2003/2004 34

1④ Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2 z\cdot\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)}{(\sin z-1)^2}e^{\cos^2 z/\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$, определить их тип. Ответ обосновать.

📖 Шабунин, Сидоров стр. 64 – 70 (примеры 9 - 13 стр. 68 – 72), Половинкин стр. 85 – 95 (примеры 1 - 4 стр. 91 – 93)

① $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функция $\psi(z)$ регулярна при всех z. Поэтому особые точки функции $f(z)$ определяются особыми точками функции $\varphi(z)$ и нулями знаменателя $\psi(z)$.

Кандидаты в особые точки: $z=\dfrac{\pi}{2}$ - нуль знаменателя аргумента экспоненты,

$z=-1$ - нуль знаменателя аргумента синуса в числителе,

$z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$ - нули знаменателя,

$z=\infty$.

② Покажем, что точка $z=\dfrac{\pi}{2}$ является устранимой особой точкой[1] для функции $f(z)$: проведем замену $t=z-\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$f(t)=\frac{t^2\sin^2 t\cdot\sin\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}+1}\right)}{(\cos t-1)^2}e^{\sin^2 t/t^2}=\frac{t^4\cdot\sin\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}+o(1)\right)+o(t^5)}{\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)-1\right)^2}e^{\left(\frac{t+o(t)}{t}\right)^2}=$$

$$\frac{t^4\cdot\sin\left(\frac{2}{\pi+2}+o(1)\right)+o(t^5)}{\frac{t^4}{4}+o(t^5)}e^{(1+o(t))^2}=\frac{\sin\left(\frac{2}{\pi+2}+o(1)\right)+o(t)}{\frac{1}{4}+o(t)}e^{1+o(t)}\xrightarrow[t\to0]{}4e\sin\frac{2}{\pi+2}.$$

Следовательно, $\boxed{z=\frac{\pi}{2}\text{ - УОТ}}$ для $f(z)$.

③ Покажем, что точка $z=-1$ является существенно особой[2] для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_l=-1+\dfrac{1}{2\pi l}$, тогда $\lim\limits_{l\to\infty}z_l=-1$, а $\lim\limits_{l\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{z_l+1}\right)=\sin\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2\pi l}\right)}=\sin(2\pi l)=0$, т.е. $\lim\limits_{l\to\infty}f(z_l)=0$;

пусть теперь $z_m=-1+\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi m}$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=-1$, а $\lim\limits_{m\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{z_m+1}\right)=\sin\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2\pi m}\right)}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\right)=1$,

---

[1] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} f(z_m)=\dfrac{\left(-1-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2(-1)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)}{(\sin(-1)-1)^2}e^{\left(\cos(-1)\Big/\left(-1-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}\neq 0.$

Следовательно, $\boxed{z=-1 \text{ - СОТ}}$ для $f(z)$.

③ Рассмотрим точки $z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\dots$, в которых нули знаменателя совпадают с нулями числителя функции $f(z)$. Произведем замену: $t=z-\dfrac{\pi}{2}-2\pi k$. Тогда $f(t)=$

$$=\frac{(t+2\pi k)^2\cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{t+\frac{\pi}{2}+2\pi k+1}\right)}{\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-1\right)^2}e^{\left(\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}{t+2\pi k}\right)^2}=$$

$$=\frac{(t+2\pi k)^2\sin^2(t+2\pi k)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}+1}+o(1)\right)}{(\cos(t+2\pi k)-1)^2}e^{\left(\frac{-\sin(t+2\pi k)}{t+2\pi k}\right)^2}=$$

$$\frac{(t+2\pi k)^2\sin^2(t)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}+1}+o(1)\right)}{(\cos(t)-1)^2}e^{\left(\frac{-\sin(t)}{t+2\pi k}\right)^2}==\frac{(2\pi k)^2t^2\cdot\cos\left(\dfrac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}+1}+o(1)\right)+o(t^3)}{\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)-1\right)^2}e^{\left(\frac{-t+o(t^2)}{2\pi k+o(1)}\right)^2}=$$

$$\frac{(2\pi k)^2t^2\cdot\cos\left(\dfrac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}+1}+o(1)\right)+o(t^3)}{\frac{t^4}{4}+o(t^5)}e^{(o(1))^2}==\frac{(2\pi k)^2\cdot\cos\left(\dfrac{1}{2\pi k-\frac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o(t)}{\frac{t^2}{4}+o(t^3)}e^{o(1)}\xrightarrow[t\to0]{}\infty$$ - полюсы[3] 2-го порядка.

