2003/2004 33

1④ Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{z\sin^3 z\cdot\cos\left(\dfrac{1}{1-z}\right)}{(\cos z-1)^2}e^{\sin^2 z/z^2}$, определить их тип. Ответ обосновать.

Шабунин, Сидоров стр. 64 – 70 (примеры 9 - 13 стр. 68 – 72), Половинкин стр. 85 – 95 (примеры 1 - 4 стр. 91 – 93)

① $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функция $\psi(z)$ регулярна при всех z. Поэтому особые точки функции $f(z)$ определяютя особыми точками функции $\varphi(z)$ и нулями знаменателя $\psi(z)$.

Кандидаты в особые точки: $z=0$ - нуль знаменателя аргумента экспоненты,
$z=1$ - нуль знаменателя аргумента косинуса в числителе,
$z=2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$ - нули знаменателя,
$z=\infty$.

② Покажем, что точка $z=0$ является устранимой особой точкой[1] для функции $f(z)$:

$$f(z)=\frac{z\left(z+o(z^2)\right)^3\cdot\cos(1+z+o(z))}{\left(1-\dfrac{z^2}{2}+o(z^3)-1\right)^2}e^{\left(z+o(z^2)\right)^2/z^2}=\frac{\left(z^4+o(z^5)\right)\cdot\cos(1+o(1))}{\dfrac{z^4}{4}+o(z^5)}e^{1+o(1)}\xrightarrow[z\to0]{}4e\cos1.$$

Следовательно, $\boxed{z=0\text{ - УОТ}}$ для $f(z)$.

③ Покажем, что точка $z=1$ является существенно особой[2] для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_l=1+\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2\pi l}$, тогда $\lim\limits_{l\to\infty}z_l=1$, а $\lim\limits_{l\to\infty}\cos\left(\dfrac{1}{1-z_l}\right)=\cos\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2\pi l}\right)}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi l\right)=0$, т.е. $\lim\limits_{l\to\infty}f(z_l)=0$;

пусть теперь $z_m=1+\dfrac{1}{2\pi m}$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=1$, а $\lim\limits_{m\to\infty}\cos\left(\dfrac{1}{1-z_m}\right)=\cos\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2\pi m}\right)}=\cos(1+2\pi m)=1$, т.е.

$$\lim_{m\to\infty}f(z_m)=\frac{1\cdot\sin^3 1\cdot\cos(1+2\pi m)}{(\cos1-1)^2}e^{\left(\sin^2 1/1^2\right)}\neq0.$$

Следовательно, $\boxed{z=1\text{ - СОТ}}$ для $f(z)$.

③ Рассмотрим точки $z=2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$, в которых нули знаменателя совпадают с нулями числителя функции $f(z)$.

Произведем замену: $t=z-2\pi k$. Тогда $f(t)=\dfrac{2\pi kt^3\cdot\cos\left(\dfrac{1}{1-2\pi k}+o(1)\right)+o(t^4)}{\left(-\dfrac{t^2}{2}+o(t^3)\right)^2}e^{\left(\frac{t+o(t^2)}{2\pi k+o(1)}\right)^2}=$

---

[1] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

$$\frac{2\pi k t^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{1-2\pi k} + o(1)\right) + o\left(t^4\right)}{\frac{t^4}{4} + o(1)} e^{(o(1))^2} = \frac{2\pi k \cdot \cos\left(\frac{1}{1-2\pi k} + o(1)\right) + o(t)}{\frac{t}{4} + o(1)} e^{o(1)} \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$$ - полюсы[3] 1-го порядка (простые полюсы – ПП).

Точки $\boxed{z = 2\pi k,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ - полюсы 1-го порядка}}$ для функции $f(z)$.

④ $\boxed{z = \infty \text{ - неизолированная особая точка}}$ (НОТ)[4], т.к. в любой ее окрестности есть полюсы 1-го порядка $z = 2\pi k,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (точка накопления полюсов).

---

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

[4] **Определение**. Пусть функция f определена и регулярна в проколотой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{C}}$, т.е. на множестве $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$, $\rho > 0$. Тогда точку a называют ***изолированной особой точкой (однозначного характера) функции*** f.

