Системы линейных уравнений и матрицы второго и третьего порядков.

Введение:

Рассмотрим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Обозначим систему из m уравнений и n неизвестных как: $m\times n$.
Здесь:

a_{ij} - i - номер уравнения (строки матрицы);
- j - номер неизвестной (столбца матрицы).

Эту же систему уравнений можно записать в виде матрицы:

$$\tilde{A} = (A|B) \ ,$$

где A — матрица, составленная из коэффициентов перед неизвестными (матрица системы), а B — столбец свободных членов $(b_1, \ldots, b_m)$.
Расширенной матрицей системы называют матрицу, полученную из матрицы системы путём дописывания справа после вертикальной черты столбца свободных членов.

матрица Расширенная системы $(\tilde{A})$:

$$\tilde{A}=\left\|\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right\|$$

Решение уравнения — набор из n чисел, удовлетворяющих всем уравнениям:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования уравнений (строк матрицы).

1. $(i) := (i) + \lambda(j) \quad (i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{R})$
2. $(i) \Leftrightarrow (j)$ – транспозиция двух уравнений (строк матрицы).
3. $(i) := \lambda(j)$

<u>Любое</u> из элементарных преобразований переводит данную систему в равносильную ей.

Системы и определители второго и третьего порядков.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \cdot\ (a_{22}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \cdot\ (-a_{12}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\rightarrow (a_{11} - a_{22})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

<u>Определитель (детерминант) матрицы второго порядка:</u>

Обозначается: $|A|$, $det(A)$, $\begin{vmatrix} a\ldots & \\ & a\ldots \end{vmatrix}$, Δ. (Эти же обозначения справедливы и для матрицы произвольного порядка).

(Символ Δ также называют «главным определителем системы»).

$$\boxed{det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ - \ \text{для матрицы второго порядка.}}$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ – вспомогательные определители матрицы второго порядка.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases}$$

Решение систем линейных уравнений. Метод Крамера.

Рассмотрим однородную систему:

1.

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_{x1}}{\Delta} \\ x2 = \dfrac{\Delta_{x2}}{\Delta} \end{cases} \quad - \quad \text{единственное решение системы.}$$

Данный метод решения систем линейных уравнений получил название 'Метод Крамера'.

2. Если $\Delta = 0$, то:

$$2.1. \ \Delta_1 \ \ u \ \ \Delta_2 \neq 0 \rightarrow \varnothing \ \ (\text{нет решений}).$$

$$2.2. \ \Delta_1 = \Delta_2 = 0 \rightarrow \infty \ \ \text{много решений.}$$

$$\Delta = 0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ / \ : a_{11}a_{12}(x)$$

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{22}} = b$$

Рассмотрим стему линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 0 \ \ / : y_3, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = 0 \ \ / : y_3; \end{cases} \ - \ \text{Допустим,} \ \ y_3 \neq 0.$$

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{y_1}{y_3} + a_{12}\dfrac{y_2}{y_3} = -a_{13}, \\ a_{21}\dfrac{y_1}{y_3} + a_{22}\dfrac{y_2}{y_3} = -a_{23}; \end{cases}$$

Введём замену: $\dfrac{y_1}{y_3} = t_1$, $\dfrac{y_2}{y_3} = t_2$. Тогда:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 = -a_{13}, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 = -a_{23}; \end{cases}$$

Допустим, что $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Получим:

$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\Delta}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$t_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\Delta}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

где $(t_1; \ t_2) = (\dfrac{y_1}{y_3}; \ \dfrac{y_2}{y_3})$.

Одно из решений:

$$\left(y_1,\ y_2,\ y_3\right) = \left(-\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) = \left(-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

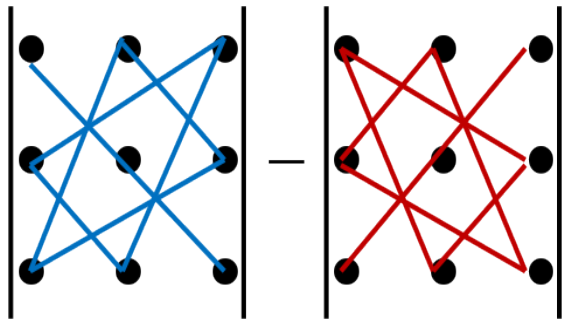
Введём обозначение:

M_{ij} - дополнительный минор матрицы A к элементу a_{ij} .

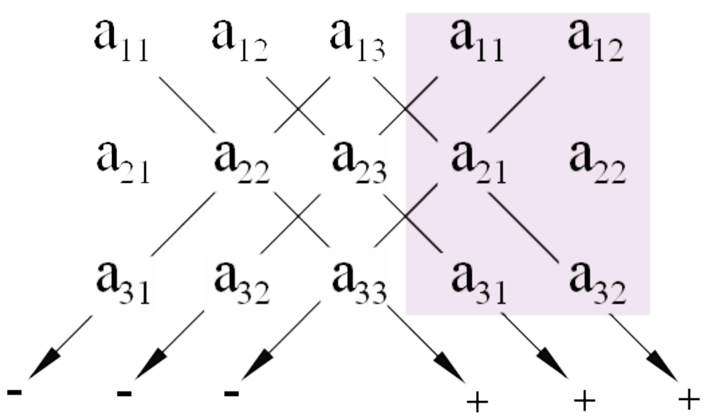
Определитель матрицы третьего порядка:

Т.е., для матрицы 3×3 детерминант находится суммированием шести произведений из трёх элементов. Действие выполняется согласно следующей схеме:

Правило треугольника (Саррусa):



или



Обратите внимание, что данное правило работает лишь для матриц третьего порядка!

