6⑦ Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[4]{2z^4-2z^2}\right\}$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1;1]$ такая, что $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{2}}$. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\cos\frac{1}{z}}{g(z)+iz}dz$.

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 81 – 119 (пример 9 стр. 110-111, пример 12 стр. 103-115), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 4 стр. 114 – 115)

① Прежде всего следует проверить, что в заданной области действительно существуют регулярные ветви функции $\left\{\sqrt[4]{2z^4-2z^2}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\setminus\gamma$, что легко проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая удовлетворяет условию $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{2}}$:

$$\underline{g(z)} = \sqrt[4]{\left|2z^2(z-1)(z+1)\right|}\, e^{\frac{i}{4}\left(2\Delta_\gamma \arg z+\Delta_\gamma \arg(z-1)+\Delta_\gamma \arg(z+1)\right)} e^{\frac{i}{4}\left(2\arg z_0+\arg(z_0-1)+\Delta_\gamma \arg(z_0+1)+2\pi k^*\right)} =$$

$$= \sqrt[4]{\left|2z^2(z-1)(z+1)\right|}\, e^{\frac{i}{4}\left(2\Delta_\gamma \arg z+\Delta_\gamma \arg(z-1)+\Delta_\gamma \arg(z+1)\right)} \frac{\sqrt[4]{\left|2z_0^2(z_0-1)(z_0+1)\right|}}{\sqrt[4]{\left|2z_0^2(z_0-1)(z_0+1)\right|}} e^{\frac{i}{4}\left(2\arg z_0+\arg(z_0-1)+\Delta_\gamma \arg(z_0+1)+2\pi k^*\right)} =$$

$$= g(z_0)\sqrt[4]{\left|\frac{2z^2(z-1)(z+1)}{2z_0^2(z_0-1)(z_0+1)}\right|}\, e^{\frac{i}{4}\left(2\Delta_\gamma \arg z+\Delta_\gamma \arg(z-1)+\Delta_\gamma \arg(z+1)\right)} = \underline{\sqrt[4]{\left|2z^4-2z^2\right|}\, e^{\frac{i}{4}\left(2\Delta_\gamma \arg z+\Delta_\gamma \arg(z-1)+\Delta_\gamma \arg(z+1)\right)} e^{\frac{i}{4}\alpha}}, \text{ т.о.}$$

$$g(\sqrt{2})=\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{2}} = \sqrt[4]{\left|2(\sqrt{2})^4-2(\sqrt{2})^2\right|}\, e^{\frac{i}{4}(2\cdot 0+0+0)} e^{\frac{i}{4}\alpha} = \sqrt[4]{\left|2\cdot 4-2\cdot 2\right|}\, e^{\frac{i}{4}\alpha} = \sqrt[4]{4}\, e^{\frac{i}{4}\alpha} = \sqrt{2}\, e^{\frac{i}{4}\alpha}, \text{ т.е.}$$

$$e^{\frac{i}{4}\alpha} = e^{\frac{-i\pi}{2}} = -i.$$

$$\boxed{g(z) = -i\sqrt[4]{\left|2z^4-2z^2\right|}\, e^{\frac{i}{4}\left(2\Delta_\gamma \arg z+\Delta_\gamma \arg(z-1)+\Delta_\gamma \arg(z+1)\right)}} - \qquad (1)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{2}}$.

③ Найдем ИОТОХ подынтегральной функции $f(z)=\dfrac{\cos\frac{1}{z}}{g(z)+iz}$.

$z=0$ - СОТ[3] для $\cos\frac{1}{z}$, но является ТВ[4] для $\left\{\sqrt[4]{2z^4-2z^2}\right\}$, т.е не ОТОХ, находится на разрезе ☺,

$z=\infty$ - УОТ[5],

---

[1] $$\sqrt[4]{2z^4-2z^2} = \sqrt[4]{2z^2(z-1)(z+1)} = \sqrt[4]{\left|2z^2(z-1)(z+1)\right|}\, e^{\frac{i}{4}\left(2\Delta_\gamma \arg z+\Delta_\gamma \arg(z-1)+\Delta_\gamma \arg(z+1)\right)} e^{\frac{i}{4}\left(2\arg z_0+\arg(z_0-1)+\Delta_\gamma \arg(z_0+1)+2\pi k\right)} =$$

$$= \sqrt[4]{\left|2z^2(z-1)(z+1)\right|}\, e^{\frac{i}{4}\left(2\Delta_\gamma \arg z+\Delta_\gamma \arg(z-1)+\Delta_\gamma \arg(z+1)\right)} e^{\frac{i}{4}\alpha} = \sqrt[4]{\left|2z^2(z-1)(z+1)\right|}\, e^{\frac{i}{4}\left(2\Delta_\gamma \arg z+\Delta_\gamma \arg(z-1)+\Delta_\gamma \arg(z+1)\right)} C$$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\neq 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = (2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

[4] **Определение**. Пусть дана точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$, и пусть аналитическая функции $\mathcal{F}$ определена в ее проколотой окрестности $\overset{\circ}{B}_R(a)$ и неоднозначна в этой окрестности. Тогда точка a называется ***точкой ветвления аналитической функции*** $\mathcal{F}$.

