Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2008/2009 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.④ Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-i$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 1-i$:

$$f(z) = \frac{(2i+1)z-1-3i}{z^2-(2+i)z+1+i} + \frac{z}{z-1-i}.$$

Указать границы кольца сходимости.

2.④ Найти и исследовать все особые точки функции:

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{z}\right)}{(z^2-1)(1-\cos\pi z)}.$$

Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z-2)^3}{z-4}\cdot\sin\left(\frac{1}{2-z}\right)dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2)\cos(3-x)}{x^2-2x+2}\,dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt[4]{x-1}\cdot(x^2+3)}\,dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{2z^4-2z^2}\right\}$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ такая, что $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/2}$. Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\cos\frac{1}{z}}{g(z)+iz}\,dz.$$

7.④ **(только для 6 факультета).** Найти какое-нибудь конформное отображение $w = f(z)$ области $D = \{z = x+iy\colon\ x>0,\ y>0,\ 1<xy<4\}$ на единичный круг $\{w\colon\ |w|<1\}$ такое, что $f(2+i) = 0$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 81

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2008/2009 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.④ Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-1-i$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0=-1$:

$$f(z)=\frac{z^3}{z^2+4}-\frac{4i}{z^2+2iz}.$$

Указать границы кольца сходимости.

2.④ Найти и исследовать все особые точки функции:

$$f(z)=\frac{(z^2+2z-3)\sin\frac{\pi}{z}}{1+\cos\pi z}.$$

Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3**, **4**, **5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{z^3\cdot e^{\frac{1}{z-1}}}{1+z}\,dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-3)\sin(2-x)}{x^2-2x+2}\,dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{-2}^{-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{z^4-3z^2}\right\}$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ такая, что $g(2)=\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/2}$. Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=\frac{9}{5}}\frac{z^2+z+1}{z(g(z)+i\sqrt{2})}\,dz.$$

7.④ **(только для 6 факультета).** Найти конформное отображение $w=f(z)$ внешности дуги окружности $\left\{z=e^{i\varphi}:\ \varphi\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]\right\}$ на внутренность единичного круга $\{w:\ |w|<1\}$ такое, что $f(0)=0$ и $f(1)=1$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 82

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2008/2009 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-2i$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = -2 - i$:

$$f(z) = \frac{(i+1)z - 2i}{z^2 - (4+2i)z + 4 + 4i} + \frac{z}{z-2-2i}.$$

Указать границы кольца сходимости.

2.④ Найти и исследовать все особые точки функции:

$$f(z) = \frac{\sin\frac{\pi}{z} + 1}{(3z^2 + z - 2)(1 - \cos(2\pi z))}.$$

Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{z-i}{z+2i} \cdot \sin\left(\frac{z+i}{z-i}\right) dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos(3-x)}{x^2 - 4x + 5}\, dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{\ln(x+1) \cdot \sqrt[4]{x+1}}{x^2 + 4x + 4}\, dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{2z^4 - 8z^2}\right\}$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-2;2]$ такая, что $g(-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/2}$. Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=\sqrt{7}} \frac{e^{1/z^2}}{g(z) + iz}\, dz.$$

7.④ **(только для 6 факультета).** Найти какое-нибудь конформное отображение $w = f(z)$ области $D = \{z = x + iy\colon\ x > 0,\ y > 0,\ xy < 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w\colon\ \operatorname{Im} w > 0\}$ такое, что $f(1+i) = 0$, $f(1) = 1$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 83

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2008/2009 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-3$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = -4$:

$$f(z) = \frac{2z^3}{z^2-9} + \frac{9i}{z^2-(6+i)z+9+3i}.$$

Указать границы кольца сходимости.

