Московский физико-технический институт

Дискретный анализ

ФРТК. 1 курс. 1 семестр. 2014-2015 уч. год.

Лектор: Флеров Юрий Арсеньевич

Набрал:
Ломов Артём

Содержание

I Комбинаторика 2

1 Количество отображений и размещений 2

1.1 Задачи комбинаторики . . . 2
1.2 Инъенктивное отображение . . . 3
1.3 Перестановки . . . 3
1.4 Числа Стирлинга первого рода . . . 3
1.5 Упорядоченное размещение различных объектов по различным ящикам . . . 3

2 Монотонные слова 4

2.1 Введение понятия . . . 4
2.2 Пример (задача о разложении числа m в сумму n слагаемых - задача Муавра) . . . 4

3 Число сочетаний 5

3.1 Введение определения . . . 5
3.2 Производящие функции . . . 6
3.3 Свёртка последовательностей . . . 6
3.4 Биномиальные коэффициенты . . . 6
3.5 Размещение при фиксированном количестве объектов в ящике . . . 7
3.6 Задача о размещении n одинаковых объектов по m различным ящикам . . . 8

4 Разбиения 8

4.1 Введение понятия . . . 8
4.2 Разбиение множества X на k классов . . . 8
4.3 Разбиение на произвольное число классов (числа Белла) . . . 10

5 Метод включений-исключений 10

5.1 Введение . . . 10
5.2 Теорема (формула включений-исключений) . . . 11
5.3 Задача о числе беспорядков . . . 11
5.4 Количество сюръективных отображений . . . 11

6 Системы различных представителей 12

II Теория графов 13

7 Введение 13

7.1 Изоморфизм графа . . . 14
7.2 Представление графов в ЭВМ . . . 14
7.3 Степени вершин . . . 15

8 Пути и циклы 15

8.1 Связность . . . 16

9 Деревья 17

9.1 Эквивалентные определения . . . 18

10 Пути и циклы Эйлера 19

11 Гамильтоновы пути и циклы 20

Лекция 1
01.10.2014

Часть I
Комбинаторика

1 Количество отображений и размещений

1. Правило произведения
   объект A можно выбрать n различными способами
   объект B можно выбрать m различными способами
   Количество способов выбрать пару 'A и B' равно nm.

2. Правило суммы
   объект A можно выбрать n различными способами
   объект B можно выбрать m различными способами
   Тогда выбор 'A или B', при условии, что одновременный A и B невозможен, равен n+m.

1.1 Задачи комбинаторики

1. Задача о количестве отображений $f\colon X \to Y$

$$\forall x \in X \quad f(x) = Y$$

   Задача о подсчете отображений, подчиненным тем или иным условиям.

2. Задача о размещении объектов по ящикам.

$$X = \{1, 2 \dots n\}$$
$$Y = \{1, 2 \dots n\}$$

   Задача о числе размещений.

3. Задача о числе слов в заданном алфавите.

$$A = \{a_1,\ a_2 \dots a_m\}$$

   $x_1 x_2 \dots x_n,\ x_i \in A$ - слово длины n в алфавите из m символов.

   Утверждение: |X|=n, |Y|=m тогда количество произвольных $f\colon X \to Y$ равно m^n.

$$x = 1, 2, \dots n$$
$$\underbrace{f(1)}_{\text{m способов}}\ ,\ \underbrace{f(2)}_{\text{m способов}}\ \dots\ \underbrace{f(n)}_{\text{m способов}}$$

   Всего по правилу произведения m^n.

   Аналогичные конструкции:
   Количество произвольных размещений n различных объектов по m различным ящикам - m^n.
   Количество различных слов длины n в алфавите из m символов - m^n.

1.2 Инъенктивное отображение

Определение: $f: X \to Y$ - инъективно, если различным x_i соответствуют различные y_i.

$$x_i \neq x_j \Rightarrow f(x_i) \neq f(x_j)$$

Для ящиков: не более одного объекта в каждом ящике.

$$[x]_n = x(x-1)\dots(x-n+1) \text{ - 'n факториал от x вниз' или 'нижняя n-ая степень'}$$

Утверждение: Пусть X - конечное множество из n элементов, Y - из m. Тогда количество инъективных отображений $f: X \to Y$ равно $[m]_n$.
Доказательство:

$$\begin{aligned}
&x = 1, 2, \dots n \\
&f(1) && m \text{ способов} \\
&f(2) && m-1 \text{ способ} \\
&... \\
&f(k) && m-k+1 \text{ способ} \\
&... \\
&f(n) && m-n+1 \text{ способ}
\end{aligned}$$

Если n>m, то $[m]_n = 0$

1.3 Перестановки

Перестановка - взаимнооднозначное отображение множество на себя.
Количество перестановок множества [n] (из n элементов) равно $[n]_n = n!$

1.4 Числа Стирлинга первого рода

$[x]_n = x(x-1)...(x-n+1) = s(n,0) + s(n,1)x + s(n,2)x^2 + ... + s(n,n)x^n,\ s_k$ - числа Стирлинга I рода
s(n,0)=0
s(n,2)=1
...
s(n,k)=0, k<0
s(n,k)=0, k>n

$$\begin{gathered}
[x]_{n+1} = [x]_n(x-n) \\
...s(n+1,k)x^k... = (...s(n,k-1)x^{k-1} + s(n,k)x^k...)(x-n) \\
s(n+1,k) = s(n,k-1) - s(n,k)n
\end{gathered}$$

Утверждение: Числа Стирлига первого рода удовлетворяют следующему рекурсивному соотношению: $s(n+1,k) = s(n,k-1) - s(n,k)n$.

1.5 Упорядоченное размещение различных объектов по различным ящикам

x=1, 2, ..., n - объекты
y=1, 2, ..., n - ящики
Размещаем n объектов по m ящикам, интересуясь последовательностью, в которой в каждом ящике находятся объекты. Это упорядоченное размещение.
Пусть m=2, n=2, перегородок m-1=1

1 2 | 0	2 1 | 0
1 | 2	2 | 1
0 | 1 2	0 | 1 2

Упорядоченных размещений 2-х объектов по 2-м ящикам - 6.