2003/2004 33

2④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1-3i)$ функцию $f(z)=\dfrac{z^2-4}{z(z-2i)^2}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=1$. Указать границы кольца сходимости.

Шабунин, Сидоров стр. 70 – 75 (примеры 1, 2 стр. 73 – 75), Половинкин стр. 78 – 85 (пример 1 стр. 83 – 84)

① Дробь правильная.

Находим корни уравнения $z=0$. Получаем простой корень: $z_1=0$.

Находим корни уравнения $(z-2i)^2=0$: $z_{2,3}=2i$. Получаем кратные корни: $z_2=2i$ и $z_3=2i$.

② Точки $z_1=0$ и $z_{2,3}=2i$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не регулярна).

③ Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z^2-4}{z(z-2i)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-2i}+\frac{C}{(z-2i)^2}=\frac{A(z-2i)^2+Bz(z-2i)+Cz}{z(z-2i)^2}=\frac{A(z^2-4zi-4)+B(z^2-2zi)+Cz}{z(z-2i)^2}$$

$z^0: -4A=-4 \quad\rightarrow\quad A=1 \quad ↘$

$z^1: -4iA-2iB+C=0 \quad\rightarrow\quad -2iB+C=4i \quad ↘$

$\downarrow$

$z^2: A+B=1 \quad\rightarrow\quad B=0 \quad\rightarrow\quad C=4i$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{z}+\frac{4i}{(z-2i)^2}}.$$

④ Для удобства дальнейших выкладок произведем замену $z-1-3i=w$ или $z=w+1+3i$:

$$f(w)=\frac{1}{w+1+3i}+\frac{4i}{(w+1+i)^2}$$

Кольца аналитичности $f(w)$: $|w|<|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$\sqrt{2}<|w|<|1+3i|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,

$|w|>\sqrt{10}$.

⑤ При $z=1$ получаем $w=-3i$, $|w|=\sqrt{0^2+3^2}=\sqrt{9}$.

Т.о., раскладывать дроби в ряд Лорана по степеням w будем в кольце $\sqrt{2}<|w|<\sqrt{10}$, используя разложения в ряд Тейлора.

При этом $|1+i|<|w|<|1+3i|$.

❶ $$\frac{1}{w+1+3i}=\frac{1}{1+3i}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{1+3i}}=\frac{1}{1+3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{w}{1+3i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^n}{(1+3i)^{n+1}}$$

❷ $$\frac{4i}{(w+1+i)^2}=\frac{4i}{w^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1+i}{w}\right)^2}=\frac{-4i}{w^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{1+i}{w}}\right]'_{\frac{1+i}{w}}=\frac{-4i}{w^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i}{w}\right)^n\right]'_{\frac{1+i}{w}}=\frac{-4i}{w^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{1+i}{w}\right)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4in(1+i)^{n-1}}{w^{n+1}}.$$

Ответ: в кольце, которому принадлежит точка $z=1$ $\left(\sqrt{2}<|z-1-3i|<\sqrt{10}\right)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1-3i)^n}{(1+3i)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4in(1+i)^{n-1}}{(z-1-3i)^{n+1}}$$

2④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1-3i)$ функцию $f(z)=\dfrac{z^2-4}{z(z-2i)^2}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=1$. Указать границы кольца сходимости.

Шабунин, Сидоров стр. 70 – 75 (примеры 1, 2 стр. 73 – 75), Половинкин стр. 78 – 85 (пример 1 стр. 83 – 84)

① Дробь правильная.

Находим корни уравнения $z=0$. Получаем простой корень: $z_1=0$.

Находим корни уравнения $(z-2i)^2=0$: $z_{2,3}=2i$. Получаем кратные корни: $z_2=2i$ и $z_3=2i$.

② Точки $z_1=0$ и $z_{2,3}=2i$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не регулярна).

③ Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z^2-4}{z(z-2i)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-2i}+\frac{C}{(z-2i)^2}=\frac{A(z-2i)^2+Bz(z-2i)+Cz}{z(z-2i)^2}=\frac{A(z^2-4zi-4)+B(z^2-2zi)+Cz}{z(z-2i)^2}$$

$$z^0:\ -4A=-4 \quad\rightarrow\quad A=1 \quad\searrow$$

$$z^1:\ -4iA-2iB+C=0 \quad\rightarrow\quad -2iB+C=4i \quad\searrow$$

$$\downarrow$$

$$z^2:\ A+B=1 \quad\rightarrow\quad B=0 \quad\rightarrow\quad C=4i$$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{z}+\frac{4i}{(z-2i)^2}}.$$

④ Для удобства дальнейших выкладок произведем замену $z-1-3i=w$ или $z=w+1+3i$:

$$f(w)=\frac{1}{w+1+3i}+\frac{4i}{(w+1+i)^2}$$

Кольца аналитичности $f(w)$: $|w|<|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$\sqrt{2}<|w|<|1+3i|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,

$|w|>\sqrt{10}$.

⑤ При $z=1$ получаем $w=-3i$, $|w|=\sqrt{0^2+3^2}=\sqrt{9}$.

Т.о., раскладывать дроби в ряд Лорана по степеням w будем в кольце $\sqrt{2}<|w|<\sqrt{10}$, используя разложения в ряд Тейлора.

При этом $|1+i|<|w|<|1+3i|$.

❶ $$\frac{1}{w+1+3i}=\frac{1}{1+3i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{w}{1+3i}}=\frac{1}{1+3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{w}{1+3i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^n}{(1+3i)^{n+1}},$$

❷ $$\frac{4i}{(w+1+i)^2}=\frac{4i}{w^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1+i}{w}\right)^2}=\frac{-4i}{w^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\dfrac{1+i}{w}}\right]'_{\frac{1+i}{w}}=\frac{-4i}{w^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i}{w}\right)^n\right]'_{\frac{1+i}{w}}=\frac{-4i}{w^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{1+i}{w}\right)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4in(1+i)^{n-1}}{w^{n+1}}.$$

Ответ: в кольце, которому принадлежит точка $z=1$ $\left(\sqrt{2}<|z-1-3i|<\sqrt{10}\right)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1-3i)^n}{(1+3i)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4in(1+i)^{n-1}}{(z-1-3i)^{n+1}}$$

2003/2004 33

4④ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}dx$.

Шабунин, Сидоров стр. 140 – 145 (примеры 6 стр. 144), Половинкин стр. 103 – 108 (пример 3 стр. 107 – 108)

① Замечая, что $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(2x-1)}{x^2+4}dx$,

для решения задачи достаточно вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i(2x-1)}}{x^2+4}dx$

и воспользоваться формулой

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}dx = \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i(2x-1)}}{x^2+4}dx. \qquad (1)$$

② Для того чтобы применить теорему Коши[1] о вычетах[2], вводим функцию комплексной переменной $f(z) = \frac{ze^{i2z}}{(z^2+4)e^i}$ и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R, R]$ и полуокружности $C_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, выбрав R так, чтобы все особые точки z_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{xe^{i2x}}{(x^2+4)e^i}dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (2)$$

③ Переходим к пределу при $R \to \infty$. Так как в нашем случае $\Phi(z) = \frac{z}{(z^2+4)e^i}$ есть правильная рациональная дробь и $\alpha = 2 > 0$, то условия леммы Жордана[3] выполнены и, следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.

Поскольку правая часть в (2) не зависит от R, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{(x^2+4)e^i}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \qquad (3)$$

где z_k - особые точки функции $f(z) = \frac{ze^{i2z}}{(z^2+4)e^i}$, лежащие в верхней полуплоскости.

---

[1] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[2] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{o}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz.$$

[3] **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z | \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R_0 > 0\}$. Пусть число $\alpha > 0$ и $C_R \overset{\Delta}{=} \{z| \quad |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $R > R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R) \overset{\Delta}{=} \max\{|\Phi(z)| \quad z \in C_R\}$ при $R > R_0$. Если $\lim\limits_{R\to\infty} \varepsilon(R) = 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)dz = 0$.

④ Находим особые точки функции $f(z)=\dfrac{ze^{i2z}}{(z^2+4)e^i}=\dfrac{ze^{i2z}}{(z-2i)(z+2i)e^i}$ как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z=2i$ и $z=-2i$. Таким образом, точки $z=2i$ и $z=-2i$ - полюса[4] 1-го порядка (ПП – простые полюса).

