Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2004/2005 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $z+i$ функцию

$$f(z) = \frac{(i-2)z-2}{2iz^2-(6+i)z+3}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = i-1$. Указать границы кольца сходимости.

2.⑤ Исследовать особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^2+\pi^2}{\operatorname{sh} z}\left(\exp\left(\frac{\pi}{2z}\right)-e\right)\operatorname{tg} z.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

3.⑤ $$\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{(2z-1)^2}\,dz.$$

4.④ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(1-2x)}{x-4+\frac{5}{x}}\,dx.$$

5.⑥ $$\int\limits_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}\,dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{z^2+1}$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \cup\, \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, |z|=1,\ \ 0\leqslant \arg z\leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$, $\gamma_2 = = \left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, \operatorname{Im} z=-1,\ \ \operatorname{Re} z\geqslant 0\right\}$, причем $g(0) = \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)$.
Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+3|=1}\left(\frac{g(z)}{g(z)-2}\right)^2 dz.$$

Заказ -

Тираж - 300

МФТИ - 41

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2004/2005 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $z+1-i$ функцию

$$f(z) = \frac{(1+3i)z+i}{3z^2+(6i-1)z-2i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = 4i-1$. Указать границы кольца сходимости.

2.⑤ Исследовать особые точки функции

$$f(z) = \frac{4z^2+9\pi^2}{\operatorname{ch} z}\left(\exp\left(\frac{z}{z-1}\right)-1\right)\operatorname{ctg} z.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

3.⑤ $$\oint\limits_{\left|z-\frac{2\pi i}{3}\right|=\frac{2\pi}{3}} \frac{z^2+\pi^2}{\operatorname{ch} z+\operatorname{ch} 2z}\,dz\,.$$

4.④ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(1-3x)}{x-2+\frac{5}{x}}\,dx\,.$$

5.⑥ $$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{x^2-4}\,dx\,.$$

6.⑥ Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2 - 1)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1, \quad -\pi \leqslant \arg z \leqslant 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im} z = 0, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 1\right\}$, причем $\operatorname{Im} h(-2i) = 3\pi$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-3i|=\frac{22}{7}} z\left(\frac{h(z)}{h(z)-\pi i}\right)^2 dz.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 42

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2004/2005 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $z-1+i$ функцию

$$f(z) = \frac{(2+2i)z+5}{2z^2+(4-i)z-2i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = 3+2i$. Указать границы кольца сходимости.

2.⑤ Исследовать особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^2+\pi^2}{\operatorname{sh} 2z}\left(\exp\left(\frac{\pi}{z}\right)-e^2\right)\operatorname{tg}^2 z.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

3.⑤ $$\oint\limits_{\left|z+\frac{3\pi}{8}\right|=\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2z}{(2z+\pi)^2}\,dz.$$

4.④ $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3-2x)}{x+6+\frac{10}{x}}\,dx.$$

5.⑥ $$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^2}}\,dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^2-1}$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \cup\, \gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\; |z|=1,\quad \pi\leqslant\arg z\leqslant 2\pi\right\}$, $\gamma_2 = = \left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\operatorname{Im} z\leqslant -1,\quad \operatorname{Re} z = 0\right\}$, причем $g(2)=\sqrt[4]{3}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-i|=\frac{5}{4}} z\left(\frac{g(z)}{g(z)-\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)}\right)^2 dz.$$

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2004/2005 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $z+2-i$ функцию

$$f(z) = \frac{(i-3)z+4i}{3iz^2+(1+9i)z+3}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = i$. Указать границы кольца сходимости.

2.⑤ Исследовать особые точки функции

$$f(z) = \frac{4z^2+\pi^2}{\operatorname{ch} 3z}\left(\exp\left(\frac{z}{z-2}\right)-1\right)\operatorname{ctg}^2 z.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

3.⑤ $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=1} \frac{(z^2-4)^2}{2\sin\pi z-\sin 2\pi z}\,dz$.

4.④ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(1-4x)}{x+4+\frac{13}{x}}\,dx$.

5.⑥ $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{x^2-9}\,dx$.

6.⑥ Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2+1)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1\cup\gamma_2$, где $\gamma_1 = \left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|z|=1,\quad \frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\frac{3\pi}{2}\right\}$, $\gamma_2 = \left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\operatorname{Im} z=1,\quad \operatorname{Re} z\geqslant 0\right\}$, причем $\operatorname{Im} h(0)=0$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z+3i|=\frac{7}{4}} \left(\frac{h(z)}{h(z)+\pi i}\right)^2 dz.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 44

Семестровая контрольная работа по ТФКП

5 семестр 2004/2005 уч. года

Ответы. Вариант 41.