Точки $\boxed{z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\dots \text{ - полюсы 2-го порядка}}$ для функции $f(z)$.

④ $\boxed{z=\infty \text{ - неизолированная особая точка}}$ (НОТ)[4], т.к. в любой ее окрестности есть полюсы 2-го порядка $z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\dots$ (точка накопления полюсов).

---

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

[4] **Определение**. Пусть функция f определена и регулярна в проколотой окрестности точки $a\in\overline{\mathbb{C}}$, т.е. на множестве $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$, $\rho>0$. Тогда точку a называют ***изолированной особой точкой (однозначного характера) функции*** f.

2003/2004 34

2④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+2+2i)$ функцию $f(z)=\dfrac{2z^2+iz+5}{z^2(z-5i)}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=1+i$. Указать границы кольца сходимости.

Шабунин, Сидоров стр. 70 – 75 (примеры 1, 2 стр. 73 – 75), Половинкин стр. 78 – 85 (пример 1 стр. 83 – 84)

① Дробь правильная.

Находим корни уравнения $z^2=0$: $z_{1,2}=0$. Получаем кратные корни: $z_1=0$ и $z_2=0$.

Находим корни уравнения $z-5i=0$. Получаем простой корень: $z_3=5i$.

② Точки $z_{1,2}=0$ и $z_3=5i$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не регулярна).

③ Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{2z^2+iz+5}{z^2(z-5i)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z-5i}=\frac{Az(z-5i)+B(z-5i)+Cz^2}{z^2(z-5i)}$$

$z^0:\ -5iB=5 \quad \to \quad B=\dfrac{5}{-5i}=i$ ↘

$z^1:\ -5iA+B=i \quad \to \quad A=0$ ↘

$z^2:\ A+C=2 \quad \to \quad C=2$

$$\boxed{f(z)=\frac{i}{z^2}+\frac{2}{z-5i}}.$$

④ Для удобства дальнейших выкладок произведем замену $z+2+2i=w$ или $z=w-2-2i$:

$$f(w)=\frac{i}{(w-2-2i)^2}+\frac{2}{w-2-7i}$$

Кольца аналитичности $f(w)$: $|w|<|2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,

$2\sqrt{2}<|w|<|2+7i|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$,

$|w|>\sqrt{53}$.

⑤ При $z=1+i$ получаем $w=3+3i$, $|w|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$.

Т.о., раскладывать дроби в ряд Лорана по степеням w будем в кольце $2\sqrt{2}<|w|<\sqrt{53}$, используя разложения в ряд Тейлора.

При этом $|2+2i|<|w|<|2+7i|$.

❶ $$\frac{i}{(w-2-2i)^2}=\frac{i}{w^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2+2i}{w}\right)^2}=\frac{i}{w^2}\cdot\left[\frac{1}{1-\frac{2+2i}{w}}\right]'_{\frac{2+2i}{w}}=\frac{i}{w^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+2i}{w}\right)^n\right]'_{\frac{2+2i}{w}}=\frac{i}{w^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2+2i}{w}\right)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{in(2+2i)^{n-1}}{w^{n+1}}.$$

❷ $$\frac{2}{w-2-7i}=\frac{2}{-2-7i}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{2+7i}}=\frac{-2}{2+7i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2+7i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-w^n}{(2+7i)^{n+1}}$$

Ответ: в кольце, которому принадлежит точка $z=1+i$ $\left(2\sqrt{2}<|z+2+2i|<\sqrt{53}\right)$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{in(2+2i)^{n-1}}{(z+2+2i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(z+2+2i)^n}{(2+7i)^{n+1}}$$

2003/2004 34

3⑤ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{zdz}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)}$[1].