Свойства детерминанта:

- $det\left(A^T\right) = det\, A$, где $A^T -$транспонированная матрица.
- Детерминант матрицы можно раскладывать по любому столбцу и по любой строке, используя правило знаков: $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$.
- Если в матрице А сделать транспозицию двух строк или двух столбцов, то её определитель изменит знак.
- Из любого столбца или строки можно выносить общие множители всех элементов этого столбца или строки.

Действия над матрицами.

Введём обозначение:

$$A = \left(a_{ij}\right) \qquad \left(\begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant m \; - \; \text{количество строк}\,; \\ 1 \leqslant j \leqslant n \; - \; \text{количество столбцов}\,. \end{matrix}\right)$$

1. Сложение:

Если $A = \left(a_{ij}\right);\; B = \left(b_{ij}\right)$ размера $m \times n$, то $C = \left(c_{ij}\right) := A + B$, если $\forall\ \left(i\,;\, j\right)$:

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Существует матрица вида:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

такая, что $A + O = O + A = A$.

Такую матрицу называют *нулевой*.

$$\forall\ A:\ -A = \left(-a_{ij}\right).$$

2. Умножение на число (скаляр):

$$\lambda \subseteq \mathbb{R}:\ \left(\lambda A\right)_{ij} = \left(\lambda a_{ij}\right),$$

т.е., при умножении матрицы на число каждый её элемент домножается на это число.

3. Произведение двух матриц:

Для начала рассмотрим тривиальный случай: умножение строки на столбец:

$$\underset{1\times n}{A} = (a_1\ a_2 \dots\ a_n) = \vec{a}$$

$$\underset{1\times n}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = b^{\uparrow}$$

$$\vec{a} \cdot b^{\uparrow} = a_1 b_1 + a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \underset{1\times 1}{M}\ (\mathbb{R})$$

Теперь рассмотрим умножение матрицы А, состоящей из n строк вида $\vec{a_i}$ на столбец $b^{\uparrow}$:

$$\underset{m\times m}{A} \cdot \underset{n\times 1}{b^{\uparrow}} = \begin{Vmatrix} \vec{a_1} \\ \dots \\ \vec{a_m} \end{Vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{a_1} \cdot b^{\uparrow} \\ \dots \\ \vec{a_m} \cdot b^{\uparrow} \end{Vmatrix}$$

Сводя это к общему случаю, получаем:

$$\underset{(m\times s)}{A} = (a_{ij}); \quad \underset{(s\times n)}{B} = (b_{ij})$$

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} \vec{a_1} \\ \dots \\ \vec{a_m} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1^{\uparrow} \dots b_n^{\uparrow} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{a_1} \cdot b_1^{\uparrow} & \dots & \vec{a_1} \cdot b_n^{\uparrow} \\ \dots & \dots & \dots \\ \vec{a_m} \cdot b_1^{\uparrow} & \dots & \vec{a_m} \cdot b_n^{\uparrow} \end{Vmatrix} = C$$

$$c_{ij} = \vec{a_i} \cdot b_j^{\uparrow} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{is} \cdot b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant m; \ 1 \leqslant j \leqslant n)$$

Свойства операций:

1. Свойства сложения.
   - Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C), \ \forall A, B, C \in M_{mn}$
   - Существование нулевой матрицы: $\exists\, 0 : 0 + A = A \ \ (\forall A_{mn}, 0_{mn})$
   - Существование противоположной матрицы:
   - Коммутативность: $A + B = B + A, \forall A, B \in M_{mn}$

2. Свойства умножения на число.
   - Ассоциативность: $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot A)$
   - Умножение на единицу: $1 \cdot A = A \ \ (\forall\ A, \ 1 \in \mathbb{R})$
   - Дистрибутивность относительно сложения матриц:

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A$$
$$(\forall\ A, B \in M_{m,n})$$

Данные свойства считаем очевидными и оставляем без доказательства.

3. Свойства умножения матриц:
   - Ассоциативность:

$$\forall\ A\ \exists\,(-A):(-A)+A=0$$

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C\quad (A\ ,B,\ C\in M;\ \ A_{m\times s},\ B_{s\times t},\ C_{t\times n})$$

   - Существование единичной матрицы такой, что:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix};\quad E_m\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}\cdot E_n=A_{m\times n}$$

     Данное свойство умножения матриц студентам предлагается доказать самостоятельно.

   - Умножение матриц в общем случае не(!) коммутативно.

Приведем несколько примеров, подтверждающий последнее свойство:

1) $(3;\ 1;\ ;4)\cdot(2;\ -7;\ 1)^T=3\cdot 2-7\cdot 1+4\cdot 1=(3)_{1\times 1}$

$$(2;\ -7;\ 1)^T\cdot(3;\ 1;\ 4)=\begin{pmatrix}6 & 2 & 8\\ -21 & -7 & -28\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}_{3\times 3}$$

2) $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=E_{21}-$такую матрицу называют матричной единицей

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E_{22}$$

$$A\cdot B=E_{21}\cdot E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=E_{21}=A$$

Докажем ассоциативность умножения матриц:

$$A=\underset{1\leqslant i\leqslant m}{(a_{ij})};\quad B=\underset{1\leqslant k\leqslant s\ \ 1\leqslant l\leqslant t}{(b_{kl})};\quad C=(c_{lj})$$

$$(A\cdot B)_{il}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\cdot b_{kl}$$

$$((A\cdot B)\cdot C)_{ij}=\sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\cdot b_{kl}\cdot c_{lj}$$