$z=\pm\sqrt{2}$ - ПП (П[1]) [6], т.к.

$g(z)+iz=0$, или $g(z)=-iz$, или $g^4(z)=2z^4-2z^2=(-iz)^4$, т.е. $2z^4-2z^2=z^4$, или $z^4-2z^2=0$, или $(z^2-2)z^2=0$, т.е. $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $z_{3,4}=0$ - лежат на разрезе.

❶ $g(\sqrt{2})=-i\sqrt{2}$ - по условию, т.е. $(g(z)+iz)\big|_{z=\sqrt{2}}=0$ и $z=\sqrt{2}$ - полюс подынтегральной функции $f(z)$. Определим его порядок: из $g^4(z)=2z^4-2z^2$ получаем, что $4g^3(z)g'(z)=8z^3-4z$, т.е. $g'(z)=\dfrac{(2z^2-1)z}{g^3(z)}$ и $(g'(z)+i)\big|_{z=\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{(-i\sqrt{2})^3}+i=\dfrac{3}{2i}+i=-\dfrac{1}{2}i\neq 0$. Т.о. $z=\sqrt{2}$ - простой полюс.

❷ $g(-\sqrt{2})=-i\sqrt[4]{\left|2(-\sqrt{2})^4-2(-\sqrt{2})^2\right|}\,e^{\frac{i}{4}(2\pi+\pi+\pi)}=-i\sqrt{2}\,e^{i\pi}=i\sqrt{2}$, т.е. $(g(z)+iz)\big|_{z=-\sqrt{2}}=0$ и $z=-\sqrt{2}$ - полюс подынтегральной функции $f(z)$. Определим его порядок: т.к. $g'(z)=\dfrac{(2z^2-1)z}{g^3(z)}$, то $(g'(z)+i)\big|_{z=-\sqrt{2}}=\dfrac{-3\sqrt{2}}{(i\sqrt{2})^3}+i=\dfrac{3}{2i}+i=-\dfrac{1}{2}i\neq 0$. Т.о. $z=-\sqrt{2}$ - простой полюс.

④ Интеграл $I=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}} f(z)dz$, можно вычислить по формуле $I=-2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{z=\sqrt{2}} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=-\sqrt{2}} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)\right)$[7].

❶ $$\operatorname*{res}_{z=\sqrt{2}} f(z)=\left.\frac{\cos\frac{1}{z}}{(g(z)+iz)'}\right|_{z=\sqrt{2}}=\frac{\cos\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{2}i}=2i\cos\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

❷ $$\operatorname*{res}_{z=-\sqrt{2}} f(z)=\left.\frac{\cos\frac{1}{z}}{(g(z)+iz)'}\right|_{z=-\sqrt{2}}=\frac{\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{-\frac{1}{2}i}=2i\cos\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

❸ $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-C_{-1}=\dfrac{i}{\left(1-\sqrt[4]{2}\right)}$, т.к.

Для определения C_{-1} разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$:

---

[5] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

[6] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

[7] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n\in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

$$f(X)=\frac{\cos\frac{1}{X}}{g(X)+iX} = \frac{\cos\frac{1}{X}}{-i\sqrt[4]{\left|2X^4-2X^2\right|}\,e^{\frac{i}{4}(2\cdot 0+0+0)}+iX} = \frac{\cos\frac{1}{X}}{-i\sqrt[4]{2}X\sqrt[4]{1-\frac{1}{X^2}}+iX} =$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)}{iX\left(1-\sqrt[4]{2}\left(1-\frac{1}{4X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\right)} = \frac{1-\frac{1}{2X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)}{iX\left(1-\sqrt[4]{2}+\frac{\sqrt[4]{2}}{4X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)} = \frac{1-\frac{1}{2X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)}{i\left(1-\sqrt[4]{2}\right)X\left(1+\frac{\sqrt[4]{2}}{4\left(1-\sqrt[4]{2}\right)X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)} =$$

$$\frac{1}{i\left(1-\sqrt[4]{2}\right)X}\left(1-\frac{1}{2X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right)\left(1-\frac{\sqrt[4]{2}}{4\left(1-\sqrt[4]{2}\right)X^2}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)\right) = \frac{1}{i\left(1-\sqrt[4]{2}\right)X}+o\left(\frac{1}{X^2}\right)$$

и, согласно теореме единственности[8], $C_{-1}=\frac{-i}{\left(1-\sqrt[4]{2}\right)}$.

⑤ Окончательно получаем

$$I=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=\sqrt{2}} f(z)+\operatorname*{res}_{z=-\sqrt{2}} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right) = -2\pi i\left(2i\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+2i\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\left(1-\sqrt[4]{2}\right)}\right) = 8\pi\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2\pi}{\left(1-\sqrt[4]{2}\right)}.$$

Ответ: $\boxed{8\pi\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2\pi}{\left(1-\sqrt[4]{2}\right)}}$

[8] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f:G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0\ \ \forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv 0$ на области G.