📖 Шабунин, Сидоров стр. 134 – 138 (примеры 11 - 15 стр. 134 – 137), Половинкин стр. 95 – 102 (пример 1 стр. 101 – 102)

① Находим особые точки $f(z)=\dfrac{z}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)}$.

Особыми точками являются: особые точки числителя: $\varnothing$,

нули знаменателя: $z=\dfrac{\pi}{3}$,

$\left(\cos 3z=-1 \Leftrightarrow 3z_k=\pi+2\pi k \Leftrightarrow\right)\quad z_k=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k=\pm1,\pm2,\ldots$ - Π^2 (полюсы 2-го порядка)[2] [3]

особые точки знаменателя: $\varnothing$.

$z=\infty$ - НОТ.

Внутри контура $\gamma=\{z:|z-1|=1\}$ находится: $z=\dfrac{\pi}{3}$ - Π^3 (полюс 3-го порядка).

② Интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{zdz}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)}$, можно вычислить по формуле $I=2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=\frac{\pi}{3}} f(z)$[4].

③ Для нахождения вычета[5] функции $f(z)$ в точке $z=\dfrac{\pi}{3}$ разложим[6] эту функцию в ряд Лорана в кольце $0<\left|z-\dfrac{\pi}{3}\right|<\varepsilon\ \ (\varepsilon \ll 1)$. Получаем:

---

[1] По умолчанию направление обхода считается положительным – против часовой стрелки.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

[3] $(1+\cos 3z)\big|_{z=\frac{\pi}{3}}=0$, $\left.\dfrac{d(1+\cos 3z)}{dz}\right|_{z=\frac{\pi}{3}}=(-3\sin 3z)\big|_{z=\frac{\pi}{3}}=0$, а $\left.\dfrac{d^2(1+3\cos 3z)}{dz^2}\right|_{z=\frac{\pi}{3}}=(-9\cos 3z)\big|_{z=\frac{\pi}{3}}=1\neq 0$

[4] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n\in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[5] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_{a} f=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[6] $\operatorname*{res}\limits_{a} f=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\dfrac{1}{z}$.

$$f(z)=\frac{z}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)}=\frac{z}{3\left(\frac{\pi}{3}-z\right)(1+\cos 3z)}=\left|\begin{array}{l} z=\frac{\pi}{3}+w \\ w=z-\frac{\pi}{3}\end{array}\right|=\frac{\frac{\pi}{3}+w}{3(-w)\left(1+\cos 3\left(\frac{\pi}{3}+w\right)\right)}=\frac{\frac{\pi}{9}+\frac{w}{3}}{-w(1-\cos 3w)}$$

$$=\frac{-\frac{\pi}{9w}-\frac{1}{3}}{(1-\cos 3w)}=\frac{-\frac{\pi}{9w}-\frac{1}{3}}{\left(1-\left(1-\frac{(3w)^2}{2!}+\frac{(3w)^4}{4!}+o\left(w^5\right)\right)\right)}=\frac{-\frac{\pi}{9w}-\frac{1}{3}}{\left(\frac{9w^2}{2}-\frac{81w^4}{24}+o\left(w^5\right)\right)}=\frac{-\frac{\pi}{9w}-\frac{1}{3}}{\frac{9w^2}{2}\left(1-\frac{9w^2}{12}+o\left(w^3\right)\right)}=$$

$$\frac{-\frac{2\pi}{81w^3}-\frac{2}{27w^2}}{\left(1-\frac{3w^2}{4}+o\left(w^3\right)\right)}=-\left(\frac{2\pi}{81w^3}+\frac{2}{27w^2}\right)\left(1+\frac{3w^2}{4}+\left(\frac{3w^2}{4}\right)^2+o\left(w^3\right)\right)=-\frac{2\pi}{81w^3}-\frac{2}{27w^2}-\frac{\pi}{54w}-\frac{1}{18}+o(w)\,.$$

Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=-\frac{\pi}{54}$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{3}} f(z)=c_{-1}=-\frac{\pi}{54}$.