Правило перестановки индексов в повторной группе:

$M=(m_{ij}),\ \ (1\leqslant i\leqslant k;\ 1\leqslant j\leqslant l)$ - необходимо найти сумму всех элементов данной матрицы.

$$M=\left\|\begin{matrix} m_{11} & \dots & m_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \dots & m_{kl}\end{matrix}\right\|$$

$$A_{m\times s}=(a_{ik});\ \ B_{s\times t}=(b_{kl});\ \ C_{t\times n}=(c_{lj})$$

$$(A\cdot B)_{il}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kl}$$

$$((A\cdot B)\cdot C)_{ij}=\sum_{l=1}^{t}(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kl})c_{lj}=\sum_{l=1}^{t}(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kl}c_{lj})=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}\underbrace{(\sum_{l=1}^{t}b_{kl}c_{lj})}_{(B\cdot C)_{kj}}=(A\cdot(B\cdot C))_{ij}$$

$\rightarrow$ $((A\cdot B)\cdot C)=(A\cdot(B\cdot C))$ - что и требовалось доказать.

Обратная матрица.

Матрица A' называется обратной к матрице A если при их умножении выполняется:

$A\cdot A'=A\cdot A'=E_n$, где A и A' - квадратные матрицы порядка n, а E_n - единичная матрица порядка n соответственно.

Лемма:

Если для матрицы A существует обратная матрица A', то она единственна.

Доказательство:

Допустим, что существуют различные матрицы A' и A'' обратные к матрице A.

Рассмотрим $A'\cdot A\cdot A''=\underbrace{(A'\cdot A)}_{E}\cdot A''=A''$

Но: $A'\cdot A\ cdotA''=A'\cdot(A\cdot A'')=A'\ \rightarrow\ A'=A''$, что и требовалось доказать.

В дальнейшем будем обозначать матрицу, обратную к матрице A как A^{-1}.

Теорема (условие существования обратной матрицы):

Матрица, обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен 0.

$$\exists A^{-1}\Leftrightarrow det\,A\neq 0$$

Доказательство:

Пусть:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix};\ \ A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}=(\overset{\uparrow}{x_1}\ \ \overset{\uparrow}{x_2}\ \ \overset{\uparrow}{x_3})$$

Необходимо чтобы:

$$A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} E_1^{\uparrow} & E_2^{\uparrow} & E_3^{\uparrow} \end{pmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} A \cdot X_1^{\uparrow} = E_1^{\uparrow} \\ A \cdot X_2^{\uparrow} = E_2^{\uparrow} \\ A \cdot X_3^{\uparrow} = E_3^{\uparrow} \end{Bmatrix}$ $-$данная система должна иметь одно решение $\Leftrightarrow \Delta = |A| \neq 0$

Её можно переписать в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n \end{Bmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X^{\uparrow} = b^{\uparrow}$$

Правило Крамера:

для $X_1^{\uparrow}$: $\quad x_{1i} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{M_{11}}{\Delta}$

$X_2^{\uparrow}$: $\quad x_{2i} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-M_{12}}{\Delta}$

Аналогично:

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\Delta}$$

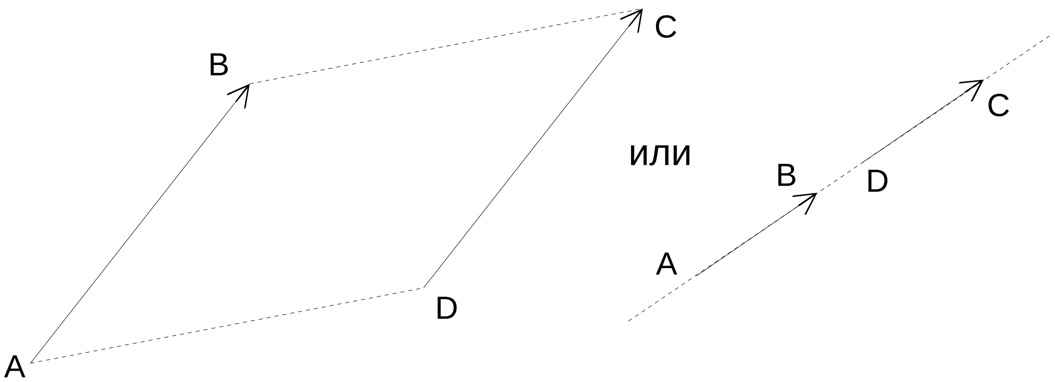
Для матрицы второго порядка получаем:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Векторная алгебра.

Векторы и линейные операции над ними.

Вектор — класс эквивалентности направленных отрезков.
Скажем, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ изображают один и тот же вектор, если $\overrightarrow{DC}$ можно получить из $\overrightarrow{AB}$ параллельным переносом.



Введём некоторые обозначения и термины:

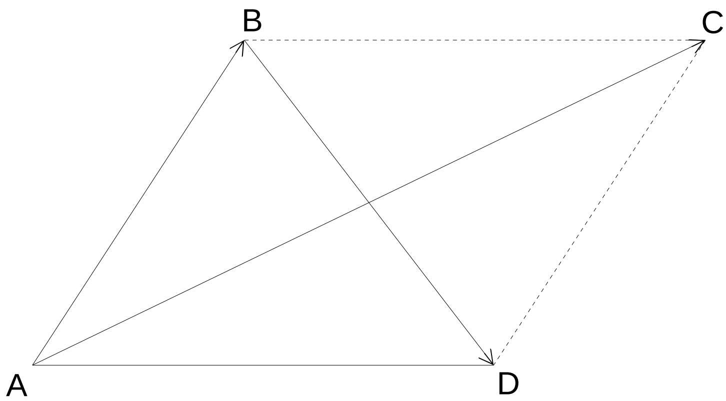
- $\vec{a} \| \vec{b} -$ коллинеарность
- Сонаправленность: концы векторов лежат в одной полуплоскости от прямой, проходящей через их начала.
- Противонаправленность: концы векторов лежат в разных полуплоскостях от прямой, проходящей через их начала.

