2003/2004 32

1④ Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3\cos z\cdot\cos\left(\dfrac{1}{z-\pi}\right)}{(\sin z-1)^2}e^{\cos z\big/\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$, определить их тип. Ответ обосновать.

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 64 – 70 (примеры 9 - 13 стр. 68 – 72), Половинкин стр. 85 – 95 (примеры 1 - 4 стр. 91 – 93)

① $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функция $\psi(z)$ регулярна при всех z. Поэтому особые точки функции $f(z)$ определяются особыми точками функции $\varphi(z)$ и нулями знаменателя $\psi(z)$.

Кандидаты в особые точки: $z=\dfrac{\pi}{2}$ - нуль знаменателя аргумента экспоненты,

$z=\pi$ - нуль знаменателя аргумента косинуса в числителе,

$z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$ - нули знаменателя,

$z=\infty$.

② Покажем, что точка $z=\dfrac{\pi}{2}$ является устранимой особой точкой[1] для функции $f(z)$:

проведем замену $t=z-\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$f(t)=\frac{t^3\sin t\cdot\cos\left(\dfrac{1}{t-\frac{\pi}{2}}\right)}{(\cos t-1)^2}e^{\sin t/t}=\frac{t^4\cdot\cos\left(-\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}+o(1)\right)+o(t^5)}{\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)-1\right)^2}e^{\left(t+o(t^2)\right)/t}=\frac{t^4\cdot\cos\left(-\frac{2}{\pi}+o(1)\right)+o(t^5)}{\frac{t^4}{4}+o(t^5)}e^{1+o(t)}$$

$$\xrightarrow[t\to0]{} 4e\cos\frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, $\boxed{z=0\ \text{- УОТ}}$ для $f(z)$.

③ Покажем, что точка $z=\pi$ является существенно особой[2] для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_l=\pi+\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi l}$, тогда $\lim\limits_{l\to\infty}z_l=\pi$, а $\lim\limits_{l\to\infty}\cos\left(\dfrac{1}{z_l-\pi}\right)=\cos\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2\pi l}\right)}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi l\right)=0$, т.е. $\lim\limits_{l\to\infty}f(z_l)=0$;

пусть теперь $z_m=\pi+\dfrac{1}{2\pi m}$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=\pi$, а $\lim\limits_{m\to\infty}\cos\left(\dfrac{1}{z_m-\pi}\right)=\cos\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2\pi m}\right)}=\cos(2\pi m)=1$, т.е.

$$\lim_{m\to\infty}f(z_m)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cos(\pi)\cdot\cos(2\pi m)}{(\sin\pi-1)^2}e^{\left(\cos\pi\big/\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi^3}{8}e^{-2/\pi}\neq0.$$

---

[1] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

Следовательно, $\boxed{z=\pi \text{ - СОТ}}$ для $f(z)$.

③ Рассмотрим точки $z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=\pm 1,\pm 2,\dots$, в которых нули знаменателя совпадают с нулями числителя функции $f(z)$. Произведем замену: $t=z-\dfrac{\pi}{2}-2\pi k$. Тогда $f(t)=$

$$=\frac{(t+2\pi k)^3\cos\left(t+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{t-\frac{\pi}{2}+2\pi k}\right)}{\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-1\right)^2}e^{\left(\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}{t+2\pi k}\right)}=$$

$$=\frac{-(t+2\pi k)^3\sin(t+2\pi k)\cdot\cos\left(\frac{1}{2\pi k-\frac{\pi}{2}}+o(1)\right)}{(\cos(t+2\pi k)-1)^2}e^{\left(\frac{-\sin(t+2\pi k)}{t+2\pi k}\right)}=\frac{-(t+2\pi k)^3\sin(t)\cdot\cos\left(\frac{1}{2\pi k-\frac{\pi}{2}}+o(1)\right)}{(\cos(t)-1)^2}e^{\left(\frac{-\sin(t)}{t+2\pi k}\right)}=$$

$$=\frac{-(2\pi k)^3 t\cdot\cos\left(\frac{1}{2\pi k-\frac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o(t^2)}{\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)-1\right)^2}e^{\left(\frac{-t+o(t^2)}{2\pi k+o(1)}\right)}=\frac{-(2\pi k)^3 t\cdot\cos\left(\frac{1}{2\pi k-\frac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o(t^2)}{\frac{t^4}{4}+o(t^5)}e^{o(1)}=$$

$$=\frac{-(2\pi k)^3\cdot\cos\left(\frac{1}{2\pi k-\frac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o(t)}{\frac{t^3}{4}+o(t^4)}e^{o(1)}\xrightarrow[t\to 0]{}\infty$$ - полюсы[3] 3-го порядка.