$[x]^n = x(x+1)\dots(x+n-1)$ - 'n факториал от х сверху' или 'верхняя n-ая степень'

Утверждение: Количество упорядоченных размещений n различных объектов по m различным ящикам равно $[m]^n$.
Доказательство:
Есть m ящиков

$\underbrace{\;|\;\;|\;\;|\cdots|\;\;|\;\;|\;}_{\text{m-1 перегородка}}$

Положить 1-ый объект	$(m-1)+1$ способов
2-ой объект	$(m-1)+2$ способов (с учётом лежащего второго)
...	
n-ый объект	$(m-1)+n$ способов

$m(m+1)...(m+n-1) = [m]^n$

Некоторые формулы:
$[m]^n = [m+n-1]_n$
$[m]^n = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$

Лекция 2
08.10.2014

2 Монотонные слова

2.1 Введение понятия

$A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$
$a_1 < a_2 < \dots < a_n$ - упорядоченные символы алфавита
$x = x_1 x_2 \dots x_n \;\; \forall x_i \in A$
слово x - монотонно если
$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$
Пример: A={a,b,c,d} abbd - монотонно, bacd - не монотонно

Утверждение: количество монотонных слов длины n в алфавите из m символов равно $\frac{[m]^n}{n!}$
Доказательство:
Каждому упорядоченному размещения n объектов по m ящикам поставим в соответствие монотонное слово длиной n в алфавите из m символов.
$\underbrace{5\ 4\ 8|2\ 6|\cdots|1\ 3\ n}_{\text{n-1 перегородка}} \Rightarrow a_1a_1a_1a_2a_2\dots a_ma_ma_m,\;\; a_i$ - столько раз, сколько объектов в ящике i

1. Каждому упорядоченному размещению соответствует единственно монотонное слово.
2. Каждое монотонное слово может быть получено таким образом.
3. Монотонное слово получается из n! упорядоченных размещений $\Rightarrow$ количество монотонных слов в n! раз меньше количества упорядоченных размещений.

Значит количество упорядоченных размещений $\frac{[m]^n}{n!}$

2.2 Пример (задача о разложении числа m в сумму n слагаемых - задача Муавра)

Пусть задано $m \in \mathbb{N}$
$m = u_1 + u_2 + \dots + u_n, u$ - целое число $u_i > 0$

Два разложения, отличающиеся порядком слагаемых - различны.
Подсчитаем количество разложений числа m в сумму n слагаемых.

$$\begin{aligned}
&\sigma_k \text{ - частичная сумма первых k слагаемых}\\
&\sigma_1 = u_1\\
&\sigma_2 = u_1 + u_2\\
&\dots\\
&\sigma_{n-1} = u_1 + ... + u_{n-1}\\
&\sigma_n = m \text{ удаляем его}
\end{aligned}$$

Каждому разложению соответствует единственное слово $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}$

$$\begin{aligned}
&u_1 = \sigma_1\\
&u_2 = \sigma_2 - \sigma_1\\
&\dots
\end{aligned}$$

Количество разложений равно количеству слов $\sigma_1\dots\sigma_{n-1}$

$$\begin{aligned}
&\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\\
&\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \dots \leqslant \sigma_{n-1}
\end{aligned}$$

σ - монотонное слово длины n-1 в алфавите из m+1 символов $\{0, 1 \dots m\} \Rightarrow$ количество разложений n в сумму m $(m > 0,\ m \in \mathbb{Z})$ слагаемых равно $\frac{[m+1]^{n-1}}{(n-1)!}$

3 Число сочетаний

3.1 Введение определения

|X|=n, X n-множество (из n элементов)
k-подмножество - k-элемнтное подмножество множества

Определение: Сочетанием называется k-подмножество n-множества.
Пример: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 1,2 1,3 1,4 2,3 2,4 3,4 - сочетания из n по k
$\binom{n}{k} = C_n^k$ - количество сочетаний из n по k.

Утверждение: количество различных k-подмножеств n-множества (число сочетаний из n по k) равно

$$\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Комбинаторный способ доказательства:
Двумя различными способами подсчитаем число упорядоченных последовательностей из k элементов, которые образованы из n-множества.

1. Выбрали k из n элементов и упорядочили их $\binom{n}{k}k!$
2. n способов выбрать 1-й элемент
   n-1 способов выбрать 2-й элемент
   $\dots$
   n-k+1 способов выбрать k-ый элемент

Всего $n(n-1)\dots(n-k+1) = [n]_k$
Получаем $\binom{n}{k}k! = [n]_k$
$\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!}$

$$\text{Замечание: } \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{[n]_k}{k!}, & 0 \leqslant k \leqslant n\\ 0, & k > n\\ 0, & k < 0\end{cases}$$

Свойства:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Каждому сочетанию из n по k однозначно соответствует подмножество оставшихся n-k элементов.

2. Реккурентное соотношение
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Доказательство:
Все сочетания разобьем на два типа:
T_1 - сочетания, содержащие элемент n
T_2 - сочетания, не содержащие элемент n
$|T_1| = \binom{n-1}{k-1}$ $\quad \underbrace{1\ 2 \ldots n-1}_{\text{из n-1 слагаемых выбрать k-1}}$
$|T_2| = \binom{n-1}{k}$ $\quad \underbrace{1\ 2 \ldots n-1}_{\text{из n-1 слагаемых выбрать k}}$
Множества T_1 и T_2 не пересекаются $T_1 \cap T_2 = \varnothing$
Значит $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

3.2 Производящие функции

$< a >= a_0,\ a_1,\ a_2 \ldots$
Производящей функцией последовательности <a> называется функция $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{k=0} a_k x^k$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad \text{есть производящяя функция последовательности} \qquad 1, 1, 1 \ldots$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad 1, -1, 1, -1 \ldots$$

3.3 Свёртка последовательностей

$$\begin{aligned}
\text{Пусть } A(x) &= \sum_{k=0} a_k x_k \\
B(x) &= \sum_{k=0} b_k x_k \\
C(x) &= \sum_{k=0} c_k x_k \\
C(x) &= A(x) * B(x) \\
c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...) \\
c_0 &= a_0b_0 \\
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 \\
c_2 &= a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 \\
&\ldots \\
c_k &= a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \ldots + a_0b_k \\
c_k &= \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}b_j \text{ - свёртка последовательностей } a_k \text{ и } b_k
\end{aligned}$$