④ По теореме Коши о вычетах

$$I=2\pi i\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{3}} f(z)=2\pi i\left[-\frac{\pi}{54}\right]=-\frac{\pi^2 i}{27}$$

Ответ: $\boxed{\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{zdz}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)}=-\frac{\pi^2 i}{27}}$

2003/2004 34

4④ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\left(1-\sqrt{2}x\right)}{2x^2+1}dx$.

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 140 – 145 (примеры 6 стр. 144), Половинкин стр. 103 – 108 (пример 3 стр. 107 – 108)

① Замечая, что $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\left(1-\sqrt{2}x\right)}{2x^2+1}dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\left(\sqrt{2}x-1\right)}{2x^2+1}dx$,

для решения задачи достаточно вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\left(\sqrt{2}x-1\right)}}{2x^2+1}dx$

и воспользоваться формулой

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\left(1-\sqrt{2}x\right)}{2x^2+1}dx = -\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\left(\sqrt{2}x-1\right)}}{2x^2+1}dx. \qquad (1)$$

② Для того чтобы применить теорему Коши[1] о вычетах[2], вводим функцию комплексной переменной $f(z) = \frac{ze^{i\sqrt{2}z}}{\left(2z^2+1\right)e^i}$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R,R]$ и полуокружности $C_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, выбрав R так, чтобы все особые точки z_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{xe^{i\sqrt{2}x}}{\left(2x^2+1\right)e^i}dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (2)$$

③ Переходим к пределу при $R \to \infty$. Так как в нашем случае $\Phi(z) = \frac{z}{\left(2z^2+1\right)e^i}$ есть правильная рациональная дробь и $\alpha = \sqrt{2} > 0$, то условия леммы Жордана[3] выполнены и, следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.

Поскольку правая часть в (2) не зависит от R, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\sqrt{2}x}}{\left(2x^2+1\right)e^i}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \qquad (3)$$

где z_k - особые точки функции $f(z) = \frac{ze^{i\sqrt{2}z}}{\left(2z^2+1\right)e^i}$, лежащие в верхней полуплоскости.

---

[1] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[2] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{o}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_{a} f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[3] **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z|\ \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R_0 > 0\}$. Пусть число $\alpha > 0$ и $C_R \overset{\Delta}{=} \{z|\ \ |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $R > R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R) \overset{\Delta}{=} \max\{|\Phi(z)|\ \ z \in C_R\}$ при $R > R_0$. Если $\lim\limits_{R\to\infty}\varepsilon(R) = 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)dz = 0$.

④ Находим особые точки функции $f(z)=\dfrac{ze^{i\sqrt{2}z}}{(2z^2+1)e^i}=\dfrac{ze^{i\sqrt{2}z}}{2\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^i}$ как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z=\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ и $z=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$. Таким образом, точки $z=\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ и $z=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ - полюса[4] 1-го порядка (ПП – простые полюса).

⑤ Вычисляем вычет в простом полюсе $z=\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ по формуле $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z)=\lim\limits_{z\to\frac{i}{\sqrt{2}}}\left(z-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)f(z)$. Получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z)=\left.\frac{ze^{i\sqrt{2}z}}{2\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^i}\right|_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-1}}{2\left(2\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^i}=\frac{e^{-1-i}}{4}$$

⑥ Вычисляем несобственный интеграл по формуле (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(\sqrt{2}x-1)}}{2x^2+1}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}} f(z)=2\pi i\frac{e^{-1-i}}{4}=\frac{\pi i}{2e}e^{-i}=\frac{\pi i}{2e}\left(\cos(-1)+i\sin(-1)\right)=\frac{\pi i}{2e}\left(\cos 1-i\sin 1\right).$$

⑦ Используя формулу (1), находим искомый интеграл:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\left(1-\sqrt{2}x\right)}{2x^2+1}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\left(\sqrt{2}x-1\right)}{2x^2+1}dx=-\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(\sqrt{2}x-1)}}{2x^2+1}dx=-\operatorname{Im}\frac{\pi i}{2e}\left(\cos 1-i\sin 1\right)=-\frac{\pi\cos 1}{2e}$$

Ответ: $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\left(1-\sqrt{2}x\right)}{2x^2+1}dx=-\frac{\pi\cos 1}{2e}}$

[4] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

2003/2004 34

5⑥ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}}\cdot\frac{1}{x-2}dx$.

