Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 1, осенний семестр 2002/2003 уч.г.

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-i)$ функцию

$$f(z)=\frac{3z}{z^2-2iz+8}+\frac{4i}{z^2+4}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=1$.

2.④ Найти все особые точки функции

$$f(z)=\frac{z\cdot e^{1/\sin z}}{(2z+\pi)\sin z\cdot\cos 2z}\ ,$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

3.④ $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{ze^{2i/z}}{z-2i}\,dz\ .$

4.③ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}\,dx\ .$

5.⑥ $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2\cdot\sqrt[4]{x^3(1-x)}}\ .$

6.⑥ Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\mathrm{Ln}(1+z^2)$ в плоскости с разрезом по лучу мнимой оси $[-i;+i\infty)$, причем $\mathrm{Im}\,f\left(-\dfrac{1}{5}\right)=0$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости полученного ряда. Вычислить сумму ряда в точке $z=$ $=-\dfrac{1}{5}$.

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 2, осенний семестр 2002/2003 уч.г.

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1-i)$ функцию
$$f(z)=\frac{i}{z^2+(6-i)z+9-3i}+\frac{2z}{z^2-9}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z=-2$.

2.④ Найти все особые точки функции
$$f(z)=\frac{\operatorname{tg} z\cdot e^{\operatorname{tg} z}}{\operatorname{tg} 4z}\ ,$$
определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

3.④ $$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2\sin\frac{i}{z}}{z-i}\,dz\ .$$

4.③ $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(7-10x)}{5x^2-3x+1}\,dx\ .$$

5.⑥ $$\int_1^2\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{3x-x^2-2}}\ .$$

6.⑥ Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{9-z^2}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $|z-4i|=5$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, причем $f(4i)=5$. Разложить $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности $z=\infty$ и найти область сходимости полученного ряда. Вычислить сумму ряда в точке $z=4i$.

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП
Курс: 3, Вариант: 3, осенний семестр 2002/2003 уч.г.

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1+i)$ функцию

$$f(z)=\frac{4i}{z^2+2iz+3}+\frac{z-3i}{z^2+1}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=0$.

2.④ Найти все особые точки функции

$$f(z)=\frac{(2z-\pi)\cdot e^{1/\cos z}}{z\cos 2z\cdot\cos z}\ ,$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

3.④ $\displaystyle\oint_{|z+i|=1}\frac{\sin iz}{(1+z^2)^2}\,dz$.

4.③ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(3-6x)}{3x^2-4x+3}\,dx$.

5.⑥ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+2)\cdot\sqrt{-x(x+1)}}$.

6.⑥ Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\mathrm{Ln}(1-z^2)$ в плоскости с разрезом по лучу действительной оси $(-\infty;1]$, причем $\mathrm{Im}\,f\left(\dfrac{i}{5}\right)=$ $=0$. Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+i)$ и найти радиус сходимости полученного ряда. Вычислить сумму ряда в точке $z=\dfrac{i}{5}$.

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП
Курс: 3, Вариант: 4, осенний семестр 2002/2003 уч.г.

1.④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ функцию
$$f(z) = \frac{1}{z^2 + (i-4)z + 4 - 2i} + \frac{2iz}{z^2-4}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = 2i$.

2.④ Найти все особые точки функции
$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z \cdot e^{\operatorname{ctg} z}}{\operatorname{ctg} 4z} ,$$
определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

3.④ $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\, dz$.

4.③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(7-8x)}{4x^2+5x+3}\, dx$.

5.⑥ $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \cdot \frac{dx}{(x+3)^2}$.

6.⑥ Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{z^2+16}$ в плоскости с разрезом по дуге окружности $|z+3| = 5$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, причем главная часть $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ равна z . Разложить $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z и найти радиус сходимости полученного ряда. Вычислить сумму ряда в точке $z = 3$.

1.④ $f(z) = \dfrac{2}{z-4i} + \dfrac{1}{z-2i} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z-i)^n}{3^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{i^n}{(z-i)^{n+1}}$

2.④ $z = -\dfrac{\pi}{2}$, $z_k = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$ — полюсы 1-го порядка,
$z_l = \pi l$ — С.О.Т., ∞ — неизол. О.Т.