Лекция 3
15.10.2014

3.4 Биномиальные коэффициенты

Производящая функция для последовательности чисел сочетаний $\binom{n}{k},\ k = 0, 1, \ldots n$ равна
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (*)

Пример: $(1+x)^3 = (1+x)(1+x)(1+x) = 1+3x+3x^2+x^3 = \binom{n}{0} + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3$
коэффициент x^k есть количество способов выбрать из n сомножителей выбрать, откуда взять x.
$\binom{n}{k}$ - биномиальные коэффициенты

Примеры:
1. (*), x=1
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

2. дифференцируем (*), x=1
$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

3. (*), x=-1
$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots = 0$
$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^{n-1}$
Если n=4
$\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = \binom{4}{1} + \binom{4}{3}$
Если n=5
$\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}$
В общем случае:
$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k+1}$

4. $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$
Используя свёртку: $\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$
Положим m=k=n
$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Вывод производящей функции для биномиальных коэффициентов через реккурентные соотношения:
$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$
$F_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}x^k$

$$+\begin{cases} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ \binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} \\ \binom{n}{1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} & | * x \\ \cdots \\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & | * x^k \\ \cdots \\ \binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} & | * x^n \end{cases}$$

$F_n(x) = F_{n-1}(x) + xF_{n-1}(x)$
$F_n(x) = (1+x)F_{n-1}(x)$
$F_1(x) = 1 + x$
$F_n(x) = (1+x)^n$

3.5 Размещение при фиксированном количестве объектов в ящике

Теорема: Пусть x, |x|=n - множество различных объектов и $n_1,\ n_2 \ldots n_p$ - неотрицательные целые числа, такие что $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$. Тогда количество размещений n объектов по ящикам $y_1 \ldots y_p$, при условии, что каждый ящик содержит $n_1,\ n_2 \ldots n_p$ объектов соответственно, равно

$$\binom{n}{n_1,\ n_2 \ldots n_p} = \begin{cases} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_p!}, & n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Доказательство:
Сколькими способами можно в первом ящике разместить n_1 объектов: $\binom{n}{n_1}$. Тогда на второй ящик осталось $\binom{n-n_1}{n_2}$. И так далее... Для последнего: $\binom{n_p}{n_p}$
$\binom{n}{n_1} * \binom{n-n_1}{n_2} * ... * \binom{n_p}{n_p} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} * \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} * \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} * ... * \frac{n_p!}{n_p!} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$

Полиномиальная теорема: $(x_1 + x_2 + ... + x_p)^n = \sum\limits_{\substack{n_1...n_p \geqslant 0 \\ n_1+...+n_p=n}} \binom{n}{n_1,\ n_2...n_p} {x_1}^{n_1} {x_2}^{n_2} ... {x_p}^{n_p}$ (**)

Коэффициент при ${x_1}^{n_1} {x_2}^{n_2} ... {x_p}^{n_p}$ равен числу способов выбрать из n сомножителей n_1 сомножителей, из которых в произведение войдет переменная x_1; n_2 сомножителей, из которых в произведение войдет переменная x_2; ...

1. $\sum\limits_{\substack{n_1...n_p \geqslant 0 \\ n_1+...+n_p=n}} \binom{n}{n_1,\ ...,\ n_p} = p^n$

2. $\binom{n}{n_1,\ n_1,...,\ n_p} = \sum\limits_{i:\ n_i \geqslant 1} \binom{n-1}{n_1,\ n_2,...,\ n_{i-1},\ n_i-1,\ n_{i+1},...,\ n_p}$

$(x_1 + ... + x_p)^n = (x_1 + ... + x_p)(x_1 + ... + x_p)^{n-1}$

3.6 Задача о размещении n одинаковых объектов по m различным ящикам

$\bullet \quad \bullet \underbrace{| \bullet \quad \bullet | \cdots | \bullet \quad \bullet |}_{m-1 \text{ перегородка}} \bullet \Longrightarrow \underbrace{\times \quad \times \cdots \times \quad \times}_{m+n-1 \text{ символов}}$

Нужно среди m+n-1 символа выбрать m-1 символ для перегородок: $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$

4 Разбиения

4.1 Введение понятия

Разбиение конечного множества X, |X|=n есть неупорядоченная последовательность $\pi = \{B_1,\ B_2...B_k\}$ подмножеств B_i множества X, такая, что:

1. $B_i \neq \varnothing,\ i = 1...k$
2. $B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j$
3. $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k = X$

Разбиение множества X есть представление X в виде объединения неупорядоченных последовательностей непустых не пересекающихся подмножеств.
B_i - классы (блоки) разбиения

4.2 Разбиение множества X на k классов

Разбиение множества X на k классов $\Longrightarrow$ размещение различных объектов по k одинаковым ящикам.
S(n,k) - количество разбиений n-множества на k классов.
S(n,k) - числа Стирлинга II рода

Пример:
n=4, k=2

$\{1\}\ \{2,\ 3,\ 4\}$	$\{1,\ 2\}\ \{3,\ 4\}$
$\{2\}\ \{1,\ 3,\ 4\}$	$\{1,\ 3\}\ \{2,\ 4\}$
$\{3\}\ \{1,\ 2,\ 4\}$	$\{1,\ 4\}\ \{2,\ 3\}$
$\{4\}\ \{1,\ 2,\ 3\}$	

S(4,2)=7

Лекция 4
22.10.2014

Утверждение 1: Числа Стирлинга II рода удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$$

Доказательство:
T_1 - разбиение, в котором (n+1) элемент единственный в своем классе
$|T_1| = S(n,k-1)$
T_2 - разбиение, в котором (n+1) элемент не является единственным в своем классе
$|T_2| = kS(n,k)$

Определение: Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным, если
$\forall y \in Y\ \exists x \in X :\ f(x) = y$ (отображение на множество).