Операции над векторами:

1. $\lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \vec{a}$
   - $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
     $(\lambda = 0 \ \rightarrow \ \lambda \cdot \vec{a} = \vec{0})$
   - $\lambda > 0 \ \rightarrow \ \lambda \cdot \vec{a}$ сонаправлен $\vec{a}$
     $\lambda > 0 \ \rightarrow \ \lambda \cdot \vec{a}$ противонаправлен $\vec{a}$

Замечание: Если $\vec{a} \| \vec{b}$ и $\vec{a} \neq 0$, то $\exists! \ \lambda \in \mathbb{R}: \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$

2. $\vec{a} + \vec{b}$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

Линейная комбинация векторов:
$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, где $k \geqslant 1$ - это вектор $\vec{a}_1\lambda_1 + \dots + \vec{a}_k\lambda_k$

Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно независимы, если $\sum_{i=1}^{k} \vec{a}_i\lambda_i = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

Такую линейную комбинацию называют тривиальной.

Векторы $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ линейно зависимы, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$

Обозначим V – множество всех векторов на прямой/на плоскости/в пространстве.

Векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ называются базисом множества V если:

- они линейно независимы
- $\forall\ \vec{v} \in V$ можно разложить по ним, т.е., найти такие коэффициенты $x_1, \dots, x_n$, что: $\vec{V} = \sum_{i=1} x_i\vec{e}_i$

Лемма:

Разложение вектора по базису единственно.

Доказательство:

Если $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i\vec{e}_i$, то $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)\vec{e}_i = \vec{0}$

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – линейно независимы → $\forall\ i = 1, \dots, n \quad x_i = x'_i$

Координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ - коэффициенты разложения по базисным векторам.

Утверждения:

- Если V – прямая, то n=1.
  Базис: $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$
- Если V – плоскость, то n=2.
  Базис: $\vec{e}_1$ неколлинеарен $\vec{e}_2$

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3\| \cdot (x\ y\ z)^T = \bar{e} \cdot X^{\uparrow}$$

- Если V – пространство, то n=3.
  Базис: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ неколлинеарны между собой.

Разложение произвольного вектора по базису в пространстве представляется в виде:

Лемма:

Линейным операциям над векторами соответствуют линейные операции над их координатами.

Утверждение:

Если вектора линейно независимы, то определитель матрицы, составленной из их координат не равен 0.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{линейно независимы} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Доказательство:

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}, \text{ следовательно:}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 = 0 \\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 = 0 \\ \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3 = 0 \end{cases} - \text{ единственное решение: } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

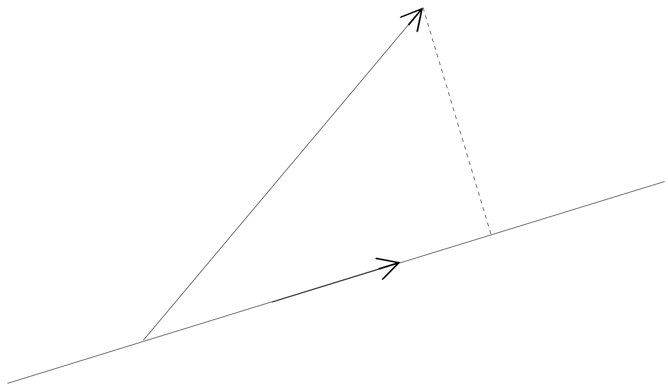
Скалярное произведение векторов.

Рассмотрим ортогональную проекцию вектора $\vec{b}$ на ось l с направляющим вектором $\vec{a}$:

$$|\vec{b}\,'| = |\vec{b}| \cdot |\cos\varphi|$$

$$\vec{b}\,' = k\vec{a} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \cos\varphi \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$



Свойства скалярного произведения:

- Коммутативность: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- $(t\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, t\vec{b}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b})$
- Ассоциативность относительно сложения векторов: $(\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{b}_2) = (\vec{a}, \vec{b}_1) + (\vec{a}, \vec{b}_2)$

Матрицей Грамма базиса e называют матрицу, составленную из скалярных произведений базисных векторов:

$$G_e = \begin{Vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{Vmatrix}$$

Пусть: $\vec{a} = \bar{e} \cdot x^{\uparrow}$, $\vec{b} = \bar{e} \cdot y^{\uparrow}$ (т.е., $\vec{a} = \sum_i x_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_j y_j \vec{e}_j$)

Тогда: $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{X} \cdot G_e \cdot Y^{\uparrow}$

В ортонормированном базисе эта формула принимает вид: $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{X} \cdot Y^{\uparrow}$

Это происходит потому, что в ортогональном базисе скалярное произведение базисных векторов равно: $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$

Символ δ_{ij} называют «символом Кронекера».

Рассмотрим разложение произвольного вектора по ортонормированному базису в пространстве:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i; \; (\vec{a}, \vec{e}_j) = \sum_i x_i (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

$$(\vec{a}, \vec{e}_j) = |\vec{a}| \cos\alpha_j = x_i (\vec{e}_j, \vec{e}_j) = x_i$$

$\langle \cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3 \rangle$ называют направляющими косинусами.