Точки $\boxed{z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=\pm 1,\pm 2,\dots \text{ - полюсы 3-го порядка}}$ для функции $f(z)$.

④ $\boxed{z=\infty \text{ - неизолированная особая точка}}$ (НОТ)[4], т.к. в любой ее окрестности есть полюсы 3-го порядка $z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k=\pm 1,\pm 2,\dots$ (точка накопления полюсов).

---

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

[4] **Определение**. Пусть функция f определена и регулярна в проколотой окрестности точки $a\in\overline{\mathbb{C}}$, т.е. на множестве $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$, $\rho>0$. Тогда точку a называют ***изолированной особой точкой (однозначного характера) функции*** f.

2④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z+3+5i)$ функцию $f(z)=\dfrac{16-z^2}{z(z+4i)^2}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=-1-i$. Указать границы кольца сходимости.

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 70 – 75 (примеры 1, 2 стр. 73 – 75), Половинкин стр. 78 – 85 (пример 1 стр. 83 – 84)

① Дробь правильная.

Находим корни уравнения $z=0$. Получаем простой корень: $z_1=0$.

Находим корни уравнения $(z+4i)^2=0$: $z_{2,3}=-4i$. Получаем кратные корни: $z_2=-4i$ и $z_3=-4i$.

② Точки $z_1=0$ и $z_{2,3}=-4i$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не регулярна).

③ Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{16-z^2}{z(z+4i)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+4i}+\frac{C}{(z+4i)^2}=\frac{A(z+4i)^2+Bz(z+4i)+Cz}{z(z+4i)^2}=\frac{A(z^2+8zi-16)+B(z^2+4zi)+Cz}{z(z+4i)^2}$$

$z^0: -16A=16 \quad \to \quad A=-1$ ↘

$z^1: 8iA+4iB+C=0 \quad \to \quad 4iB+C=8i$ ↘

↓

$z^2: A+B=-1 \quad \to \quad B=0 \quad \to \quad C=8i$

$$\boxed{f(z)=\frac{-1}{z}+\frac{8i}{(z+4i)^2}}.$$

④ Для удобства дальнейших выкладок произведем замену $z+3+5i=w$ или $z=w-3-5i$:

$$f(w)=\frac{-1}{w-3-5i}+\frac{8i}{(w-3-i)^2}$$

Кольца аналитичности $f(w)$: $|w|<|3+i|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$,

$\sqrt{10}<|w|<|3+5i|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$,

$|w|>\sqrt{34}$.

⑤ При $z=-1-i$ получаем $w=2+4i$, $|w|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.

Т.о., раскладывать дроби в ряд Лорана по степеням w будем в кольце $\sqrt{10}<|w|<\sqrt{34}$, используя разложения в ряд Тейлора.

При этом $|3+i|<|w|<|3+5i|$.

❶ $$\frac{-1}{w-3-5i}=\frac{-1}{-3-5i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w}{3+5i}}=\frac{1}{3+5i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{3+5i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{(3+5i)^{n+1}},$$

❷ $$\frac{8i}{(w-3-i)^2}=\frac{8i}{w^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{3+i}{w}\right)^2}=\frac{8i}{w^2}\cdot\left[\frac{1}{1-\dfrac{3+i}{w}}\right]'_{\frac{3+i}{w}}=\frac{8i}{w^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+i}{w}\right)^n\right]'_{\frac{3+i}{w}}=\frac{8i}{w^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3+i}{w}\right)^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8in(3+i)^{n-1}}{w^{n+1}}.$$

Ответ: в кольце, которому принадлежит точка $z=-1-i$ $\left(\sqrt{10}<|z+3+5i|<\sqrt{34}\right)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3+5i)^n}{(3+5i)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8in(3+i)^{n-1}}{(z+3+5i)^{n+1}}$$

2003/2004 32

3⑤ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{zdz}{(\pi-4z)(1-\sin 2z)}$ [1].