3.④ $I = 4\pi(e-2)$

ответ к 24.4

4.③ $I = 2\pi \sin 12 \dfrac{e^{-\sqrt{23}}}{\cancel{\sqrt{23}}}$ $\sqrt{31}$ $I = 2\pi \cos 4 \dfrac{e^{-\sqrt{31}}}{\sqrt{31}}$

5.⑥ $I = \dfrac{7\pi\sqrt[4]{2}}{8}$

6.⑥ $f(z) = 2\pi i + \ln 2 + \sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\dfrac{1}{(1+i)^n} + \dfrac{1}{(1-i)^n}\right)(z-1)^n$,

$R = \sqrt{2}$, $S\left(-\dfrac{1}{5}\right) = 2\pi i + \ln\dfrac{26}{25}$

1.④ $f(z) = \dfrac{1}{z+3-i} + \dfrac{1}{z-3} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(z-1-i)^n}{4^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2-i)^n}{(z-1-i)^{n+1}}$

2.④ $z_m = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi m}{4}$ — У.О.Т., $z_k = \dfrac{\pi k}{4}$ — $k \neq 0$ $k = 4n$ полюсы 1-го порядка,

$z_l = \dfrac{\pi}{2} + \pi l$ — С.О.Т., ∞ — неизол. О.Т. $\left.\begin{matrix} z_0 = 0 \\ z = \pi n \end{matrix}\right\}$ – УОТ

3.④ $I = 2\pi i(\sin 1 - 1)$

4.③ $I = 2\pi \cos 4 \dfrac{e^{-\sqrt{11}}}{\sqrt{11}}$

5.⑥ $I = \dfrac{3\pi}{4\sqrt{2}}$

6.⑥ $f(z) = i \sum\limits_{0}^{\infty} C_{1/2}^{n} \dfrac{(-1)^n 9^n}{z^{2n-1}}$, $|z| > 3$, $S(4i) = -5$

1.④ $f(z)=\frac{2}{z+i}-\frac{1}{z+3i}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1+i)^n}{(1+2i)^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{(z-1+i)^{n+1}}$

2.④ $z=0$, $z_m=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$ — полюсы 1-го порядка,

$z_l=\frac{\pi}{2}+\pi l$ — С.О.Т., ∞ — неизол. О.Т.

3.④ $I=(\cos 1-\sin 1)\frac{\pi}{2}$

4.③ $I=-2\pi\sin 1\frac{e^{-\sqrt{20}}}{\sqrt{20}}$

5.⑥ $I=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

6.⑥ $f(z)=\ln 2-2\pi i+\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{(-1)^n}{(1+i)^n}+\frac{1}{(1-i)^n}\right)(z+i)^n$,

$R=\sqrt{2}$, $S\left(\frac{i}{5}\right)=-2\pi i+\ln\frac{26}{25}$

Ответы. ТФКП, 3 курс, 1 семестр, 2002/2003 г. **Вариант [illegible]**

---

1. ④ $f(z) = \dfrac{i}{z+2} + \dfrac{i}{z-2+i} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{i(z-1)^n}{3^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{i(1-i)^n}{(z-1)^{n+1}}$

---

2. ④ $z_l = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi l}{4}$ — полюсы 1-го порядка, $z_m = \pi m$ — С.О.Т.,

$z_k = \dfrac{\pi k}{4}$, $k \neq 4p$ — У.О.Т., ∞ — неизол. О.Т.

---

3. ④ $I = -\dfrac{2\pi i}{3}$

---

4. ③ $I = 2\pi \cos 4 \dfrac{e^{-\sqrt{31}}}{\sqrt{31}}$

---

5. ⑥ $I = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{100}$

---

6. ⑥ $f(z) = -4 \sum\limits_{1}^{\infty} C_{1/2}^{n} \dfrac{z^{2n}}{16^n}$, $|z| < 4$, $S(3) = -5$