Отсюда: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \langle \cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3 \rangle$, где $\cos\alpha_1^2 + \cos\alpha_2^2 + \cos\alpha_3^2 = 1$

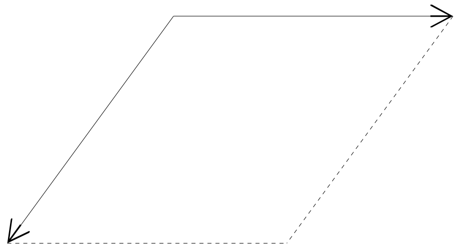
Геометрический смысл определителя матрицы Грамма (для плоскости):

$$det\, G_e = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix} = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2\alpha = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2\alpha = S^2_{\vec{a}, \vec{b}}$$

Следовательно, определитель матрицы Грамма для базиса на плоскости равен квадрату площади параллелограмма, построенного на базисных векторах.

Векторное произведение векторов.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (допустим, что они приложены в одной точке).



Вектор $\vec{c}$ называется векторным произведением $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если выполняется:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = S_{\vec{a},\vec{b}}$

  Замечание: $\vec{c} = \vec{0}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

  Далее считаем $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарными.
- $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка.

Свойства векторного произведения:

- Антикоммутитивность: $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$
- Дистрибутивность: $[\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{b}] + [\vec{a}_2, \vec{b}]$
- $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$

Векторное произведение в координатах:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j] = \sum_{i,j} a_i b_j \underbrace{[\vec{e}_i, \vec{e}_j]}_{[\vec{e}_i, \vec{e}_i] = \vec{0}} = a_1 b_2 [\vec{e}_1, \vec{e}_2] + a_1 b_3 [\vec{e}_1, \vec{e}_3] + a_2 b_1 [\vec{e}_2, \vec{e}_1] +$$

$$+ a_2 b_3 [\vec{e}_2, \vec{e}_3] + a_3 b_1 [\vec{e}_3, \vec{e}_1] + a_3 b_2 [\vec{e}_3, \vec{e}_2] =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)[\vec{e}_2, \vec{e}_3] + (a_3 b_1 - a_1 b_3)[\vec{e}_3, \vec{e}_1] + (\square\, b_2 - a_2 b_1)[\vec{e}_1, \vec{e}_2] =$$

$$= \begin{vmatrix} [\vec{e}_2, \vec{e}_3] & [\vec{e}_3, \vec{e}_1] & [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - правый ортонормированный базис, то:

$[\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1$

$[\vec{e}_3, \vec{e}_1] = \vec{e}_2$

$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3$

В задачах часто возникает формула двойного векторного произведения:

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$

Для её запоминания используется мнемоническое правило «БАЦ минус ЦАБ».

Докажем её справедливость:

Пусть данные вектора имеют в правом ортонормированном базисе следующие координаты:

Смешанное произведение векторов.

Обозначается: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

Лемма:

Смешанное произведение вектором численно равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$, где минус ставится, если тройка векторов левая, а плюс - если правая.

Следствие:

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарные $\Leftrightarrow$ линейно зависимые.

Свойства:

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- Дистрибутивность: $(\vec{a}, \vec{b}, (\vec{c}_1 + \vec{c}_2)) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)$
- Однородность: $(\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Вычислим смешанное произведение в координатах:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\sum a_i \vec{e}_i, \sum b_i \vec{e}_i, \sum c_i \vec{e}_i) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

Замена координат.

$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$

Рассмотрим следующую задачу:

Был некий базис в пространстве: $e = \|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3\|$

Пусть ввели новый базис: $e' = \|\vec{e}'_1\ \vec{e}'_2\ \vec{e}'_3\|$

Тогда его базисные вектора будут выражаться через старый базис следующим образом: $\vec{e}\,'_j = s_{1j}\vec{e}_1 + s_{2j}\vec{e}_2 + s_{3j}\vec{e}_3 = \|\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3\| \cdot \begin{pmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ s_{3j} \end{pmatrix}$, где $j = 1, 2, 3.$

Перепишем это в матричном виде:

$$e' = e \cdot S$$

$$S = \underbrace{\left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ \underbrace{s_{31}}_{\vec{e}\,'_1} & \underbrace{s_{32}}_{\vec{e}\,'_2} & \underbrace{s_{33}}_{\vec{e}\,'_3} \end{matrix} \right\|}_{\text{координаты нового базиса}} = S_{e\to e'}$$ – матрица перехода от базиса e к базису e'.

Лемма:

Матрица перехода обратима и $S_{e'\to e} = S^{-1}_{e\to e'}$

Доказательство:

$$e' = e \cdot S_{e\to e'};\ e = e' \cdot S_{e'\to e}$$

Подставим выражение e' через e во второе равенство:

$e = (e \cdot S_{e\to e'}) \cdot S_{e'\to e} = e \cdot (S_{e\to e'} \cdot S_{e'\to e}) \Rightarrow$ в силу единственности разложения векторов по базису: $(S_{e\to e'} \cdot S_{e'\to e}) = E$

Аналогично:

$$e' = e' \cdot \underbrace{(S_{e\to e'} \cdot S_{e'\to e})}_{E} \Rightarrow S_{e'\to e} = S^{-1}_{e\to e'}$$

Замечание: определитель матрицы перехода не равен нулю, так как она составлена из линейно независимых векторов.

Воспользуемся матрицей перехода для определения координат вектора. Рассмотрим разложения произвольного вектора по обоим базисам:

Замена декартовой системы координат. Замена координат точки.