⑤ Вычисляем вычет в простом полюсе $z=2i$ по формуле $\operatorname*{res}_{z=2i} f(z)=\lim\limits_{z\to 2i}(z-2i)f(z)$. Получаем

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z)=\left.\frac{ze^{i2z}}{(z+2i)e^i}\right|_{z=2i}=\frac{2ie^{-4}}{(2\cdot 2i)e^i}=\frac{e^{-4-i}}{2}$$

⑥ Вычисляем несобственный интеграл по формуле (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{2ix}}{(x^2+4)e^i}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=2i} f(z)=2\pi i\frac{e^{-4-i}}{2}=\pi i\frac{e^{-i}}{e^4}=\frac{\pi i}{e^4}\left(\cos(-1)+i\sin(-1)\right)=\frac{\pi i}{e^4}\left(\cos 1-i\sin 1\right).$$

⑦ Используя формулу (1), находим искомый интеграл:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(2x-1)}{x^2+4}dx=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(2x-1)}}{x^2+4}dx=\operatorname{Re}\frac{\pi i}{e^4}\left(\cos 1-i\sin 1\right)=\frac{\pi\sin 1}{e^4}$$

Ответ: $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}dx=\frac{\pi\sin 1}{e^4}}$

---

[4] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

2003/2004 33

5⑥ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int_{-1}^{0}\sqrt[7]{\frac{x^4}{(x+1)^4}}\cdot\frac{1}{x-1}dx$.

📖 Шабунин, Сидоров стр. 151 – 158 (пример 11 стр. 151-152, пример 12 стр. 153-154, пример 13 стр. 154-156), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 3 стр. 111 – 114)

① Чтобы вычислить этот интеграл J с помощью теории вычетов, продолжая подынтегральную функцию в комплексную плоскость, мы вынуждены иметь дело с многозначной функцией $\left\{\sqrt[7]{\frac{z^4}{(z+1)^4}}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash[-1,0]$, что проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [-1, 0] принимает значения арифметического корня $\sqrt[7]{\frac{x^4}{(x+1)^4}}\geq 0$, $x\in[-1,0]$, т.е. обозначим через g регулярную ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[7]{\frac{z^4}{(z+1)^4}}\right\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[-1,0]$ такую, что ее предел из верхней полуплоскости в точках $x\in(-1,0)$ равен

$$g(x+i0)=\sqrt[7]{\frac{x^4}{(x+1)^4}}>0. \quad (1)$$

$$\boxed{g(z)=\sqrt[7]{\left|\frac{z^4}{(z+1)^4}\right|}e^{\frac{i}{7}\left(4\Delta_\gamma\arg(z)-4\Delta_\gamma(z+1)\right)}}\text{[3]} - \quad (2)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (1).

Отметим, что предельное значение функции g из нижней полуплоскости в точках $x\in(-1,0)$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку [1, 2], принимает по формуле (2) значение

$$\boxed{g(x-i0)}=\sqrt[7]{\left|\frac{z^4}{(z+1)^4}\right|}e^{\frac{i}{7}\left(4\Delta_\gamma\arg(z)-4\Delta_\gamma(z+1)\right)}=g(x+i0)e^{\frac{i}{7}(4\cdot 0-4\cdot 2\pi)}\text{[4]}=\boxed{g(x+i0)e^{-\frac{i8\pi}{7}}} \quad (3)$$

В формуле (3) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза.

③ Пусть $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим в области G контур γ_ε, имеющий вид «гантели», т.е. составленный из окружностей $C_{1\varepsilon}$ и $C_{2\varepsilon}$ радиуса ε и центрами в точках 1 и 2 соответственно, а также двух берегов I_ε^+ и I_ε^- разреза по отрезку $[-1+\varepsilon,-\varepsilon]$.

Ориентируем полученный контур γ_ε положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости.

Рассмотрим интеграл $J_\varepsilon\overset{\Delta}{=}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz$, где $f(z)\overset{\Delta}{=}\frac{g(z)}{z-1}$.