Утверждение 2: Пусть |X|=n, |Y|=m, тогда количество сюръективных отображений $f : X \to Y$ равно $m! \cdot S(n,m)$.
Доказательство:
Каждому сюръективному отображению соответствует разбиение X на m классов
$B_k = \{x \in X :\ f(x) = y_k\},\ k = 1,\ 2\ldots m$
С другой стороны, каждому разбиению |X|=n на m классов соответствует m! различных сюръективных отображений $\Longrightarrow m! \cdot S(n,k)$

$[x]_n = \sum\limits_{k=0}^{n} s(n,k)\ x^k$ - производящая функция чисел Стирлинга I рода

Утверждение 3: $x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot [x]_k$
Доказательство:
|X|=n, |Y|=m
Рассмотрим произвольные отображения $f : X \to Y$. Их количество - m^n.
Каждое произвольное отображение есть сюръективное отображение на некоторое произвольное подмножество $B \subseteq Y, |B| = k$.
$k! \cdot S(n,k)$
$\binom{n}{k}$ способов выбрать B
Количество отображений - $\sum\limits_{k=0}^{n} k! \cdot S(n,k) \cdot \binom{n}{k}$

Итого: $m^n = \sum\limits_{k=0}^{m} k! \cdot \binom{n}{k} \cdot S(n,k) = \sum\limits_{k=0}^{m} [m]_k \cdot S(n,k) \overset{\substack{\text{т.к. если k>m, то } [m]_k=0 \\ \text{если k>n, то S(n,k)=0}}}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} [m]_k \cdot S(n,k)$.
Полиномиальная аргументация:

$$\underbrace{m^n - \sum_{k=0}^{n} [m]_k \cdot S(n,k)}_{\substack{\text{либо полином тождественно равен нулю} \\ \text{либо выполняется при всех n}}} = 0$$

быть равным нулю он не может $\Longrightarrow\ x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} [x]_k \cdot S(n,k)$

Утверждение 4: $S(n+1,m) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot S(k, m-1)$
Доказательство:
Рассмотрим разбиение множества X={1,2...n+1} на m классов.
Такое разбиение распадается на различные типы, соответствующие подмножествам, содержащим (n+1) элемент.
$B \subseteq X,\ |B| = k$

$(n+1) \subset B$
Количество способов выбрать B равно $\binom{n}{k-1}$
Элементы, не вошедшие в B, разбиваем на (m-1) класс. Их количество - $S(n+1-k, m-1)$.
Пронумеровав по всем k, получим всевозможные разбиения.

$$S(n+1,m) = \sum_{k=1}^{n+1-(m-1)} \binom{n}{k-1} \cdot S(n+1-k, m-1) \overset{n+1-k=r}{=} \sum_{r=m-1}^{n} \binom{n}{r} \cdot S(r, m-1) \overset{\substack{\text{т.к. } S(k,m-1)=0 \\ \text{при } k<m-1}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot S(k, m-1)$$

4.3 Разбиение на произвольное число классов (числа Белла)

Обозначение: $B(n) = B_n$ - количество разбиений на произвольное число классов.
$B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S(n,k),\ B_0 = 1$

Утверждение: $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B(k)$

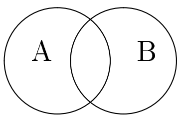
Доказательство:
Предположим, что элемент (n+1) находится в классе, содержащем n+1-k элементов. Тогда количество способов выбрать остальные элементы равно $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Оставшиеся элементы можно разбить на классы B_k способами $\Longrightarrow B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B(k)$.

5 Метод включений-исключений

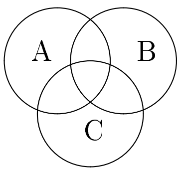
5.1 Введение

Пример 1:



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Пример 2:



$|A \cup B \cup| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$
Пусть N - общее число различных объектов.
$a_1,\ a_2...a_n$ - свойства, которыми могут обладать объекты.
$N(a_1)$ - количество объектов, обладающих свойством a_1
$N(a_2)$
$\dots$
$N(a_n)$
$N(a_1,\ a_2)$ - количество объектов, обладающих свойствами a_1 и a_2, причём $N(a_1,\ a_2) = N(a_2,\ a_1)$
Условимся, что $N(a_i,\ a_j),\ i < j$
$N_0 = N(\bar{a_1},\ \bar{a_2}...\bar{a_n})$ - количество объектов, не обладающих ни одним из свойств.

5.2 Теорема (формула включений-исключений)

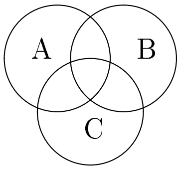
$N_0 = N(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2...\bar{a}_n) = N - \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} N(a_i) + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} N(a_i,\ a_j) - \sum\limits_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} N(a_i,\ a_j,\ a_k) + ... + (-1)^n \cdot N(a_1,\ a_2...a_n)$

Лекция 5
29.10.2014

Доказательство:
$N(\bar{a}_1) = N - N(a_1)$
$N(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2...\overline{a_{n-1}}) = N - \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} N(a_i) + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} N(a_i,\ a_j) - ... + (-1)^{n-1} \cdot N(a_1,\ a_2...a_n)$
Для $N = N(a_n)$
$N(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2...\overline{a_{n-1}},\ a_n) = N(a_n) - \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} N(a_i,\ a_n) + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} N(a_i,\ a_j,\ a_n) - ... + (-1)^n \cdot N(a_1,\ a_2...a_n)$

$N(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n) = N(\bar{a}_1, ..., \overline{a_{n-1}}) - N(\bar{a}_1, ..., \overline{a_{n-1}},\ a_n)$

$N(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n) = N - \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} N(a_i) + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} N(a_i,\ a_j)$



$a_1 : x \in A$
$a_2 : x \in B$
$a_3 : x \in C$
$N(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3) = 0 = |A \cup B \cup C| - \{|A| + |B| + |C|\} + \{|A \cap C| + |A \cap B| + |B \cap C|\} - |A \cap B \cap C|$

5.3 Задача о числе беспорядков

$a_1,\ a_2, ..., a_n$ - перестановка n-множества
$a_1,\ a_2, ..., a_n$ - беспорядок: $a_i = i \quad i = \{1,\ 2, ...,\ n\}$
Перестановка $b_1, ..., b_n$ обладает свойством a_i, если $b_i = i$.
$a_1, ..., a_n$
$a_{i1},\ a_{i2}, ..., a_{ik}$
$N(a_{i1},\ a_{i2}, ..., a_{ik}) = (n-k)!$ (k элементов стоят на своих местах)
Определение: D(n) - количество беспорядков среди перестановок n-множества
$D(n) = N(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n) = n! - (n-1)!\binom{n}{1} + \binom{n}{2}(n-2)! - ... + (-1)^n\binom{n}{n} = n!(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}) =]\frac{n!}{e}[$ - ближайшее целое к $\frac{n!}{e}$
$D(n+1) = n!(n+1)(1 - 1 + 1/2 - 1/6 + 1/24 - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!})$
$D(n+1) = (n+1)D(n) + (-1)^{n+1}$

n перестановки:
1. элемент 1 на 1-ом месте, 1 стоит на i месте $(n-1) \cdot D(n-2)$
2. элемент i на 1-ом месте, 1 не на i месте $(n-1) \cdot D(n-1)$
D(n)=(n-1)[D(n-2)+D(n-1)]