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – старая система координат

$(O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$ – новая система координат

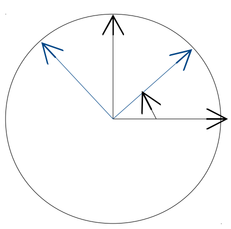
$OM(x, y, z);\ O'M(x', y', z')$

Пусть: $O'(x_o, y_o, z_o);\ e' = e \cdot S_{e\to e'}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + S_{e\to e'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

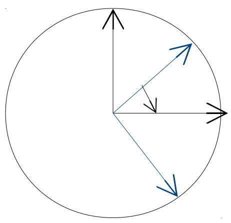
Рассмотрим частный случай перехода от одного ортонормированного базиса к другому:

1) На плоскости:



$$\vec{e}\,'_1 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$
$$\vec{e}\,'_2 = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$$
$$S_{e\to e'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$S_{e'\to e} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = S^T_{e\to e'}$$

Второй случай:



$$\vec{e}\,'_1 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$
$$\vec{e}\,'_2 = (\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$$
$$S_{e\to e'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

2) В пространстве:

e и e' – ортонормированные базисы.

Запишем, чему равно $(\vec{e}\,'_i,\ \vec{e}\,'_j) = (s_{1i}\ s_{2i}\ s_{2i}) \cdot \begin{pmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ s_{3j} \end{pmatrix} = \delta_{ij}$

Утверждение:

$$S^T_{e\to e'} \cdot S_{e\to e'} = E$$

$S_{e'\to e} = S^T_{e\to e'}$ – ортогональные матрицы.

Ортогональная матрица — матрица, обратная к которой есть транспонированная.

Прямые и плоскости.

Прямые.

Пятый постулат Евклида:

$\exists!$ прямая $l \ni P_o : l \parallel \vec{a}\ (\vec{a} \neq \vec{0})$

Утверждение:

Точка P с радиус-вектором
$$\vec{r} \in l \iff \overrightarrow{P_o P} \parallel \vec{a} \equiv \overrightarrow{P_o P} = t\vec{a},\ t \in \mathbb{R}$$
$$\iff \underbrace{\vec{r} = \vec{r}_o + t\vec{a},}_{\text{параметрическое ур-ие прямой}} \quad t \in \mathbb{R}$$
\

$\vec{a}$ - направляющий вектор прямой.

Пусть в некоторой общей декартовой системе координат:

$$\vec{r}(x, y, z), \vec{r}_o(x_o, y_o, z_o), \vec{a}(a_x, a_y, a_z)$$

Тогда параметрическое уравнение прямой можно переписать в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + t a_x \\ y = y_0 + t a_y \\ z = z_0 + t a_z \end{cases}, \text{ где } |a_x| + |a_y| + |a_z| \neq 0$$

Отсюда можно выразить:

$$(t =)\ \frac{x - x_o}{a_x} = \frac{y - y_o}{a_y} = \frac{z - z_o}{a_z} - \text{каноническое уравнение прямой в пространстве.}$$

Замечания:

- Если (к примеру) $a_z = 0$, тогда $z = z_o$, l параллельно плоскости $z = z_o$.
- Если $a_y = a_z = 0$, тогда $y = y_o, z = z_o, \forall P \in l \Rightarrow l \parallel O_x$

Ещё один способ задания прямой:

$$(\vec{r} - \vec{r}_o) \parallel \vec{a} \Leftrightarrow [\vec{r} - \vec{r}_o, \vec{a}] = \vec{0} \Leftrightarrow [\vec{r}, \vec{a}] = [\vec{r}_o, \vec{a}] = \vec{b}$$

$$[\vec{r}_o + t\vec{a}, \vec{a}] = [\vec{r}_o, \vec{a}] = \vec{b} - \text{для любой точки } P(\vec{r}) \in l$$

Для уравнения $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{b}$ необходимо найти конктретную точку $P(\vec{r}_o)$, удовлетворяющую этому уравнению.

Ищем: $\vec{r}_o \perp \vec{a}$ и $\vec{r}_o \perp \vec{a}$.

$$\Rightarrow \vec{r}_o = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$$

$$\lambda[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{a}] = -\lambda[\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]] = -\lambda(\vec{a}(\vec{a}, \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}, \vec{a})) = \vec{b} \Leftrightarrow \lambda(\vec{b}(\vec{a}, \vec{a})) = \vec{b}$$

Если $\vec{b} = \vec{0}$, $\lambda = 0$, то $\vec{r}_o = \vec{0}$. Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\lambda = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{a})}$, $\vec{r}_o = \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{(\vec{a}, \vec{a})}$.

Утверждение:

$P(\vec{r}) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P} \perp \vec{n}, \vec{n} \neq \vec{0}$.

Вектор $\vec{n}$ называют нормальным вектором прямой l.

Используя это понятие, можно задать прямую ещё одним способом:
$(\vec{r} - \vec{r}_o, \vec{n}) = 0$

В ортонормированном базисе она примет вид:

$$n_x(x - x_o) + n_y(y - y_o) = 0$$

$$n_x x + n_y y + (n_x x_o + n_x x_o) = 0$$

$\Rightarrow Ax + By + C = 0 -$ линейное уравнение прямой на плоскости.