---

[1] $\sqrt[7]{\frac{z^4}{(z+1)^4}}=\sqrt[7]{\left|\frac{z^4}{(z+1)^4}\right|}e^{\frac{i}{7}\left(4\varphi_{01}+4\Delta_\gamma\arg(z)-4\varphi_{02}-4\Delta_\gamma(z+1)+2\pi k\right)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\neq 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}}\arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] $g(x+i0)=\sqrt[5]{\left|\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}\right|}e^{\frac{i}{5}(3\varphi_{01}-3\varphi_{02}-2\pi k)}=\sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}=\sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}}e^{i2\pi l}$, т.е. $\frac{(3\varphi_{01}-3\varphi_{02}-2\pi k)}{5}=2\pi l$.

[4] или $g(x+i0)e^{\frac{i}{7}(4\cdot(-2\pi)-4\cdot 0)}$.

По теореме о вычетах[5], с одной стороны, и из формы контура γ_ε с другой, получаем равенства

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\underset{z=1}{res}\, f(z)+\underset{z=\infty}{res}\, f(z)\right]^{6} = \left(\int\limits_{I_\varepsilon^+} + \int\limits_{I_\varepsilon^-} + \int_{C_{1\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}}\right) f(z)dz\,. \qquad (4)$$

④ Точка $z=1$ ПП (П[1]) – простой полюс[7] (полюс первого порядка), поэтому вычет[8] в этой точке равен

$$\underset{z=1}{\text{res}}\, f(z)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z) = g(1)^{9} = \sqrt[7]{\left|\frac{1^4}{(1+1)^4}\right|}\,e^{\frac{i}{7}(4\cdot(-\pi)-4\cdot0)} = \frac{1}{\sqrt[7]{16}}e^{-\frac{i4\pi}{7}}\,.$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[10]) разложим[11] эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$: $f(X)=\dfrac{g(X)}{X-1}$ =

$$= \frac{1}{X-1}\sqrt[7]{\left|\frac{X^4}{(X+1)^4}\right|}\,e^{\frac{i}{7}(4\cdot(-\pi)-4\cdot0)} = \frac{1}{X\left(1-\dfrac{1}{X}\right)}\sqrt[7]{\left|\frac{1^4}{\left(1+\dfrac{1}{X}\right)^4}\right|}\,e^{-\frac{i4\pi}{7}} = \frac{1}{X}\left(1+\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1-\frac{4}{7}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{-\frac{i4\pi}{7}} =$$

$\left(\dfrac{1}{X}+o\left(\dfrac{1}{X^2}\right)\right)e^{-\frac{i4\pi}{7}}$. По теореме единственности[12] имеем: $f(z)=\left(\dfrac{1}{z}+o\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)e^{-\frac{i4\pi}{7}}$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\dfrac{1}{z}$ равен $c_{-1}=e^{-\frac{i4\pi}{7}}$, следовательно $\underset{z=\infty}{\text{res}}\, f(z)=-c_{-1}=-e^{-\frac{i4\pi}{7}}$[13].

---

[5] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{a_k}{\text{res}}\, f$.

[6] Особыми точками функции f являются: $z=\infty$, нули знаменателя: $z=0$, особые точки числителя: $\varnothing$, особые точки знаменателя: $\varnothing$ (**<u>в *G*!!!</u>**)

[7] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

[8] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\underset{a}{\text{res}}\, f = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[9] Для вычисления $g(0)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z=0$

[10] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

[11] $\underset{a}{\text{res}}\, f = c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\dfrac{1}{z}$.

[12] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f:G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0$ $\forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv0$ на области G.

[13] $\underset{\infty}{\text{res}}\, f = -c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

Таким образом, $J_\varepsilon = 2\pi i\left[\underset{z=1}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z)\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt[7]{16}}e^{-\frac{i4\pi}{7}} - e^{-\frac{i4\pi}{7}}\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt[7]{16}} - 1\right]e^{-\frac{i4\pi}{7}}$

⑤ Оценим интегралы по окружностям $C_{-1\varepsilon} = \{z : |z+1| = \varepsilon\}$ и $C_{0\varepsilon} = \{z : |z| = \varepsilon\}$:

$$\left|\int_{C_{1\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \sqrt[7]{\frac{(-1+\varepsilon)^4}{\varepsilon^4}} \cdot \frac{1}{-1-\varepsilon-1}\varepsilon d\varphi \le A\cdot\varepsilon^{\frac{3}{7}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

$$\left|\int_{C_{2\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \sqrt[7]{\frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon+1)^4}} \cdot \frac{1}{\varepsilon-1}\varepsilon d\varphi \le B\cdot\varepsilon^{\frac{11}{7}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