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 151 – 158 (пример 11 стр. 151-152, пример 12 стр. 153-154, пример 13 стр. 154-156), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 3 стр. 111 – 114)

① Чтобы вычислить этот интеграл J с помощью теории вычетов, продолжая подынтегральную функцию в комплексную плоскость, мы вынуждены иметь дело с многозначной функцией $\left\{\sqrt[7]{z^3(1-z)^4}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash[0,1]$, что проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [0, 1] прринимает значения арифметического корня $\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}\geq 0$, т.е. обозначим через g регулярную ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[7]{z^3(1-z)^4}\right\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[0,1]$ такую, что ее предел из из верхней полуплоскости в точках $x\in(0,1)$, т.е. на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [0, 1] равен

$$g(x+i0)=\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}>0\,. \tag{1}$$

$$\boxed{g(z)=\sqrt[7]{\left|z^3(1-z)^4\right|}e^{\frac{i}{7}\left(3\Delta_\gamma\arg(z)+4\Delta_\gamma(1-z)\right)}}^{3}\ - \tag{2}$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (1).

Отметим, что предельное значение функции g из нижней полуплоскости в точках $x\in(0,1)$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку [-2, -1], принимает по формуле (2) значение

$$\boxed{g(x-i0)}=\sqrt[7]{\left|x^3(1-x)^4\right|}e^{\frac{i}{7}\left(3\Delta_\gamma\arg(z)+4\Delta_\gamma(1-z)\right)}=g(x+i0)e^{\frac{i}{7}(3\cdot 2\pi+4\cdot 0)}{}^{4}=\boxed{g(x+i0)e^{\frac{i6\pi}{7}}} \tag{3}$$

В формуле (3) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза.

③ Пусть $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим в области G контур γ_ε, имеющий вид «гантели», т.е. составленный из окружностей $C_{0\varepsilon}$ и $C_{1\varepsilon}$ радиуса ε и центрами в точках 0 и 1 соответственно, а также двух берегов I_ε^+ и I_ε^- разреза по отрезку $[+\varepsilon,1-\varepsilon]$.

Ориентируем полученный контур γ_ε положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости.

Рассмотрим интеграл $J_\varepsilon\overset{\Delta}{=}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz$, где $f(z)\overset{\Delta}{=}\frac{z+1}{(z-2)g(z)}$.

По теореме о вычетах[5], с одной стороны, и из формы контура γ_ε с другой, получаем равенства

---

[1] $\sqrt[7]{z^3(1-z)^4}=\sqrt[7]{\left|z^3(1-z)^4\right|}e^{\frac{i}{7}\left(3\varphi_{01}+3\Delta_\gamma\arg(z)+4\varphi_{02}+4\Delta_\gamma(1-z)+2\pi k\right)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\neq 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}}\arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] $g(x+i0)=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{\frac{i}{5}(4\varphi_{01}++\varphi_{02}+2\pi k)}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi}e^{i2\pi l}$, т.е.

$$\frac{(4\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}{5}=2\pi l$$

[4] или $g(x+i0)e^{\frac{i}{7}(3\cdot 0+4\cdot(-2\pi))}$

[5] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=2} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right]=^{6}=\left(\int\limits_{I_\varepsilon^+}+\int\limits_{I_\varepsilon^-}+\int_{C_{1\varepsilon}}+\int_{C_{2\varepsilon}}\right)f(z)dz\,. \qquad (4)$$