Шабунин, Сидоров стр. 134 – 138 (примеры 11 - 15 стр. 134 – 137), Половинкин стр. 95 – 102 (пример 1 стр. 101 – 102)

① Находим особые точки $f(z)=\frac{z}{(\pi-4z)(1-\sin 2z)}$.

Особыми точками являются: особые точки числителя: ∅,

нули знаменателя: $z=\frac{\pi}{4}$,

$\left(\sin 2z=1 \Leftrightarrow 2z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k \Leftrightarrow\right) \quad z_k=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k=\pm1,\pm2,...$ - П[2]

(полюсы 2-го порядка)[2] [3]

особые точки знаменателя: ∅.

$z=\infty$ - НОТ.

Внутри контура $\gamma=\{z:|z-1|=1\}$ находится: $z=\frac{\pi}{4}$ - П[3] (полюс 3-го порядка).

② Интеграл $I=\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{zdz}{(\pi-4z)(1-\sin 2z)}$, можно вычислить по формуле $I=2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=\frac{\pi}{4}} f(z)$[4].

③ Для нахождения вычета[5] функции $f(z)$ в точке $z=\frac{\pi}{4}$ разложим[6] эту функцию в ряд Лорана в кольце $0<\left|z-\frac{\pi}{4}\right|<\varepsilon\ \ (\varepsilon<<1)$. Получаем:

---

[1] По умолчанию направление обхода считается положительным – против часовой стрелки.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

[3] $(1-\sin 2z)\big|_{z=\frac{\pi}{4}}=0$, $\left.\frac{d(1-\sin 2z)}{dz}\right|_{z=\frac{\pi}{4}}=(-2\cos 2z)\big|_{z=\frac{\pi}{4}}=0$, а $\left.\frac{d^2(1-\sin 2z)}{dz^2}\right|_{z=\frac{\pi}{4}}=(4\sin 2z)\big|_{z=\frac{\pi}{4}}=1\neq 0$

[4] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n\in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[5] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_a f=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[6] $\operatorname*{res}\limits_a f=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.

$$f(z) = \frac{z}{(\pi-4z)(1-\sin 2z)} = \frac{z}{4\left(\frac{\pi}{4}-z\right)(1-\sin 2z)} = \left|\begin{matrix} z=\frac{\pi}{4}+w \\ w=z-\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right| = \frac{\frac{\pi}{4}+w}{4(-w)\left(1-\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+w\right)\right)} =$$

$$\frac{\frac{\pi}{16}+\frac{w}{4}}{-w\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2w\right)\right)} = \frac{-\frac{\pi}{16w}-\frac{1}{4}}{(1-\cos 2w)} = \frac{-\frac{\pi}{16w}-\frac{1}{4}}{\left(1-\left(1-\frac{(2w)^2}{2!}+\frac{(2w)^4}{4!}+o(w^5)\right)\right)} = \frac{-\frac{\pi}{16w}-\frac{1}{4}}{\left(\frac{4w^2}{2}-\frac{16w^4}{24}+o(w^5)\right)} =$$

$$\frac{-\frac{\pi}{16w}-\frac{1}{4}}{\left(2w^2-\frac{2w^4}{3}+o(w^5)\right)} = \frac{-\frac{\pi}{16w}-\frac{1}{4}}{2w^2\left(1-\frac{w^2}{3}+o(w^5)\right)} = -\left(\frac{\pi}{32w^3}+\frac{1}{8w^2}\right)\left(1+\frac{w^2}{3}+\left(\frac{w^2}{3}\right)^2+o(w^5)\right) =$$

$$-\frac{\pi}{32w^3}-\frac{1}{8w^2}-\frac{\pi}{96w}-\frac{1}{24}+o(w).$$

Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1} = -\frac{\pi}{96}$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = c_{-1} = -\frac{\pi}{96}$.