5.4 Количество сюръективных отображений

Теорема 2: |X|=n, $Y = \{y_1, ..., y_m\}$
Количество сюръективных отображений $f : X \to Y$ равно

$$F(n, m) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

Доказательство:
Отображение $f : X \to Y$ обладает свойством a_i, если $y_i \notin f(X)$
$(a_{k1}, ..., a_{kp})$ - набор свойств
$N(a_{k1}, ..., a_{kp}) = (m-n)^n$
$F(n,m) = N(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m) = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - ... = \sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$
Следствие:
$S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$

Лекция 6
05.11.2014

6 Системы различных представителей

Система множеств:
$S : S_1,\ S_2, ..., S_n, \quad S_i \in S, \quad i \in \{1, ..., n\}$
система различных представителей (СРП) - $(a_1,\ a_2, ..., a_n), \quad a_i \in S_i, \quad a_i \neq a_j$ при $i \neq j$
Пример:
$S_1 = \{1,2,3,4\} \quad S_2 = \{1,2,5\} \quad S_3 = S_4 = \{2,5\}$
СРП: (3,1,2,5), (4,1,5,2)

Обозначения:
$S(a_i)$ - множество, представителем которого является a_i
$\Pi(S_i)$ - элемент, являющийся представителем множества S_i

Критерий существование СРП: СРП множества $S_1,\ S_2...S_n$ существует тогда и только тогда, когда выполнено условие С:
Условие С: Любые k множеств из $S_1...S_n$ имеют не менее k различных элементов. $|S_{i1} \cup S_{i2} \cup ... \cup S_{ik}| \geqslant k, \kappa = 1, ..., n$
Доказательство (необходимости):
Пусть СРП существует: $(a_1,\ a_2, ..., a_n)$ - СРП для $S_1...S_n$. Любые k элементов из системы различных представителей являются k различными элементами объединения k множества, откуда они взяты.
Доказательство (достаточности):

множества: S_1	S_2	S_3	...	S_n
представители: $a_1 \in S_1$	$a_2 \in S_2$	...	...	или $a_n \in S_n, a_n \neq a_i,\ i = 1...n$
	$a_2 \neq a_1$			или $S_r = \{b_1, b_2, ..., b_t\}$,
				b_i использованы как представители $S_1...S_{n-1}$

Нужно найти среди множеств $S_1...S_{n-1}$ элемент, не являющийся представителем.
$T_0 = \{b_1, b_2, ..., b_t\}$
$T_1 = S(b_1) \setminus T_0 \quad T_0 = T_0 * T_1 = \{\underbrace{b_1...b_t}_{T_0}, \underbrace{b_{t+1}...b_n}_{T_1}\}$
$T_2 = S(b_2) \setminus T_0 \quad T_0 = T_0 * T_2$
...
$T_i = S(b_i) \setminus T_0 \quad T_0 = T_0 * T_i$
Может быть два случая окончание процесса:

1. $T_0 = \{b_1,\ b_2, ..., b_v\}$
   Последовательность исчерпывается представителями множеств. По построению в последовательности содержатся все элементы v множеств.
   Добавим множество S_r, получим v+1 множество, содержащее v различных элементов. Условие С

нарушено.
Пример:
$S_1\{1\}\ S_2\{2\}\ S_3\{1,2\}$
$T_0 = (1,2)$ СРП не существует

2. Найден элемент b_i, не являющийся представителем $i > t,\ b_i \in S_j,\ j < r$
$b_{i(1)} \in S_{j(1)}$ Но представитель множества $S_{j(1)} - b_{i(2)},\ i(2) < i(1),\ i(2) > t$
$b_{i(2)} \in S_{j(2)}$ Но представитель множества $S_{j(2)} - b_{i(3)},\ i(3) < i(2),\ i(3) > t$
$\ldots$
$b_{i(m-1)} \in S_{j(m-1)}$ Но представитель множества $S_{j(m-1)} - b_{i(m)},\ i(m) < i(m-1),\ i(m) < t$

множества:	$S_{j(1)}$	$S_{j(2)}$	...	$S_{j(m-1)}$
представители:	$b_{i(2)}$	$b_{i(3)}$	...	$b_{i(m)}$, уже не является представителем
новые представители:	$b_{i(1)}$	$b_{i(2)}$	...	$b_{i(m-1)}$

$b_{i(m)}$ - представитель S_r
Пример:

	$S_1 = \{1,2\}$	$S_2 = \{2,3\}$	$S_3 = \{3,4\}$	$S_4 = \{5,2\}$	$S_5 = \{4,6\}$	$S_6 = \{1,5\}$
СРП:	1	2	3	5	4	$*$

$T_0 = \{\underbrace{1,\ 5,}_{S_6}\underbrace{\ 2,}_{S_1}\underbrace{\ 3,}_{S_2}\underbrace{\ 4,}_{S_3}\underbrace{\ 6}_{S_5}\}$
$T_1 = S(1) \setminus T_0 = \{2\}$
$T_2 = S(5) \setminus T_0 = \{\}$
$T_3 = S(2) \setminus T_0 = \{3\}$
$T_4 = S(3) \setminus T_0 = \{4\}$
$T_5 = S(4) \setminus T_0 = \{6\}$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
СРП:	1	2	3	5	4	$*$
СРП:	2	3	4	5	6	1

$S_1,\ S_2, ..., S_m$ - удовлетворяет критерию существования СРП
$|S_i| \geqslant t$ - каждое множество состоит не менее, чем из t элементов.
Если t<m, то существует t! систем различных представителей.
Если $t \geqslant m$, то существует $\frac{t!}{(t-m)!}$ систем различных представителей.