1.(4) $f(z) = \dfrac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}} + \dfrac{i}{z+3i}, \qquad 2 < |z+i| < +\infty.$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+i\right)^{-k-1} + i\,(-2i)^{-k-1} \right] (z+i)^k .$$

5 **2.(5)** $z = 0$ — существенно особая точка;

$z = \pi k i,\ k \neq 0,\ k \neq \pm 1$ — полюс первого порядка;

$z = \pm\pi i$ и $z = \frac{\pi}{2}$ — устранимая особая точка;

$z = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \neq 0$ — полюс первого порядка

3.(5) $I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{1} f + \operatorname*{res}_{1/2} f \right) = 2\pi i \left(\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{\pi}{4} \right).$

4 **4.(4)** $I = \mathrm{Re}\left(2\pi i \operatorname*{res}_{z=2+i} \dfrac{z\exp(2iz-i)}{z^2-4z+5} \right) = \pi e^{-2}(2\cos 3 - \sin 3)\,.$

5.(6) $I = -\dfrac{52\pi}{9\sqrt{3}}, \quad I\left(1 - \exp\left(\dfrac{2\pi i}{3}\right)\right) = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f = 2\pi i \left(\dfrac{26}{9} \exp\left(\dfrac{\pi i}{3}\right)\right).$

0 **6.(6)** $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{-\sqrt{7}} \left(\dfrac{g}{g-2}\right)^2 = -\dfrac{384\pi i}{7\sqrt{7}}.$

$$g(-\sqrt{7}+w) = 2 + Aw + Bw^2 + O(w^3) = 2 - \frac{\sqrt{7}}{6}w - \frac{w^2}{72} + O(w^3)\,,$$

$$\operatorname*{res}_{-\sqrt{7}} \left(\frac{g}{g-2}\right)^2 = \frac{4}{A^2}\left(A - \frac{2B}{A}\right) = \frac{144}{7}\left(-\frac{\sqrt{7}}{6} - \frac{1}{6\sqrt{7}}\right) = -\frac{192}{7\sqrt{7}}.$$

Семестровая контрольная работа по ТФКП

5 семестр 2004/2005 уч. года

Ответы. Вариант 42.

1.(4) $$f(z) = \frac{\frac{1}{3}}{z - \frac{1}{3}} + \frac{i}{z + 2i}, \quad \frac{5}{3} < |z + 1 - i| < \sqrt{10}\,.$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} - i \right)^{-k-1} (z + 1 - i)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-i)\,(1 - 3i)^{-k-1}\,(z + 1 - i)^k\,.$$

2.(5) $z = 1$ — существенно особая точка;

$z = \pi k,\ k \neq 0$ — полюс первого порядка;

$z = 0$ и $z = \pm\frac{3\pi i}{2}$ — устранимая особая точка;

$z = \frac{\pi}{2}i + \pi k i,\ k \neq 1,\ k \neq -2$ — полюс первого порядка

3.(5) $$I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{\pi i} f + \operatorname*{res}_{\pi i/3} f \right) = 2\pi i \left(\frac{4\pi i}{3} + \frac{16\pi^2}{27\sqrt{3}\,i} \right).$$

4.(4) $$I = -\operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname*{res}_{z=1+2i} \frac{z \exp(3iz - i)}{z^2 - 2z + 5} \right) = -\frac{\pi}{2e^6} (2\cos 2 + \sin 2)\,.$$

5.(6) $$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}} + \sqrt[3]{\frac{3}{16}} - 1 \right).$$

$$I \left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi i}{3} \right) \right) = 2\pi i \left(\operatorname{res} f + \operatorname{res} f + \operatorname{res} f \right) =$$

$$= 2\pi i \left(-\exp\left(-\frac{\pi i}{3} \right) + \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \exp\left(-\frac{\pi i}{3} \right) + \sqrt[3]{\frac{3}{16}} \exp\left(-\frac{\pi i}{3} \right) \right).$$

6.(6) $$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \left[\left(\frac{h(z)}{h(z) - \pi i} \right)^2 z \right] = 2\pi^3 \left(\frac{2}{\pi} + i \right).$$

$$h(z) = \pi i - z^2 - \frac{z^4}{2} + O(z^6)\,,$$

$$\left(\frac{h(z)}{h(z - \pi i)} \right)^2 z = -\frac{\pi^2}{z^3} \left(1 + \frac{2iz^2}{\pi} + O(z^4) \right) \left(1 - z^2 + O(z^4) \right) = -\frac{\pi^2}{z} \left(\frac{2i}{\pi} - 1 \right) + \ldots$$

Семестровая контрольная работа по ТФКП

5 семестр 2004/2005 уч. года

Ответы. Вариант 43.