В произвольной системе координат будет также иметь место следующее соотношение:

$$\frac{x - x_o}{a_x} = \frac{y - y_o}{a_y}$$

$$a_y(x - x_o) = a_x(y - y_o)$$

$$a_y x - a_x y + (-a_y x_o + a_x y_o) = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By + C = 0$$

$$A = a_y,\ B = -a_x \ \Leftrightarrow\ \vec{a} = (-B,\ A)$$

В ортонормированной системе координат:

Если $B \neq 0$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = kx + b$$

$$\Rightarrow -\frac{A}{B} = \frac{a_y}{a_x} = tg\alpha,\ -\frac{C}{B} = b$$

Вычисление угла между прямыми в ортонормированной системе координат:

$$y = k_1 x + b_1,\quad y = k_2 x + b_2$$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \ \Rightarrow\ l_1 \perp l_2 \equiv k1k_2 = -1;\ \ l_1 \parallel l_2 \equiv k1 = k_2$$

Задачи о прямых:

В следующих задачах будем считать, что даны прямые: $l_{1/2}\colon \vec{r} = \vec{r_{o,1/2}} + t\,\vec{a_{1/2}}$

1. Исследование взаимного расположения прямых в пространстве.
    - Прямые параллельны, но не совпадают:
      $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{a}_2] = \vec{0}, [(\vec{r_{o2}} - \vec{r_{o1}}), \vec{a_{1/2}}] \neq \vec{0}$
    - Прямые совпадают:
      $l_1 = l_2 \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{a}_2] = \vec{0}, [(\vec{r_{o2}} - \vec{r_{o1}}), \vec{a_{1/2}}] = \vec{0}$
    - Прямые скрещиваются:
      $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{a}_2] \neq \vec{0}, ((\vec{r_{o2}} - \vec{r_{o1}}), \vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq 0$
    - Прямые пересекаются в точке:
      $l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{a}_2] \neq \vec{0}, ((\vec{r_{o2}} - \vec{r_{o1}}), \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$

2. Нахождение угла между прямыми.

$$\cos\alpha = \frac{|(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

3.Вычисления расстояния между прямыми.

- Скрещивающиеся прямые в пространстве.

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(\vec{r_{o2}} - \vec{r_{o1}}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{\|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]\|}$$ – высота параллелепипеда.

- Расстояние между параллельными прямыми.

Пучок прямых.

Пучок — множество всех произвольных прямых, проходящих через данную точку.

Теорема:

Прямая $l: (\vec{r}, \vec{n}) + c = 0 \in$ пучку П, определяемому прямыми l_i: $(\vec{r}, \vec{n}_i) + c_i = 0$, $i = 1, 2$

$\Leftrightarrow \ \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: уравнение l: $\alpha((\vec{r}, \vec{n}_1) + c_1) + \beta((\vec{r}, \vec{n}_2) + c_2) = 0$ $(*)$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$

Доказательство:

Если уравнение имеет вид (*), то оно задаёт прямую, проходящую через точку пересечения прямых, определяющих пучок.

$$(*): (\underbrace{\vec{r}_1, \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2}_{\vec{n}}) + \alpha c_1 + \beta c_2 = 0$$

Пусть $l \in \Pi$.

Тогда её вектор нормали выражается как:

$\vec{n} = \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$ $(\exists\ \alpha, \beta: \vec{n}_1$ не является параллельным с $\vec{n}_2)$

Перепишем уравнение полученной прямой в более удобном виде:

$$(\vec{r}, \vec{n}) + c = 0$$

$$\alpha(\vec{r}, \vec{n}_1) + \beta(\vec{r}, \vec{n}_2) + c = 0,$$

Подставим $\vec{r} = \vec{r}_o$: $-\alpha c_1 - \beta c_2 = c$

Плоскости.

Для любой точки пространства существует лишь одна плоскость, проходящая через неё параллельно двум неколлинеарным векторам.

$\exists!\ \pi \ni P_o$: $\vec{a} \parallel \pi$, $\vec{b} \parallel \pi$ $(\vec{a} \neg\parallel \vec{b})$

Векторное параметрическое уравнение:

$\overrightarrow{PP_o} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} \ \Leftrightarrow \ \vec{r} = \vec{r}_o + t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{R})$

Задание координатного уравнения плоскости:

$P \in \pi \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{PP_o}$ – компланарны $\Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_o, \vec{a}, \vec{b}) = 0$

В координатах:

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ a x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}_{\neq 0} = 0$$ (в произвольной система координат)

Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой:

Пусть даны точки $P_o(x_o, y_o, z_o), P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой. Тогда можно взять за направляющие для плоскости вектора $\overrightarrow{P_oP_1}$ и $\overrightarrow{P_oP_2}$ и подставить их координаты в уравнение, полученное выше.

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o & z_2-z_o \end{vmatrix} = 0$$

Вычислим этот определитель:

$$\Pi_+ = \{P(\vec r) : (\vec r, \vec n) + D > 0\}$$
$$\Pi_- = \{P(\vec r) : (\vec r, \vec n) + D < 0\}$$

$$(x-x_o)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}}_{A} + (y-y_o)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}}_{B} + (z-z_o)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}_{C} = 0$$

$$A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$$

$$\Rightarrow \exists! \text{ плоскость } \pi : \pi \ni P_o, \pi \perp \vec n$$

Следовательно, ещё один способоб записать уравнение плоскости:

$$(\vec r - \vec r_o, \vec n) = 0$$
$$(\vec r, \vec n) \underbrace{- (\vec r_o, \vec n)}_{D} = 0$$
$$(\vec r, \vec n) = D$$

Линейные неравенства:

Пусть плоскость π задана уравнением:

$(\vec r, \vec n) + D = 0$

Утверждение:

Плоскость π развивает пространство на два полупространства:

Пусть точки $P_1(\vec r_1)$ и $P_2(\vec r_2)$ лежат в разных полупространствах по отношению к заданной плоскости.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$(\vec{r}, \vec{n}) + D = (\vec{r}_1, \vec{n}) + t(\vec{r}_2 - r_1, \vec{n}) + D = f(t)$$

$$\exists\, t: \vec{r} = \vec{r}_1 + t_o(r_2 - r_1) \in \pi, \text{ т.е. } f(t_o) = 0 \quad (P_1, P_2 \notin \text{плоскости}\,\pi)$$

$$f(t) = kt + b \quad (k \neq 0)$$

$$f(t) > f(t_o) = 0 \text{ при } t > t_o f(t) < f(t_o) = 0 \text{ при } t < t_o$$

Различные варианты взаимного расположения плоскостей:

1. $\pi_1 \cap \pi = l \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0$
2. $\pi_1 \parallel \pi \Leftrightarrow kD_1 \neq D_2, [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0 \Leftrightarrow \vec{n}_2 = k\vec{n}_1$

$$\pi_1 = \pi \Leftrightarrow kD_1 = D_2$$

Задание прямой в пространстве как линии пересечения двух плоскостей:

$$\left\{\begin{matrix} \Pi_1: (\vec{r}, \vec{n}_1) = 0 \\ \Pi_2: (\vec{r}, \vec{n}_2) = 0 \end{matrix}\right\} - \text{прямая } l \quad ([\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq 0)$$

Так как $\vec{n}_1 \perp l, \vec{n}_2 \perp l$, то $l \parallel \vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$

Нахождение точки $P_o(\vec{r}_o)$ на прямой l:

$$\vec{r}_o = \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2 \; (\text{либо: } (\vec{r}_o, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0)$$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha(\vec{n}_1, \vec{n}_1) + \beta(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = -D_1 \\ \alpha(\vec{n}_2, \vec{n}_1) + \beta(\vec{n}_2, \vec{n}_2) = -D_2 \end{matrix}\right\}$$

У данной системы существует решение, т.к. $\Delta = |G_{\vec{n}_1, \vec{n}_2}| \neq 0$

Уравнение общего перпендикуляра двух пересекающихся прямых:

Алгебраические линии и поверхности.

Кривые второго порядка.

В некоторой произвольной системе координат линия некоторого порядка будет выражаться как:

$$L = \{(x, y): P(x, y) = 0\}, \text{ где } P(x, y) - \text{многочлен/полином от } x, y.$$

$$P(x, y) = \sum_{i, j \geqslant 0} a_{ij} x^i y^j, \ f_{ij} = 0 \text{ при } i > i_o, \ j > j_o$$

Обозначим через $N = max\{(i + j) \mid i, j: a_{ij} \neq 0\}$ степень иногочлена P.

Приведем пример для $N = 3$:

$$P(x, y) = a_{o,o} + a_{1,o} x + a_{o,1} y + a_{2,1} x^2 y + a_{1,2} xY^2 + a_{3,1} x^3 + a_{o,3} y^3$$

Сокращение: $N = deg\ P(x, y)$

Порядок линии L - наименьшее среди $deg\ P(x, y)$ для уравнений $P(x, y) = 0,$ задающих L.

Теорема:

Порядок алгебраической линии не зависит от выбора декартовой системы координат.

Доказательство:

Пусть $\sum_{i, j > 0}^{k} a_{ij} x^i y^j = 0 -$ уравнение наименьшей степени для L. $(i + j \leqslant N -$ порядок L.$)$

Сделаем замену: $\begin{cases} x = x_o + a_{11} x' + a_{12} y' \\ y = y_o + a_{21} x' + a_{22} y' \end{cases}$

Подставляем в $a_{ij} x^i y^j$, раскрываем скобки, приводим подобные:

$$\rightarrow P_1(x', y') = 0, \ deg\ P_1 \leqslant deg\ P$$

Для того, чтобы доказать, что $deg\ P_1 \geqslant deg\ P$ сделаем обратную замену.

Получим: $\begin{cases} deg\ P_1 \leqslant deg\ P \\ deg\ P \leqslant deg\ P_1 \end{cases} \Rightarrow \ deg\ P_1 = deg\ P$

Линии второго порядка (упрощение уравнения).

Общее уравнение линии второго порядка в произвольной общей декартовой системе координат:

$$(*) L: \ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \ \ (|A| + |B| + |C| \neq 0)$$

Краткая запись уравнения (*):

$$P(x, y) = \underbrace{q(x, y)}_{\text{квадратичная часть}} + \underbrace{2l(x, y)}_{\text{линейная часть}} + F = 0$$

$$A_m = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (x, y) \cdot A_m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$l(x, y) = Dx + Ey$$

Изменение уравнения кривой при переносе начала координат:

$$\begin{cases} x = x_o + x' \\ y = y_o + y' \end{cases}$$

$$P(x', y') = (x_o + x', y_o + y') \cdot A_m \cdot \begin{pmatrix} x_o + x' \\ y_o + y' \end{pmatrix} + D(x + x') + E(y_o + y') + F$$

$$A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + 2(Ax_o + By_o + D)x' + 2(Bx_o + Cy_o + E)y' + P(x_o, y_o) = 0$$

Лемма:

Если (x_o, y_o) — центр симметрии, то:

$$\begin{cases} Ax_o + By_o + D = 0 \\ Bx_o + Cy_o + E = 0 \end{cases} 2(Ax_o + By_o + D)x' + (Bx_o + Cy_o + E)y'$$