Лекция 7
12.11.2014

Часть II
Теория графов

7 Введение

Граф G - совокупность двух множеств: V - множества вершин и E - множества рёбер.
G=<V,E>

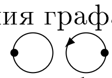
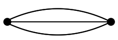
E состоит из пар <x,y>:
$E = \{< x, y >$ - упорядоченная пара $\mid x, y \in V\}$ (для ориентированного графа);
$E = \{< x, y >$ - неупорядоченная пара $\mid x, y \in V\}$ (для неориентированного графа).

Граф **ориентированный**, если все ребра ориентированы.
Граф **неориентированный**, если все ребра не ориентированы.
Ориентированное ребро: <x,y> ребро исходит из вершины x и выходит в вершину y.
Неориентированное ребро: x,y. x y
Обычное (неизвестное) ребро: (x,y). x y

Пусть e=(x,y) - ребро графа G.
1.) вершины x,y **инцидентны** ребру e;
2.) ребро e **инцидентно** вершинам x и y.

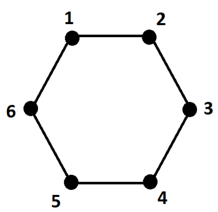
Две вершины **смежны**, если они инцидентны одному ребру.
Два ребра **смежны**, если они инцидентны одной вершине.
Изолированные вершины - вершины, не инцидентные никакому ребру.

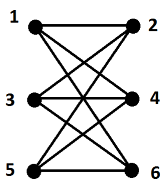
Полный граф - любые две вершины смежны.
U_n - полный неориентированный граф с n вершинами. Его количество рёбер m равно $\binom{n}{2}$.
$U_n^{(d)}$ - полный ориентированный граф с n вершинами. $m = 2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1)$

Расширения графа:
1.) Петли 
2.) Кратные ребра 

Неориентированный граф называется **простым**, если он не содержит петель и кратных рёбер.

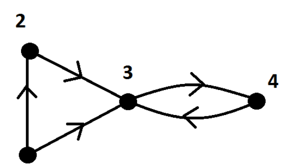
7.1 Изоморфизм графа





Пусть есть G=<V,E> и G'=<V',E'>
Графы G и G' **изоморфны**, если можно установить взаимнооднозначное соответствие вершин, такое что, если есть ребро (x,y) в одном графе, то есть ребро (x',y') в другом графе.
$\varphi: \ V \Leftrightarrow V'$
$\varphi(V) = V'$
Если $\varphi(x) = x', \ \varphi(y) = y'$, то $(x, y) \in E \Leftrightarrow (x', y') \in E'$

7.2 Представление графов в ЭВМ



1 способ [Матрица инцидентности]:

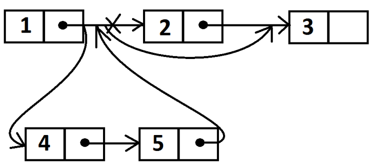
G=<V,E>, |V|=n, |E|=m
I(G): n строк - вершины, m столбцов - ребра
$< x, y >\in E$
-1 - вершина, откуда исходит ребро
1 - вершина, куда входит ребра

	$<1,2>$	$<1,3>$	$<2,3>$	$<3,4>$	$<4,3>$
1	-1	-1	0	0	0
2	$+1$	0	-1	0	0
3	0	$+1$	$+1$	-1	$+1$
4	0	0	0	$+1$	-1

2 способ [Матрица смежности (вершин)]:
B(G)
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & < i, j >\in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	0	1	0

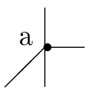
3 способ [Списки инцидентности]:
1: 2 3
2: 3
3: 4
4: 3

Хранение в памяти ЭВМ в виде списка: 

7.3 Степени вершин

G=<V,E> - неориентированный граф
$a \in V$ $\quad \rho(a)$ - **степень вершины** - количество инцидентных вершине ребер

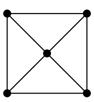
$\rho(a) = 0$



$\rho(a) = 4$

$\sum\limits_{a\in V} \rho(a) = 2m,\ m = |E|$

Утверждение: В конечном графе количество вершин нечетной степени чётно.
(4,3,3,3) - не существует (в скобках степени вершин графа)
(4,3,3,3,3) - существует:



8 Пути и циклы

G=<V,E>
Путем в графе G называется последовательность вершин $S =< a_0,\ a_1, ..., a_n >$

$(a_i,\ a_{i+1}) \in E \quad i = 0, ..., n-1$
Пусть путь называется **простым**, если все ребра и вершины, кроме, быть может, первой и последней, различны.
Цикл - простой путь, у которого начальная и конечная вершины совпадают.
$a_0 = a_n$
Минимальная длина цикла в простом графе - 3.

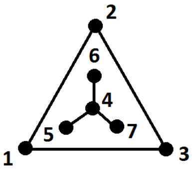
Лекция 8
19.11.2014

Утверждение 2: Если в графе G существует две различных (u,v)-пути, то граф обладает простым циклом.

Утверждение 3: Пусть C_1 и C_2 - два простых цикла, имеющих общее ребро e. Тогда граф $C_1 \cup C_2 - e$ - имеет цикл.
Доказательство:
e=(u,v)
$C_1 - e,\ C_2 - e$ - два простых различных (u,v)-пути. По утв.2 $C_1 \cup C_2 - e$ - имеет цикл.

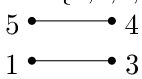
8.1 Связность

G=<V,E> - неориентированный граф
$a, b \in V$ **связаны**, если существует (a, b) - путь
$V = \cup_i\ v_i,\ v_i$ - все вершины, связанные друг с другом
Пример:

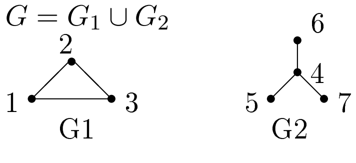


$V_1 = \{1, 2, 3\}$
$V_2 = \{4, 5, 6, 7\}$

G=<V,E> - граф
$V' \subset V$ - подмножество вершин V
G' порождённый множеством вершин V' есть **подграф** G, если G'=<V',E'>,
V' - порождающее множество вершин
E' - все ребра E, соединяющие вершины V'
Пример:
V'={1,3,5,4}



$G_i =< V_i, E_i >$ - подграф, порожденный множеством вершин V_i
G_i - связный граф
$G = \cup_i\ G_i,\ G_i$ - **связанные компоненты** (компоненты связности) графа G
Пример:
$G = G_1 \cup G_2$