④ По теореме Коши о вычетах

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = 2\pi i\left[-\frac{\pi}{96}\right] = -\frac{\pi^2 i}{48}$$

Ответ: $\boxed{\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z\,dz}{(\pi-4z)(1-\sin 2z)} = -\frac{\pi^2 i}{48}}$

2003/2004 32

4④ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(2-x)}{x^2+2}dx$.

Шабунин, Сидоров стр. 140 – 145 (примеры 6 стр. 144), Половинкин стр. 103 – 108 (пример 3 стр. 107 – 108)

① Замечая, что $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(2-x)}{x^2+2}dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(x-2)}{x^2+2}dx$,

для решения задачи достаточно вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(x-2)}}{x^2+2}dx$

и воспользоваться формулой

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(2-x)}{x^2+2}dx = -\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(x-2)}}{x^2+2}dx. \qquad (1)$$

② Для того чтобы применить теорему Коши[1] о вычетах[2], вводим функцию комплексной переменной $f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z^2+2)e^{i2}}$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R,R]$ и полуокружности $C_R=\{z:|z|=R,\operatorname{Im}z\ge 0\}$, выбрав R так, чтобы все особые точки z_k $(k=1,2,\ldots,n)$ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{(x^2+2)e^{i2}}dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (2)$$

③ Переходим к пределу при $R\to\infty$. Так как в нашем случае $\Phi(z)=\frac{z}{(z^2+2)e^{i2}}$ есть правильная рациональная дробь и $\alpha=1>0$, то условия леммы Жордана[3] выполнены и, следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz=0$.

Поскольку правая часть в (2) не зависит от R, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(x^2+2)e^{i2}}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \qquad (3)$$

где z_k - особые точки функции $f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z^2+2)e^{i2}}$, лежащие в верхней полуплоскости.

---

[1] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k} f$.

[2] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_{a} f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[3] **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z|\ \operatorname{Im}z\ge 0, |z|=R_0>0\}$. Пусть число $\alpha>0$ и $C_R \overset{\Delta}{=} \{z|\ \ |z|=R,\operatorname{Im}z\ge 0\}$, $R>R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R)\overset{\Delta}{=}\max\{|\Phi(z)|\ \ z\in C_R\}$ при $R>R_0$. Если $\lim\limits_{R\to\infty}\varepsilon(R)=0$, то $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)dz=0$.

④ Находим особые точки функции $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{(z^2+2)e^{i2}}=\dfrac{ze^{iz}}{(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}i)e^{i2}}$ как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z=\sqrt{2}i$ и $z=-\sqrt{2}i$. Таким образом, точки $z=\sqrt{2}i$ и $z=-\sqrt{2}i$ - полюса[4] 1-го порядка (ПП – простые полюса).

⑤ Вычисляем вычет в простом полюсе $z=\sqrt{2}i$ по формуле $\operatorname*{res}\limits_{z=\sqrt{2}i} f(z)=\lim\limits_{z\to\sqrt{2}i}(z-\sqrt{2}i)f(z)$. Получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\sqrt{2}i} f(z)=\left.\frac{ze^{iz}}{(z+\sqrt{2}i)e^{i2}}\right|_{z=\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{2}ie^{-\sqrt{2}}}{(2\sqrt{2}i)e^{i2}}=\frac{e^{-\sqrt{2}-i2}}{2}$$

⑥ Вычисляем несобственный интеграл по формуле (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(x^2+2)e^{i2}}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=\sqrt{2}i} f(z)=2\pi i\frac{e^{-\sqrt{2}-i2}}{2}=\frac{\pi i}{e^{\sqrt{2}}}e^{-2i}=\frac{\pi i}{e^{\sqrt{2}}}\left(\cos(-2)+i\sin(-2)\right)=\frac{\pi i}{e^{\sqrt{2}}}(\cos 2-i\sin 2).$$

⑦ Используя формулу (1), находим искомый интеграл:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(2-x)}{x^2+2}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(x-2)}{x^2+2}dx=-\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(x-2)}}{x^2+2}dx=-\operatorname{Im}\frac{\pi i}{e^{\sqrt{2}}}(\cos 2-i\sin 2)=-\frac{\pi\cos 2}{e^{\sqrt{2}}}$$

Ответ: $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(2-x)}{x^2+2}dx=-\frac{\pi\cos 2}{e^{\sqrt{2}}}}$

---

[4] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_{\rho}(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

5⑥ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{x-1}{\sqrt[5]{(x+2)^4(x+1)}}\cdot\frac{1}{x}dx$.

