таким образом, кривую γ можно деформировать в области D (оставляя концы неподвижными), не меняя значения интеграла.

Используя следствие, приведенное в § 6. п. 2, получаем теорему 3, которая также называется интегральной теоремой Коши.

Теорема 3. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в области D, а кривые γ_1 и γ_2 гомотопны в области D, то*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Область D может быть и неодносвязной.

Теорема Коши остается в силе и для случая, когда кривая γ является границей области D. Приведем формулировку теоремы Коши для этого случая.

Теорема 4. *Пусть D — ограниченная односвязная область с кусочно гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство теоремы 4 вытекает из теоремы 2 и леммы 3, § 5.

Утверждение теоремы 4 остается в силе и для многосвязных областей.

Следствие 2. *Пусть граница Γ многосвязной области D состоит из замкнутой кусочно гладкой кривой Γ_0 и попарно не пересекающихся замкнутых кусочно гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, расположенных внутри Γ_0, и пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда*

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0. \tag{12}$$

Кривые $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ ориентированы так, что при обходе каждой из этих кривых область D остается слева.

Доказательство. Соединим кривую Γ_0 с кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ разрезами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (рис. 43) так, чтобы получившаяся область $\tilde{D}$ была односвязной. Граница $\tilde{\Gamma}$ области $\tilde{D}$ состоит из кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ и разрезов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. По теореме 4 $\int_{\tilde{\Gamma}} f(z)\,dz = 0$. Учитывая, что интегрирование по каждому разрезу γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ совершается два раза (в противоположных направлениях) и, следовательно, $\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0$, получаем формулу (12).

Отметим частный случай следствия 2. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D (не обязательно односвязной) и пусть γ и γ_1 — простые замкнутые кривые (одна из них лежит внутри другой), образующие границу области $D_1 \subset D$ (рис. 44).

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz. \tag{13}$$

В формуле (13) обход кривых γ и γ_1 совершается в одном и том же направлении. Из равенства (13) следует, что если замкнутый контур γ произвольно деформируется в области, где функция

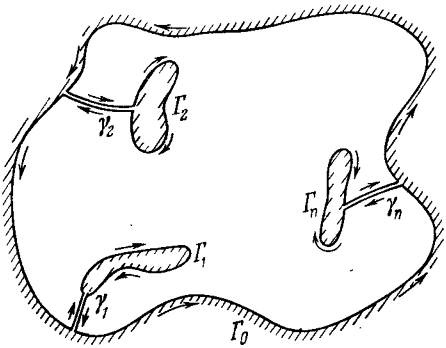

Рис. 43

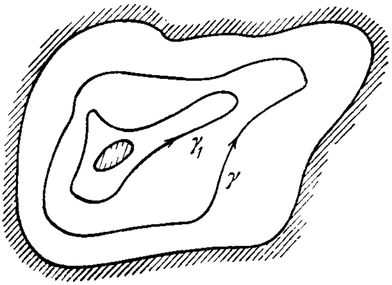

Рис. 44

$f(z)$ дифференцируема, то величина интеграла $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ при этом не меняется.

4. Интеграл и первообразная. Пусть функция $f(z)$ определена в области D, а функция $F(z)$ дифференцируема в этой области. Если $F'(z)=f(z)$ для всех $z\in D$, то функция $F(z)$ называется *первообразной функции $f(z)$ в области D.*

Теорема 5. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то она имеет в этой области первообразную.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{14}$$

где интеграл берется по любой кривой, лежащей в области D. Так как интеграл (14) не зависит от пути интегрирования (следствие 1), то функция $F(z)$ однозначна в области D. Покажем, что $F(z)$ есть первообразная функции $f(z)$, т. е.

$$F'(z) = \left(\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right)' = f(z).$$