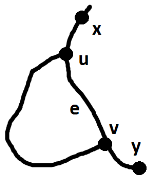


Теорема 4: G=<V,E> - простой неориентированный граф с n вершинами и k компонентами связности. Тогда максимальное количество ребер в таком графе G есть

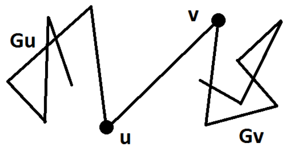
$$N(n,k) = \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)$$

Доказательство:
$G = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_k,\ G_i$ - компоненты связности
Максимальное количество ребер соответствует полному графу $G_i - \binom{n_i}{2}$ Пусть есть два графа G_1 и G_2, $n_1 > n_2$
Тогда заменим G_1 и G_2 на $G_1' : n_1' = n_1 + 1,\ G_2' : n_2' = n_2 - 1$. Число ребер увеличится.
Следовательно, число ребер будет максимальным при k-1 изолированной вершине и полном графе с n-k+1 вершинами.
$N(n,k) = \binom{n-k+1}{2}$
$m \leqslant \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k),\ m$ - количество ребер

Утверждение 5: Пусть G - связный граф, e - ребро графа. Тогда
1) если e входит в цикл, то граф G-e связен
2) если e не входит ни в какой цикл, то граф G-e имеет ровно 2 компоненты связности.
Доказательство:
1) $e = (u,v) \in G$



В каждом (x,y)-пути, содержащем ребро e заменим e на (u,v)-путь. Удалим ребро e. Граф G-e остался связным.
2) Если ребро e=(u,v) не принадлежит ни к одному циклу, то $G = G_u \cup G_v$

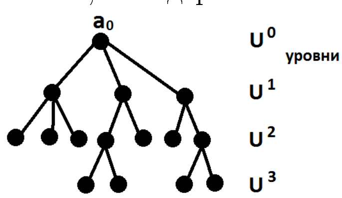


(x,u)-путь
Если $e \notin (x,u)$, то $x \in G_u$. В противном случае $x \in G_v$
G-e содержит две компоненты связности G_u и G_v.

Утверждение 6: G - (n,m)-граф, имеющий k компонент связности. Тогда $m \geqslant n - k$
Доказательство:
Индукция по m
Б.и. m=0 ⇒ n=k
И.ш. Пусть для m-1 это выполняется.
$e \in G$, рассмотрим граф G-e
Согласно утв.5 количество компонент связности графа G-e равно k или k+1.
$m - 1 \geqslant n - k + 1$
$m \geqslant n - k$

9 Деревья

Определение: Неориентированный граф - **дерево**, если он связен и не имеет циклов.
T=<V,E> - дерево



Любое нетривиальное дерево содержит по крайней мере две концевые вершины ($\rho(a) = 1$) и одно концевое ребро (a,b) (инцидентное концевой вершине), $\rho(b) = 1$.

T - (n,m)-дерево, m=m-1

9.1 Эквивалентные определения

Теорема 7: Для (n,m)-графа следующие определения эквивалентны:

1. G-дерево
2. G - связный граф и m=n-1
3. G - ацикличный граф и m=n-1
4. Любые две вершины соединены единственным простым путем
5. G - ациклическтй граф, такой что, если любую пару вершин соединить ребром, то такой граф будет содержать ровно один цикл.

Лекция 9
26.11.2014

Доказательство:
$1 \Rightarrow 2$ уже доказано ранее

$2 \Rightarrow 3$ Граф связан, то m=n-1 $\Rightarrow$ граф не имеет циклов. Предположим противное, e - ребро цикла. G-e - связен (утв.5) и имеет n-2 ребра - противоречие утв.6.

$3 \Rightarrow 4$ Предположим, граф G имеет k компонент связности.
$T_i - (n_i, m_i)$ - граф $T_i \Rightarrow$ дерево
n-1=m=$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + ... = n - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$ G связан$\Rightarrow$ любые две вершины соединены путем.
Путь единственный: если их два, то их объединение содержит цикл (утв.2).

$4 \Rightarrow 5$ Пара вершин принадлежащих циклу связана двумя различными путями. Следовательно, G - ациклический граф.
Пусть $u, v \in V,\ (u, v) \notin E$
G+(u,v) в G есть простой (u,v)-путь, следовательно получим цикл. Полученный цикл единственный. Если их больше, то был цикл в исходном графе G.

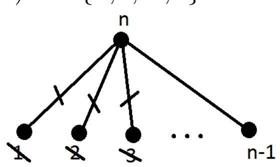
$5 \Rightarrow 1$ Нужно доказать, что граф связен.
Пусть $u, v \in V$ - две вершины, принадлежащие различным компонентам связности. Соединим их ребром e=(u,v)
G+(u,v) не имеет циклов, что противоречит п.5

Теорема 8: Количество различных деревьев со множеством вершин V={1,2...n} равно $t_n = n^{n-2}$
Доказательство:
V=(1,2,...,n) (1)
$T \Leftrightarrow G(T)$ - последовательность вершин (2)
T
Находим первую в (1) концевую вершину T b_1
$e_1 = (b_1, a_1)$ - соответствующее ей концевое ребро.
Помещаем a_1 в список (2). Удаляем b_1 из (1), ребро e_1 и вершину b_1 из T.
$T \Rightarrow T_1$
T_1
Находим первую в (1) концевую вершину T_1 b_2
$e_2 = (b_2, a_2)$ - соответствующее ей концевое ребро.
Помещаем a_2 в список (2). Удаляем b_2 из (1), ребро e_2 и вершину b_2 из T_1.

$T_1 \Rightarrow T_2$
$\dots$
$e_{n-2} = (b_{n-2}, a_{n-2})$
$e_{n-1} = (b_{n-1}, a_{n-1})$
В G(T) вершина a входит $\rho(a) = 1$ раз. По дереву T G(T) строится однозначно.