1.(4) $f(z) = \dfrac{1}{z - \frac{i}{2}} + \dfrac{i}{z+2}, \quad \sqrt{10} < |z - 1 + i| < +\infty\,.$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\left(\frac{3i}{2} - 1 \right)^{-k-1} + i\,(i-3)^{-k-1} \right] (z - 1 + i)^k\,.$$

2.(5) $z = 0$ — существенно особая точка;

$z = \frac{\pi}{2}$ и $z = \frac{\pi k i}{2}$, $k \neq \pm 2$ — полюс первого порядка;

$z = \pm \pi i$ — устранимая особая точка;

$z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \neq 0$ — полюс второго порядка;

3.(5) $I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{-\pi/2} f + \operatorname*{res}_{-\pi/4} f \right) = 2\pi i \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi^2} \right).$

4.(4) $I = \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname*{res}_{z=i-3} \dfrac{z \exp(2iz - 3i)}{z^2 + 6z + 10} \right) = \pi e^{-2}(-3\cos 9 + \sin 9)\,.$

5.(6) $I = -\dfrac{34\pi}{9\sqrt{3}}, \quad I \left(1 - \exp\left(\dfrac{2\pi i}{3} \right) \right) = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f = 2\pi i \left(\dfrac{17}{9} \exp\left(\dfrac{\pi i}{3} \right) \right).$

6.(6) $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \left[\left(\dfrac{g(z)}{g(z) - \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)} \right)^2 z \right] = -40\pi i\,.$

$$g(z) = \exp\left(\frac{\pi i}{4} \right) \left(1 - \frac{z^2}{4} - \frac{3z^4}{32} + O(z^6) \right),$$

$$\left(\frac{g(z)}{g(z) - \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)} \right)^2 z = \frac{16}{z^3} \left(1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4) \right) \left(1 - \frac{3z^2}{4} + O(z^4) \right) = -\frac{20}{z} + \dots$$

Семестровая контрольная работа по ТФКП

5 семестр 2004/2005 уч. года

Ответы. Вариант 44.

1.(4) $f(z) = \dfrac{\frac{1}{3}}{z - \frac{i}{3}} + \dfrac{i}{z+3}, \quad \sqrt{2} < |z + 2 - i| < \dfrac{2}{3}\sqrt{10}.$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} i\,(-1-i)^{-k-1}\,(z+2-i)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)\left(2 - \frac{2i}{3}\right)^{-k-1}(z+2-i)^k.$$

2.(5) $z = 2$ — существенно особая точка;

$z = 0$ и $z = \frac{\pi}{6}i + \frac{\pi k i}{3}$, $k \neq 1$, $k \neq -2$ — полюс первого порядка;

$z = \pm\frac{\pi i}{2}$ — устранимая особая точка;

$z = \pi k$, $k \neq 0$ — полюс второго порядка;

3.(5) $I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_1 f + \operatorname*{res}_2 f\right) = 2\pi i \left(-\dfrac{9}{4\pi} + \dfrac{16}{\pi^3}\right).$

4.(4) $I = -\operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname*{res}_{z=3i-2} \dfrac{z\exp(4iz - i)}{z^2 + 4z + 13}\right) = -\dfrac{\pi}{3e^{12}}(3\cos 9 + 2\sin 9).$

5.(6) $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{12}} - 1\right).$

$$I\left(1 - \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right)\right) = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_\infty f + \operatorname*{res}_3 f + \operatorname*{res}_{-3} f\right) =$$

$$= 2\pi i \left(-\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{6}}\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{12}}\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)\right).$$

6.(6) $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{-i\sqrt{2}} \left(\dfrac{h}{h + \pi i}\right)^2 = -\dfrac{\pi^3}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{8i}{\pi} + 3\right),$

$$h(-i\sqrt{2} + w) = -\pi i + Aw + Bw^2 + O(w^3) = -\pi i + 2i\sqrt{2}w + 3w^2 + O(w^3),$$

$$\operatorname*{res}_{-i\sqrt{2}} \left(\frac{h}{h+\pi i}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{A^2}\left(\frac{2Ai}{\pi} - \frac{2B}{A}\right) = \frac{\pi^2}{8}\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\pi} - \frac{6}{2i\sqrt{2}}\right).$$