④ Точка $z=2$ ПП (П[1]) – простой полюс[7] (полюс первого порядка), поэтому вычет[8] в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\frac{3}{g(2)}^{9}=\frac{3}{\sqrt[7]{\left|2^3(1-2)^4\right|}e^{\frac{i}{7}(3\cdot 0+4(-\pi))}}=\frac{3e^{\frac{i4\pi}{7}}}{\sqrt[7]{2^3}}\,.$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[10]) разложим[11] эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$:

$$f(X)=\frac{X+1}{(X-2)g(X)}=\frac{\left(1+\frac{1}{X}\right)}{\left(1-\frac{2}{X}\right)\sqrt[7]{\left|X^3(1-X)^4\right|}e^{\frac{i}{7}(3\cdot 0+4(-\pi))}}=\frac{\left(1+\frac{1}{X}\right)\left(1-\frac{2}{X}\right)^{-1}}{X\sqrt[7]{\left|\left(1-\frac{1}{X}\right)^4\right|}e^{-\frac{i4\pi}{7}}}=$$

$$\frac{1}{X}\left(1+\frac{1}{X}\right)\left(1+\frac{2}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1-\frac{1}{X}\right)^{-\frac{4}{7}}e^{\frac{i4\pi}{7}}=\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}\right)\left(1+\frac{2}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1+\frac{4}{7}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i4\pi}{7}}=$$

$\left(\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i4\pi}{7}}$. По теореме единственности[12] имеем: $f(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{i4\pi}{7}}+o\left(\frac{1}{z}\right)$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=e^{\frac{i4\pi}{7}}$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=-e^{\frac{i4\pi}{7}}$ [13].

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k} f$.

[6] Особыми точками функции f являются: $z=\infty$, нули знаменателя: $z=0$, особые точки числителя: $\varnothing$, особые точки знаменателя: $\varnothing$ (**в *G*!!!**)

[7] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$.

[8] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_{a} f=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[9] Для вычисления $g(0)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z=0$

[10] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

[11] $\operatorname*{res}_{a} f=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.

[12] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f:G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0\ \ \forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv 0$ на области G.

[13] $\operatorname*{res}_{\infty} f=-c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

Таким образом, $J_\varepsilon = 2\pi i\left[\underset{z=2}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z)\right] = 2\pi i\left[\frac{3e^{\frac{i4\pi}{7}}}{\sqrt[7]{2^3}} - e^{\frac{i4\pi}{7}}\right] = 2\pi i\left[\frac{3}{\sqrt[7]{2^3}} - 1\right]e^{\frac{i4\pi}{7}}$

⑤ Оценим интегралы по окружностям $C_{0\varepsilon} = \{z : |z| = \varepsilon\}$ и $C_{1\varepsilon} = \{z : |z-1| = \varepsilon\}$:

$$\left|\int_{C_{-2\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon+1}{\sqrt[7]{\varepsilon^3(1-\varepsilon)^4}} \cdot \frac{1}{\varepsilon-2}\varepsilon d\varphi \le A\cdot\varepsilon^{\frac{4}{7}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

$$\left|\int_{C_{-1\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{1+\varepsilon+1}{\sqrt[7]{(1+\varepsilon)^3(1-(1-\varepsilon))^4}} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon-2}\varepsilon d\varphi \le B\cdot\varepsilon^{\frac{3}{7}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

⑥ В силу формул (1) и (3) получаем выражения:

$$\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz = \int_{0+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x+1}{g(x+i0)} \cdot \frac{1}{(x-2)}dx = \int_{0+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x+1}{\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}} \cdot \frac{1}{(x-2)}dx^{14},$$

$$\int_{I_\varepsilon^-} f(z)dz = \int_{1-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{x+1}{g(x-i0)} \cdot \frac{1}{(x-2)}dx = -\int_{0+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x+1}{g(x+i0)e^{\frac{i6\pi}{7}}} \cdot \frac{1}{(x-2)}dx = -e^{-\frac{i6\pi}{7}}\int_{0+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x+1}{g(x+i0)} \cdot \frac{1}{(x-2)}dx =$$

$$-e^{-\frac{i6\pi}{7}}\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz.$$