Шабунин, Сидоров стр. 151 – 158 (пример 11 стр. 151-152, пример 12 стр. 153-154, пример 13 стр. 154-156), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 3 стр. 111 – 114)

① Чтобы вычислить этот интеграл J с помощью теории вычетов, продолжая подынтегральную функцию в комплексную плоскость, мы вынуждены иметь дело с многозначной функцией $\left\{\sqrt[5]{(z+2)^4(z+1)}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash[-2,-1]$, что проверяется[2].

② Замечая, что при $x\in[-2,-1]$ под знаком корня стоит отрицательное выражение[3], а при $x>-1$ - положительное, выберем теперь регулярную ветвь корня, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [-2, -1] прринимает значения арифметического корня $\sqrt[5]{(x+2)^4(-x-1)}\ge 0$, т.е. обозначим через g регулярную ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[5]{(z+2)^4(z+1)}\right\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[-2,-1]$ такую, что ее предел из из верхней полуплоскости в точках $x\in(-2,-1)$, т.е. на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [-2, -1] равен

$$g(x+i0)=-\sqrt[5]{(x+2)^4(-x-1)}<0^{4}. \tag{1}$$

$$\boxed{g(z)=\sqrt[5]{\left|(z+2)^4(z+1)\right|}e^{i\pi+\frac{i}{5}\left(4\Delta_\gamma\arg(z+2)+\Delta_\gamma(z+1)\right)}}^{5}\ - \tag{2}$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (1).

Отметим, что предельное значение функции g из нижней полуплоскости в точках $x\in(-2,-1)$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку [-2, -1], принимает по формуле (2) значение

$$\boxed{g(x-i0)}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi+\frac{i}{5}(4\cdot 2\pi+1\cdot 0)}=g(x+i0)e^{\frac{i}{5}(4\cdot 2\pi+1\cdot 0)}{}^{6}=\boxed{g(x+i0)e^{\frac{i8\pi}{5}}} \tag{3}$$

В формуле (3) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза.

③ Пусть $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим в области G контур γ_ε, имеющий вид «гантели», т.е. составленный из окружностей $C_{-2\varepsilon}$ и $C_{-1\varepsilon}$ радиуса ε и центрами в точках -2 и -1 соответственно, а также двух берегов I_ε^+ и I_ε^- разреза по отрезку $[-2+\varepsilon,-1-\varepsilon]$.

Ориентируем полученный контур γ_ε положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости.

---

[1] $\sqrt[5]{(z+2)^4(z+1)}=\sqrt[5]{\left|(z+2)^4(z+1)\right|}e^{\frac{i}{5}\left(4\varphi_{01}+4\Delta_\gamma\arg(2+z)+\varphi_{02}+\Delta_\gamma(z+1)+2\pi k\right)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\ne 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}}\arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] Например, $\left.\sqrt[5]{(x+2)^4(x+1)}\right|_{x=-\frac{3}{2}}=\sqrt[5]{(-1.5+2)^4(-1.5+1)}=\sqrt[5]{(-0.5)^4(-0.5)}=\sqrt[5]{(-0.5)^5}=0.5\sqrt[5]{-1}$

[4] $g(x+i0)=-\sqrt[5]{(x+2)^4(-x-1)}=-\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(-x-1)\right|}=-\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi}$

[5] $g(x+i0)=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{\frac{i}{5}(4\varphi_{01}++\varphi_{02}+2\pi k)}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi}=\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{i\pi}e^{i2\pi l}$, т.е. $\frac{(4\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}{5}=2\pi l$

[6] или $g(x+i0)e^{\frac{i}{5}(0\cdot 2\pi+1\cdot(-2\pi))}$

Рассмотрим интеграл $J_\varepsilon \overset{\Delta}{=} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$, где $f(z) \overset{\Delta}{=} \dfrac{z-1}{zg(z)}$.