⑥ В силу формул (1) и (3) получаем выражения:

$$\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz = \int_{-1+\varepsilon}^{0-\varepsilon} \sqrt[7]{\frac{x^4}{(x+1)^4}} \cdot \frac{1}{x-1}dx,$$

$$\int_{I_\varepsilon^-} f(z)dz = \int_{0-\varepsilon}^{-1+\varepsilon} \frac{g(x-i0)}{x-1}dx = \int_{0-\varepsilon}^{-1+\varepsilon} \frac{g(x+i0)}{x-1}e^{-\frac{i8\pi}{7}}dx = -e^{-\frac{i8\pi}{7}}\int_{-1+\varepsilon}^{0-\varepsilon} \frac{g(x+i0)}{x-1}dx = -e^{-\frac{i8\pi}{7}}\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz.$$

⑦ Переходя в формуле (4) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем равенство:

$$2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt[7]{16}} - 1\right]e^{-\frac{i4\pi}{7}} = \left(1 - e^{-\frac{i8\pi}{7}}\right)J,$$

т.е. $\pi\left[\frac{1}{\sqrt[7]{16}} - 1\right] = \frac{\left(e^{\frac{i4\pi}{7}} - e^{-\frac{i4\pi}{7}}\right)}{2i}J$, $J = \dfrac{\pi\left[\frac{1}{\sqrt[7]{16}} - 1\right]}{\sin\frac{4\pi}{7}}$

Ответ: $\boxed{\int_{-1}^{0} \sqrt[7]{\frac{x^4}{(x+1)^4}} \cdot \frac{1}{x-1}dx = \dfrac{\pi\left[\frac{1}{\sqrt[7]{16}} - 1\right]}{\sin\frac{4\pi}{7}}}$

2003/2004 33

6⑦ Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{1-z^2}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\{z:|z|=1,\ \operatorname{Im} z\ge 0\}$ такая, что $g(0)=-1$. Пусть $f(z)=\dfrac{z}{(g(z)-3)^2}$. Найти $\underset{\infty}{res}\, f$ и вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2} f(z)dz$.

Шабунин, Сидоров стр. 81 – 119 (пример 9 стр. 110-111, пример 12 стр. 103-115), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 4 стр. 114 – 115)

① Прежде всего следует проверить, что в заданной области действительно существуют регулярные ветви функции $\left\{\sqrt{1-z^2}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\setminus\gamma$, что легко проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая удовлетворяет условию $g(0)=-1$:

$$g(0)=\sqrt{\left|1-0^2\right|}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}=e^{\frac{i}{2}(\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}=-1=e^{i\pi+i2\pi l},\ \text{т.е. } \frac{(\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}{2}=\pi+2\pi l.$$

$$\boxed{g(z)=\sqrt{\left|1-z^2\right|}e^{i\pi+\frac{i}{2}(\Delta_\gamma \arg(1+2iz)+\Delta_\gamma \arg(1-2iz))}}\ - \qquad (1)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию $g(0)=-1$.

③ Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[3]) разложим эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$: $f(X)=\dfrac{X}{(g(X)-3)^2}=$

$$\frac{X}{\left(\sqrt{\left|1-X^2\right|}e^{i\pi+\frac{i}{2}(0+\pi)}-3\right)^2}=\frac{X}{\left(X\sqrt{\left|1-\frac{1}{X^2}\right|}e^{\frac{i3\pi}{2}}-3\right)^2}=\frac{X}{X^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{X^2}}(-i)-\frac{3}{X}\right)^2}=$$

$$\frac{1}{X\left(-i\left(1-\frac{1}{2X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)-\frac{3}{X}\right)^2}=\frac{1}{X\left(-i-\frac{3}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)^2}=\frac{1}{X(-i)^2\left(1-\frac{3i}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)^2}=$$

$$-\frac{1}{X}\left(1+2\frac{3i}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)=-\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right).$$