2.④ Найти и исследовать все особые точки функции:

$$f(z) = \frac{(2z^2-z-3)\left(\cos\frac{\pi}{z}-1\right)}{1+\sin\pi z}.$$

Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{z^3+z}{z-1}\cdot \operatorname{ch}\left(\frac{1}{z+1}\right) dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3)\sin(1-x)}{x^2-4x+5}\, dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_0^1 \frac{x\cdot\sqrt[3]{x(x+1)^2}}{x^2+1}\, dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{z^4-z^2}\right\}$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ такая, что $g(\sqrt{2}) = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\pi/2}$. Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=\frac{4}{3}} \frac{z^2+\sqrt{2}z+1}{z(g(z)+i\sqrt[4]{2})}\, dz.$$

7.④ **(только для 6 факультета).** Найти конформное отображение $w = f(z)$ внешности полуокружности $\left\{z = e^{i\varphi} : \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ на внутренность единичного круга $\{w : |w| < 1\}$ такое, что $f(0) = 0$, $f(i) = i$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 84

Вариант №1.

№1. Ответ: $f(z) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[(1-i)^{-n-1} + (1+3i)\right](z-i)^n$

сх. при $|z-i| > \sqrt{2}$.

$\left(f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2i}{z-1-i} + 1 + \frac{1+i}{z-1-i} = \frac{1}{t-1+i} + 1 + \frac{1+3i}{t-1}\right)$

№2. Ответ: $z=0$ – сот; $z=\pm 1$ – уот, $z=\pm 2$ – полюса 1 пор., $z=2k$, $k \neq \pm 1$ – полюса 2 порядка, ∞ – неизол. ос. т.

№3. Ответ: $\oint = 2\pi i \left(8\sin\frac{1}{2} - \frac{23}{6}\right)$

$\left(\oint = -2\pi i\left(\underset{4}{\text{res}}\, f + \underset{\infty}{\text{res}}\, f\right),\ \underset{4}{\text{res}}\, f = -8\sin\frac{1}{2},\ \underset{\infty}{\text{res}}\, f = \frac{23}{6}\right)$

№4. Ответ: $\int_{-\infty}^{\infty} = \pi e^{-1}(\sin 2 - \cos 2)$

$\left(I = \text{Re}\left(2\pi i \frac{(-1+i)e^{-1-2i}}{2i}\right)\right)$

№5. Ответ: $I = \frac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{-\frac{1}{4}}\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-2)\right]$

$\left(I(1+i) - 2\pi\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x^2+2x+4)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 2^{-1/4}\left[ie^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\ln 2 + i\frac{4\pi}{3}\right) - ie^{-i\frac{\pi}{6}}\left(\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right)$.

№6. Ответ: $I = 2\pi\left(4\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}-1}\right)$

$\left(I = -2\pi i\left(\underset{\sqrt{2}}{\text{res}}\, f + \underset{-\sqrt{2}}{\text{res}}\, f + \underset{\infty}{\text{res}}\, f\right),\ f = \frac{\cos\frac{1}{z}}{g(z)+iz},\right.$

$\left. g(-\sqrt{2}) = i\sqrt{2},\ \underset{\sqrt{2}}{\text{res}}\, f = \underset{-\sqrt{2}}{\text{res}}\, f = 2i\cos\frac{1}{\sqrt{2}},\ \underset{\infty}{\text{res}}\, f = -\frac{i}{\sqrt[4]{2}-1}\right)$.

№7. Ответ: Отображение из семейства

$$w = \frac{e^{\frac{\pi z^2}{6} - \frac{\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{3}}}{e^{\frac{\pi z^2}{6} - \frac{\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{3}}},\ e^{i\beta} = \frac{e^{\frac{\pi z^2}{6}} - e^{\frac{\pi}{2} + i\frac{2\pi}{3}}}{e^{\frac{\pi z^2}{6}} - e^{\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{i\alpha},\ \alpha \in [0, 2\pi).$$

$\left(w_1 = z^2,\ w_2 = w_1 - 2i,\ w_3 = \frac{\pi}{6}w_2,\ w_4 = e^{w_3},\ w = \frac{w_4 - w_0}{w_4 - \overline{w_0}},\right.$

$\left. 2+i \to 3+4i \to 3+2i \to \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{3} \to w_0 = \exp\left(\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{3}\right)\right)$