По теореме о вычетах[7], с одной стороны, и из формы контура γ_ε с другой, получаем равенства

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\underset{z=0}{res} f(z) + \underset{z=\infty}{res} f(z)\right]^{8} = \left(\int\limits_{I_\varepsilon^+} + \int\limits_{I_\varepsilon^-} + \int_{C_{1\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}}\right) f(z)dz. \tag{4}$$

④ Точка $z=0$ ПП (П[1]) – простой полюс[9] (полюс первого порядка), поэтому вычет[10] в этой точке равен

$$\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z) = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \frac{-1}{g(0)}{}^{11} = \frac{-1}{\sqrt[5]{\left|(0+2)^4(0+1)\right|}e^{i\pi+\frac{i}{5}(4\cdot 0+1\cdot(-\pi))}} = \sqrt[5]{2^{-4}}e^{\frac{i\pi}{5}}.$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[12]) разложим[13] эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$: $f(X) = \dfrac{X-1}{X\cdot g(X)}$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{X}\right)}{\sqrt[5]{\left|(X+2)^4(X+1)\right|}e^{i\pi+\frac{i}{5}(4\cdot 0+1\cdot(-\pi))}} = \frac{\left(1-\frac{1}{X}\right)}{X\cdot\sqrt[5]{\left(1+\frac{2}{X}\right)^4\left(1+\frac{1}{X}\right)}e^{i\pi-\frac{i\pi}{5}}} = -\frac{\left(1-\frac{1}{X}\right)}{X\cdot\sqrt[5]{\left(1+\frac{2}{X}\right)^4}\sqrt[5]{1+\frac{1}{X}}e^{-\frac{i\pi}{5}}} =$$

$$-\frac{1}{X}\left(1-\frac{1}{X}\right)\left(1-\frac{4}{5}\frac{2}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1-\frac{1}{5}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i\pi}{5}} = -\left(\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\left(1-\frac{9}{5}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i\pi}{5}} =$$

---

7 **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{a_k}{\operatorname{res}} f$.

8 Особыми точками функции f являются: $z=\infty$, нули знаменателя: $z=0$, особые точки числителя: $\varnothing$, особые точки знаменателя: $\varnothing$ (**<u>в *G*!!!</u>**)

9 **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

10 **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\underset{a}{\operatorname{res}} f = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

11 Для вычисления $g(0)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z=0$

12 **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

13 $\underset{a}{\operatorname{res}} f = c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\dfrac{1}{z}$.

$\left(-\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{\frac{i\pi}{5}}$. По теореме единственности[14] имеем: $f(z)=-\frac{1}{z}e^{\frac{i\pi}{5}}+o\left(\frac{1}{z}\right)$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=-e^{\frac{i\pi}{5}}$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=e^{\frac{i\pi}{5}}$[15].

Таким образом, $J_\varepsilon = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right]=2\pi i\left[\sqrt[5]{2^{-4}}e^{\frac{i\pi}{5}}+e^{\frac{i\pi}{5}}\right]=2\pi i\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]e^{\frac{i\pi}{5}}$

⑤ Оценим интегралы по окружностям $C_{-2\varepsilon}=\{z:|z+2|=\varepsilon\}$ и $C_{-1\varepsilon}=\{z:|z+1|=\varepsilon\}$:

$$\left|\int_{C_{-2\varepsilon}} f(z)dz\right|\le \int_0^{2\pi}\frac{-2+\varepsilon-1}{(-2-\varepsilon)\sqrt[5]{\varepsilon^4(-1-\varepsilon)}}\varepsilon d\varphi \le A\cdot\varepsilon^{\frac{1}{5}}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0,$$

$$\left|\int_{C_{-1\varepsilon}} f(z)dz\right|\le \int_0^{2\pi}\frac{-1+\varepsilon-1}{(-1-\varepsilon)\sqrt[5]{(2-1-\varepsilon)^4\varepsilon}}\varepsilon d\varphi \le B\cdot\varepsilon^{\frac{4}{5}}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