⑦ Переходя в формуле (4) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем равенство:

$$2\pi i\left[\frac{3}{\sqrt[7]{2^3}} - 1\right]e^{\frac{i4\pi}{7}} = \left(1 - e^{-\frac{i6\pi}{7}}\right)J = \left(1 - e^{\frac{i8\pi}{7}}\right)J,$$

т.е. $\pi\left[\frac{3}{\sqrt[7]{2^3}} - 1\right] = \frac{\left(e^{-\frac{i4\pi}{7}} - e^{\frac{i4\pi}{7}}\right)}{2i}J$, $J = -\dfrac{\pi\left[\frac{3}{\sqrt[7]{2^3}} - 1\right]}{-\sin\frac{4\pi}{7}} = \dfrac{\pi\left[1 - \frac{3}{\sqrt[7]{8}}\right]}{\sin\frac{4\pi}{7}}$

Ответ: $\boxed{\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[7]{x^3(1-x)^4}} \cdot \frac{1}{x-2}dx = \frac{\pi\left[1 - \frac{3}{\sqrt[7]{8}}\right]}{\sin\frac{4\pi}{7}}}$

2003/2004 34

6⑦ Пусть $h(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\mathrm{Ln}\dfrac{\frac{1}{2}+iz}{1-z}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\left\{z:|z|=1,\ -\dfrac{3\pi}{2}\le\arg z\le 0\right\}\cup\left[\dfrac{i}{2},i\right]$ такая, что $\operatorname{Im}h(\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$. Найти $h(0)$ и вычислить интеграл $J=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}}\dfrac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}dz$.

Шабунин, Сидоров стр. 81 – 119 (пример 8 стр. 108-110, пример 10 стр. 111-113, пример 11 стр. 113-116), Половинкин$_{н}$ стр. 108 – 115

① Прежде всего следует проверить, что в заданной области действительно существуют регулярные ветви функции $\left\{\mathrm{Ln}\dfrac{\frac{1}{2}+iz}{1-z}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\setminus\gamma$, что легко проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая удовлетворяет условию $\operatorname{Im}h(\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$:

$$h(z)=\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+iz}{1-z}\right|+i\left(\varphi_{01}-\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg\left(\frac{1}{2}+iz\right)-\Delta_\gamma\arg(1-z)+2\pi l\right)\to\operatorname{Im}h(\infty)=\varphi_{01}-\varphi_{02}+2\pi l=-\frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{h(z)=\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+iz}{1-z}\right|+i\left(-\frac{\pi}{2}+\Delta_\gamma\arg\left(\frac{1}{2}+iz\right)-\Delta_\gamma\arg(1-z)\right)}\ -\qquad(1)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию $\operatorname{Im}h(\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$.

③ $$\boxed{h(0)}=\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-i0}{1-0}\right|+i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\pi\right)=\boxed{-\ln 2-i2\pi}$$

---

[1] $$\mathrm{Ln}\frac{\frac{1}{2}+iz}{1-z}=\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2}+iz\right)-\mathrm{Ln}(1-z)=$$
$$\ln\left|\frac{1}{2}+iz\right|+i\left(\varphi_{01}+\Delta_\gamma\arg\left(\frac{1}{2}+iz\right)+2\pi k_1\right)-\ln|1-z|-i\left(\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(1-z)+2\pi k_2\right)=$$
$$\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+iz}{1-z}\right|+i\left(\varphi_{01}-\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg\left(\frac{1}{2}+iz\right)-\Delta_\gamma\arg(1-z)+2\pi l\right)$$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\neq 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}}\arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

④ Находим особые точки $f(z)=\dfrac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}$.