$G(T) \Rightarrow T$
Ищем первую в (1) вершину, которой нет в G(T). Добавляем в T ребро $e_1 = (a_1, b_1)$. Удаляем b_1 из (1) и a_1 из G(T).
$\dots$
$T \Leftrightarrow G(T)$
Количество различных деревьев равно количеству различных последовательностей G(T). G(T) - слово, длины n-2 в алфавите из n символов. Количество слов n^{n-2}. Следовательно, количество деревьев $t_n = n^{n-2}$

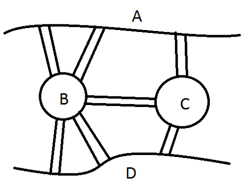
Пример:
1) V={1,2,...,n}

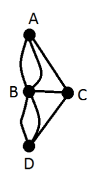


$G(T) = < \underbrace{n, n, ..., n}_{\text{n-2 раза}} >$
$e_1 = (1, n)$
$e_2 = (2, n)$
$\dots$
$e_{n-2} = (n-2, n)$
$e_{n-1} = (n-1, n)$ - остается

2) V={1,2,...,n}
$G(T) = < 2, 3, ..., n-1 >$
$e_1 = (1, 2)$
$e_2 = (2, 3)$
$\dots$
$e_{n-2} = (n-2, n)$
$e_{n-1} = (n-1, n)$ - остается

10 Пути и циклы Эйлера

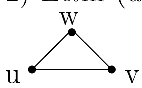




G - неориентированный граф
Эйлеровым путем в графе называется путь, проходящий через каждое ребро графа в точности один раз.
Если начало и конец совпадают, то такой путь называется **эйлеровым циклом**.

Теорема 1: Эйлеров путь в неориентированном графе G существует тогда и только тогда, когда граф связан и имеет не более двух вершин нечётной степени.

Замечание: Рассматриваем графы без изолированных вершин.
u,v - две вершины нечетной степени
1) Если $(u, v) \notin E$, то добавим ребро (u,v)
2) Если $(u, v) \in E$, добавим w и (w,u), (w,v).

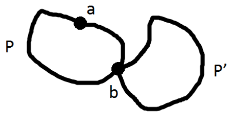


Эйлеровы циклы в пополненном графе находятся в очевидном соответствии с эйлеровыми путями в исходном графе.

Теорема 2: Эйлеровы циклы в неориентированном графе существуют тогда и только тогда, когда
1) граф связан
2) все вершины графа имеют четную степень
Доказательство теоремы 1 следует из теоремы 2.

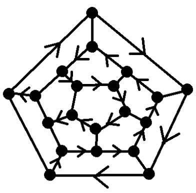
Лекция 10
03.12.2014

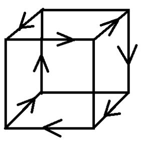
Алгоритм построение Эйлерова цикла
G=<V,E>, $a \in V$
Строим путь P, начиная в a, проходя каждый раз через новые ребра. Путь закончится в вершине a. Если P проходит не через все ребра, то, в силу связности, существует вершина b, инцидентная ещё не пройденному ребру, то входящая в путь P. Из графа G удалим все ребра пути P. G' - оставшийся граф. Начнём из b строить новый путь P' в графе G'. P' закончится в b.
$P_1 = P(a, b) \cup P'(b, b) \cup P(b, a)$



11 Гамильтоновы пути и циклы

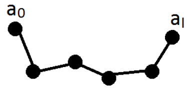
G - простой граф
Гамильтоновым путем (циклом) в графе называется простой путь (цикл), который проходит через каждую вершину графа.



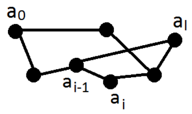


G=<V,E> - простой неориентированный граф $P = (a_0, a_1, ..., a_l)$ - простой путь в G
$G_0 =< V_0, E_0 >$ - подграф G
$V_0 = \{a_0, a_1, ..., a_l\}$
$E_0 = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V_0\}$

Путь P имеет тип цикла, если подграф G_0 имеет гамильтонов цикл.
P - гамильтонов путь в G_0
1)



$(a_0, a_l) \in E \Rightarrow (a_0, a_l) \in E_0$
2)



$(a_0, a_i) \in E_0$
$(a_l, a_{i-1}) \in E_0$
$\rho_0(a_0) + \rho_0(a_l) > l$
$\rho_0(a_0) + \rho_0(a_l) \geqslant l + 1 \Rightarrow \exists$ в G_0 гамильтонов цикл
Простой путь P - полный, если его нельзя продолжить, добавляя ребра к его концу. Если P - полный путь, то $\rho_0(a_0) = \rho(a_0)$ и $\rho_0(a_l) = \rho(a_l)$.

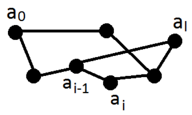
Теорема 1: Полный простой путь длины l имеет тип цикла, если $\rho(a_0) + \rho(a_l) \geqslant l + 1$. Максимальный простой путь - полный путь максимальной длины в G.

Теорема 2: Максимальный простой путь в связном графе может иметь тип цикла тогда и только тогда, когда граф имеет гамильтонов цикл.
Доказательство:
1) Пусть граф имеет гамильтонов цикл, составляющий весь граф. Тогда он и есть искомый путь.
2) Пусть G_0 имеет гамильтонов цикл, но G_0 не составляет всего графа. Тогда $\exists$ ребро (a, b), $b \in V_0$ в силу связности графа. Можно построить больший путь. Противоречие с максимальностью пути.

Теорема 3: В связном графе либо существует гамильтонов цикл, либо длины его простых путей удовлетворяет неравенству:
$$l \geqslant \rho(a_0) + \rho(a_l)$$

Теорема 4: Если в графе G с n вершинами для любой пары вершин верно $\rho(a_0) + \rho(a_l) \geqslant n - 1$, то существует гамильтонов путь. Если $\rho(a_0) + \rho(a_l) \geqslant n$, то существует гамильтонов цикл.
Следствие: Если $\rho(a) \geqslant n/2 \forall a \in V$, то существует гамильтонов цикл.

$\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant ... \leqslant \rho_n$ - степенная последовательность вершин графа
Граф со степенной последовательностью является гамильтоновым, если $\rho(k) \leqslant k \Rightarrow \rho(n-k) \geqslant n - k$.
Любой простой граф, содержащий две вершины степени 3, соединенных тремя непересекающимися простыми путями, длины не менее 2 - **Θ-граф**.



Будем называть граф двусвязным, если наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу, равно двум.

Теорема: Каждый негамильтонов двусвязный граф содержит Θ-подграф.