⑥ В силу формул (1) и (3) получаем выражения:

$$\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz = \int_{-2+\varepsilon}^{-1-\varepsilon}\frac{x-1}{g(x+i0)}\cdot\frac{1}{x}dx=\int_{-2+\varepsilon}^{-1-\varepsilon}\frac{x-1}{\sqrt[5]{\left|(x+2)^4(x+1)\right|}e^{\frac{i\pi}{5}}}\cdot\frac{1}{x}dx,$$

$$\int_{I_\varepsilon^-} f(z)dz = \int_{-1-\varepsilon}^{-2+\varepsilon}\frac{x-1}{g(x-i0)}\cdot\frac{1}{x}dx=-\int_{-2+\varepsilon}^{-1-\varepsilon}\frac{x-1}{g(x+i0)e^{\frac{i8\pi}{5}}}\cdot\frac{1}{x}dx=-e^{-\frac{i8\pi}{5}}\int_{-2+\varepsilon}^{-1-\varepsilon}\frac{x-1}{g(x+i0)}\cdot\frac{1}{x}dx=-e^{-\frac{i8\pi}{5}}\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz.$$

⑦ Переходя в формуле (4) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем равенство:

$$2\pi i\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]e^{\frac{i\pi}{5}}=\left(1-e^{-\frac{i8\pi}{5}}\right)J,$$

т.е. $e^{\frac{i4\pi}{5}}\pi\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]e^{\frac{i\pi}{5}}=\frac{\left(e^{\frac{i4\pi}{5}}-e^{-\frac{i4\pi}{5}}\right)}{2i}J$, $J=-\frac{\pi\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]}{\sin\frac{4\pi}{5}}=-\frac{\pi\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]}{\sin\frac{\pi}{5}}$

Ответ: $$\boxed{\int_{-2}^{-1}\frac{x-1}{\sqrt[5]{(x+2)^4(x+1)}}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\pi\left[2^{-\frac{4}{5}}+1\right]}{\sin\frac{\pi}{5}}}$$

---

[14] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f:G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0\ \forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv 0$ на области *G*.

[15] $\operatorname*{res}_{\infty} f=-c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

2003/2004 32

6⑦ Пусть $h(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\mathrm{Ln}\frac{2-iz}{z-1}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\left\{z:|z|=1,\ 0\le\arg z\le\frac{3\pi}{2}\right\}\cup[-2i,-i]$ такая, что $\operatorname{Im}h(\infty)=\frac{3\pi}{2}$. Найти $h(0)$ и вычислить интеграл $J=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{h(z)}{\sin^3 z}dz$.

Шабунин, Сидоров стр. 81 – 119 (пример 8 стр. 108-110, пример 10 стр. 111-113, пример 11 стр. 113-116), Половинкин$_{н}$ стр. 108 – 115, пример 3 стр. 104-105

① Прежде всего следует проверить, что в заданной области действительно существуют регулярные ветви функции $\left\{\mathrm{Ln}\frac{2-iz}{z-1}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\setminus\gamma$, что легко проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая удовлетворяет условию $\operatorname{Im}h(\infty)=\frac{3\pi}{2}$:

$$h(z)=\ln\left|\frac{2-iz}{z-1}\right|+i\left(\varphi_{01}-\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(2-iz)-\Delta_\gamma\arg(z-1)+2\pi l\right)\to\operatorname{Im}h(\infty)=\varphi_{01}-\varphi_{02}+2\pi l=\frac{3\pi}{2}.$$

$$\boxed{h(z)=\ln\left|\frac{2-iz}{z-1}\right|+i\left(\frac{3\pi}{2}+\Delta_\gamma\arg(2-iz)-\Delta_\gamma\arg(z-1)\right)}\ - \qquad (1)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию $\operatorname{Im}h(\infty)=\frac{3\pi}{2}$.

③ $$\boxed{h(0)}=\ln\left|\frac{2-i0}{0-1}\right|+i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-(-\pi)\right)=\boxed{\ln 2+i3\pi}$$

④ Находим особые точки $f(z)=\frac{h(z)}{\sin^3 z}$.