Особыми точками являются: $z=\infty$ - НОТ,

особые точки числителя: $\varnothing$,

нули знаменателя: $z=i\pi k$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ - П[3] (полюсы 3-го порядка)[3]

$$\operatorname{sh}^3 i\pi k = i^3\sin^3\pi k=0,\ \left(\operatorname{sh}^3 z\right)'\Big|_{z=i\pi k}=3\operatorname{sh}^2 z\operatorname{ch} z\Big|_{z=i\pi k}=0,$$

$$\left(\operatorname{sh}^3 z\right)''\Big|_{z=i\pi k}=\left(3\operatorname{sh}^2 z\operatorname{ch} z\right)'\Big|_{z=i\pi k}=\left(6\operatorname{sh} z\operatorname{ch}^2 z+3\operatorname{sh}^3 z\right)\Big|_{z=i\pi k}=0,$$

$$\left(\operatorname{sh}^3 z\right)'''\Big|_{z=i\pi k}=\left(6\operatorname{sh} z\operatorname{ch}^2 z+3\operatorname{sh}^3 z\right)'\Big|_{z=i\pi k}=$$

$$\left(6\operatorname{ch}^3 z+12\operatorname{sh}^2 z\operatorname{ch} z+9\operatorname{sh}^2 z\operatorname{ch} z\right)\Big|_{z=i\pi k}=6\neq 0$$

особые точки знаменателя: $\varnothing$.

Внутри контура $\gamma=\left\{z:|z|=1,\ -\dfrac{3\pi}{2}\le\arg z\le 0\right\}\cup\left[\dfrac{i}{2},i\right]$ находится: $z=0$ - П[3].

⑤ Интеграл $J=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{4}}\dfrac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}dz$, можно вычислить по формуле $J=2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{z=0}\dfrac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}\right)$[4].

⑥ Точка $z=0$ - П[3] (полюс 3-го порядка), поэтому вычет[5] в этой точке равен $\operatorname*{res}\limits_{z=0}\dfrac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{(3-1)!}\dfrac{d^2}{dz^2}\left(z^3\dfrac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}\right)$. ☹

Кроме того, $\operatorname*{res}\limits_{z=0}\dfrac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}=c_{-1}$[6], где c_{-1} - коэффициент разложения функции $\dfrac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}$ в ряд Лорана с центром в конечной точке $z=0$ при $\dfrac{1}{z}$.

$$h(z)=\operatorname{Ln}\frac{\frac{1}{2}+iz}{1-z}=\operatorname{Ln}\frac{1}{2}+\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}+i2z\right)-\operatorname{Ln}(1-z)^{7}=\operatorname{Ln}\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(i2z)^k-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)}{k}(z)^k+i2\pi k^{\,8}.$$

---

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

[4] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n\in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k}f$.

[5] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_a f=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}f(z)dz$.

[6] $\operatorname*{res}\limits_a f=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\dfrac{1}{z}$.

[7] Многозначные функции $\operatorname{Ln}(-2)$, $\operatorname{Ln}\left(1-\dfrac{iz}{2}\right)$ и $\operatorname{Ln}(1-z)$ также имеют регулярные ветви.

[8] Половинкин §9 пример 4: $h_0(z)=\ln|z|+i\arg_{\text{гл}}z$, $\arg_{\text{гл}}z\in(-\pi,\pi)$. $h_0(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$, $z\in B_1(0)$.

Т.к. $h(0) = -\ln 2 - i2\pi$, то $h(z) = -\ln 2 - i2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(i2z)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}(z)^k =$

$$= -\ln 2 - i2\pi + i2z - \frac{1}{2}(i2z)^2 + \frac{1}{3}(i2z)^3 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} o(z^3) =$$

$$= -\ln 2 - i2\pi + (1 + i2)z + \frac{1}{2}(1+4)z^2 + \frac{1}{3}(1 - 8i)z^3 + o(z^3) =$$

$$= -\ln 2 - i2\pi + (1 + i2)z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{1}{3}(1 - 8i)z^3 + o(z^3).$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^3 z} = \frac{1}{\left(z + \frac{z^3}{3!} + o(z^4)\right)^3} = \frac{1}{z^3\left(1 + \frac{z^2}{6} + o(z^3)\right)^3} = \frac{1 - 3\frac{z^2}{6} + o(z^3)}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + o(1)$$

Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(-\ln 2 - i2\pi)$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + i\pi$.

⑥ Окончательно $\boxed{J =} 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\operatorname{sh}^3 z}\right) = 2\pi i\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + i\pi\right) \boxed{= -2\pi^2 + i\pi(5 + \ln 2)}$