---

[1] $\sqrt{1-z^2}=\sqrt{(1+z)(1-z)}=\sqrt{1+z}\sqrt{1-z}=\sqrt{|1+z|}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{01}+\Delta_\gamma \arg(1+2iz)+2\pi k_1)}\sqrt{|1-z|}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{02}+\Delta_\gamma \arg(1-2iz)+2\pi k_2)}=$
$\sqrt{\left|1-z^2\right|}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{01}+\varphi_{02}+\Delta_\gamma \arg(1+2iz)+\Delta_\gamma \arg(1-2iz)+2\pi k)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\ne 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

По теореме единственности[4] имеем: $f(z) = -\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1} = -1$, следовательно $\boxed{\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = 1}$[5].

④ Находим особые точки $f(z) = \frac{z}{(g(z)-3)^2}$.

Особыми точками являются: $z = \infty$,

особые точки числителя: ∅,

нули знаменателя: $z = 2\sqrt{2}i$,

$g(z) - 3 = 0 \leftrightarrow g(z) = 3 \rightarrow g^2(z) = 9 \leftrightarrow 1 - z^2 = 9 \leftrightarrow z^2 = -8 \leftrightarrow z = \pm 2\sqrt{2}i$:

- $z = 2\sqrt{2}i$, $g(2\sqrt{2}i) = \sqrt{\left|1-(2\sqrt{2}i)^2\right|}e^{i\pi + \frac{i}{2}(\alpha + (2\pi - \alpha))} = \sqrt{1+4\cdot 2}e^{i\pi + \frac{i}{2}2\pi} = \sqrt{9}e^{i2\pi} = 3$
- $z = -2\sqrt{2}i$, $g(-2\sqrt{2}i) = \sqrt{\left|1-(-2\sqrt{2}i)^2\right|}e^{i\pi + \frac{i}{2}(-\alpha+\alpha)} = \sqrt{1+4\cdot 2}e^{i\pi + \frac{i}{2}0} = \sqrt{9}e^{i\pi} = -3$ – не подходит,

особые точки знаменателя: ∅.

Вне контура $\gamma = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \le \arg z \le 2\pi \right\}$ находятся: $z = \infty$ - УОТ,

$z = 2\sqrt{2}i$ - Π^2 (полюс 2-го порядка)[6]:

$$g^2(z) = 1 - z^2 \rightarrow 2g(z)g'(z) = 2z \rightarrow g'(z) = \frac{2z}{2g(z)} = \frac{z}{g(z)} \rightarrow g'(2\sqrt{2}i) = \frac{2\sqrt{2}i}{g(2\sqrt{2}i)} = \frac{2\sqrt{2}i}{3},$$

$$g''(z) = \left(\frac{z}{g(z)}\right)' = \frac{1}{g(z)} - \frac{z}{g^2(z)}g'(z) \rightarrow g''(2\sqrt{2}i) = \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}i}{3^2}\frac{2\sqrt{2}i}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4\cdot 2}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{17}{9}\right) = \frac{17}{27}$$

$$\left.\left((g(z)-3)^2\right)'\right|_{z=2\sqrt{2}i} = 2(g(z)-3)g'(z)\Big|_{z=2\sqrt{2}i} = 2(3-3)\frac{2\sqrt{2}i}{3} = 0,$$

$$\left.\left((g(z)-3)^2\right)''\right|_{z=2\sqrt{2}i} = \left.\left(2(g(z)-3)g'(z)\right)'\right|_{z=2\sqrt{2}i} = 2\left((g'(z))^2 + (g(z)-3)g''(z)\right)\Big|_{z=2\sqrt{2}i} =$$

$$2\left(\left(\frac{2\sqrt{2}i}{3}\right)^2 + (3-3)\frac{17}{27}\right) = -2\frac{16\cdot 2}{9}^2 \ne 0$$

⑤ Интеграл $I = \oint\limits_{|z|=2} f(z)dz$, можно вычислить по формуле $I = -2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=2\sqrt{2}i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right)$[7].

---

[4] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f : G \to \mathbf{C}$ регулярна в области $G \subset \mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\} \subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a \in G$ и такая, что $f(z_n) = 0 \;\; \forall n \in N$. Тогда $f(z) \equiv 0$ на области G.