Особыми точками являются: $z=\infty$ - НОТ,
особые точки числителя: $\varnothing$,
нули знаменателя: $z=\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ - П^3 (полюсы 3-го порядка)[3]

$$\sin^3\pi k=0,\ \left(\sin^3 z\right)'\Big|_{z=\pi k}=3\sin^2 z\cos z\Big|_{z=\pi k}=0,$$
$$\left(\sin^3 z\right)''\Big|_{z=\pi k}=\left(3\sin^2 z\cos z\right)'\Big|_{z=\pi k}=\left(6\sin z\cos^2 z-3\sin^3 z\right)\Big|_{z=\pi k}=0,$$

---

[1] $$\mathrm{Ln}\frac{2-iz}{z-1}=\mathrm{Ln}(2-iz)-\mathrm{Ln}(z-1)=\ln|2-iz|+i\left(\varphi_{01}+\Delta_\gamma\arg(2-iz)+2\pi k_1\right)-\ln|z-1|-i\left(\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(z-1)+2\pi k_2\right)$$
$$=\ln\left|\frac{2-iz}{z-1}\right|+i\left(\varphi_{01}-\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(2-iz)-\Delta_\gamma\arg(z-1)+2\pi l\right)$$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\ne0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}}\arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

$$\left(\sin^3 z\right)''\Big|_{z=\pi k} = \left(6\sin z\cos^2 z - 3\sin^3 z\right)'\Big|_{z=\pi k} =$$
$$\left(6\cos^3 z - 12\sin^2 z\cos z - 9\sin^2 z\cos z\right)\Big|_{z=\pi k} = (-1)^k 6 \neq 0$$

особые точки знаменателя: $\varnothing$.

Внутри контура $\gamma = \left\{z : |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \frac{3\pi}{2}\right\} \cup [-2i, -i]$ находится: $z = 0$ - П[3].

⑤ Интеграл $J = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{h(z)}{\sin^3 z} dz$, можно вычислить по формуле $J = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z}\right)$[4].

⑥ Точка $z = 0$ - П[3] (полюс 3-го порядка), поэтому вычет[5] в этой точке равен $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 \frac{h(z)}{\sin^3 z}\right)$. ☹

Кроме того, $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z} = c_{-1}$[6], где c_{-1} - коэффициент разложения функции $\frac{h(z)}{\sin^3 z}$ в ряд Лорана с центром в конечной точке $z = 0$ при $\frac{1}{z}$.

$$h(z) = \operatorname{Ln}\frac{2 - iz}{z - 1} = \operatorname{Ln}(-2) + \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{iz}{2}\right) - \operatorname{Ln}(1 - z)^{7} = \operatorname{Ln}(-2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}\left(\frac{iz}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}(z)^k + i2\pi k\ ^{8}.$$

Т.к. $h(0) = \ln 2 + i3\pi$, то $h(z) = \ln 2 + i3\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}\left(\frac{iz}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)}{k}(z)^k =$

$$= \ln 2 + i3\pi - \frac{iz}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{iz}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{iz}{2}\right)^3 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} o\left(z^3\right) =$$
$$= \ln 2 + i3\pi + \left(1 - \frac{i}{2}\right)z + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right)z^2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{i}{8}\right)z^3 + o\left(z^3\right).$$

---

[4] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f$.

[5] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{o}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z - a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[6] $\operatorname*{res}_a f = c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.

[7] Многозначные функции $\operatorname{Ln}(-2)$, $\operatorname{Ln}\left(1 - \frac{iz}{2}\right)$ и $\operatorname{Ln}(1 - z)$ также имеют регулярные ветви.

[8] Половинкин §9 пример 4: $h_0(z) = \ln|z| + i\arg_{\text{гл}} z$, $\arg_{\text{гл}} z \in (-\pi, \pi)$.

$h_0(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$, $z \in B_1(0)$.

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + o\left(z^4\right)\right)^3} = \frac{1}{z^3\left(1 - \frac{z^2}{6} + o\left(z^3\right)\right)^3} = \frac{1 + 3\frac{z^2}{6} + o\left(z^3\right)}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z} + o(1)$$

Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1} = \frac{5}{8} + \frac{1}{2}\left(\ln 2 + i3\pi\right)$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z} = \frac{5}{8} + \frac{\ln 2 + i3\pi}{2}$.

⑥ Окончательно $\boxed{J =} 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0} \frac{h(z)}{\sin^3 z}\right) = 2\pi i\left(\frac{5}{8} + \frac{\ln 2 + i3\pi}{2}\right) \boxed{= -3\pi^2 + i\pi\left(\frac{5}{4} + \ln 2\right)}$