[5] $\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

[6] **Определение**. Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{o}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

[7] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k} f$.

⑥ Точка $z=2\sqrt{2}i$ - П[2] (полюс 2-го порядка), поэтому вычет[8] в этой точке равен $\operatorname*{res}_{z=2\sqrt{2}i} f(z)=\lim_{z\to 2\sqrt{2}i}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left(\left(z-2\sqrt{2}i\right)^2 f(z)\right)$. ☹

Кроме того, $\operatorname*{res}_{z=2\sqrt{2}i} f=c_{-1}$[9], где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке $2\sqrt{2}i$ при $\frac{1}{z}$.

Рассмотрим точку $z=0+iy=2\sqrt{2}i+iv$. $f\left(2\sqrt{2}i+iv\right)=\frac{2\sqrt{2}i+iv}{\left(g\left(2\sqrt{2}i+iv\right)-3\right)^2}=$

$$\frac{2\sqrt{2}i+iv}{\left(\sqrt{\left|1-\left(2\sqrt{2}i+iv\right)^2\right|}e^{i\pi+\frac{i}{2}(\beta+(2\pi-\beta))}-3\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}i+iv}{\left(\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}+v\right)^2}e^{i\pi+\frac{i}{2}2\pi}-3\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}i+iv}{\left(\sqrt{1+4\cdot 2+4\sqrt{2}v+v^2}e^{i2\pi}-3\right)^2}=$$

$$\frac{2\sqrt{2}i+iv}{\left(\sqrt{9+4\sqrt{2}v+v^2}-3\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}i+iv}{3^2\left(\sqrt{1+\frac{4\sqrt{2}}{9}v+\frac{v^2}{9}}-1\right)^2}=$$

$$\frac{2\sqrt{2}i+iv}{9\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}v+\frac{v^2}{9}\right)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}v\right)^2+o\left(v^2\right)-1\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}i+iv}{9\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}v+\frac{v^2}{18}-\frac{1}{8}\frac{16\cdot 2}{81}v^2+o\left(v^2\right)\right)^2}=$$

$$\frac{\left(2\sqrt{2}+v\right)i}{9\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}v\right)^2\left(1+\frac{9}{2\sqrt{2}}\frac{v}{18}-\frac{9}{2\sqrt{2}}\frac{2\cdot 2}{81}v+o(v)\right)^2}=\frac{\left(2\sqrt{2}+v\right)i}{9\frac{4\cdot 2}{9^2}v^2\left(1+\frac{v}{4\sqrt{2}}-\frac{2}{9\sqrt{2}}v+o(v)\right)^2}=$$

$$\frac{\left(2\sqrt{2}+v\right)i}{\frac{8}{9}v^2\left(1+\left(\frac{9}{4\sqrt{2}\cdot 9}-\frac{8}{9\sqrt{2}\cdot 4}\right)v+o(v)\right)^2}=\frac{9\left(2\sqrt{2}+v\right)i}{8v^2}\left(1-2\frac{1}{4\sqrt{2}\cdot 9}v+o(v)\right)=$$

$$9\left(\frac{2\sqrt{2}}{8v^2}+\frac{1}{8v}\right)i\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}\cdot 9}v+o(v)\right)=\left(\frac{18\sqrt{2}}{8v^2}+\frac{9}{8v}\right)\left(1-\frac{1}{18\sqrt{2}}v+o(v)\right)i=\left(\frac{18\sqrt{2}}{8v^2}-\frac{1}{8v}+\frac{9}{8v}+O(1)\right)i=$$

$$-\frac{18\sqrt{2}}{8(iv)^2}i+\frac{1}{8iv}-\frac{9}{8iv}+O(1)$$

По теореме единственности имеем: $f\left(2\sqrt{2}i+w\right)=-\frac{18\sqrt{2}}{8w^2}i+\frac{1-9}{8}\frac{1}{w}+O(1)$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{w}$ равен $c_{-1}=-1$, следовательно $\boxed{\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=c_{-1}=-1}$.

⑥ Окончательно $\boxed{I=}-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=2\sqrt{2}i} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right)=-2\pi i(1-1)\boxed{=0}$

---

[8] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_a f=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[9] $\operatorname*{res}_a f=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.