

2④ Найти все особые точки функции $f(z) = \frac{z \cdot e^{1/\sin z}}{(2z + \pi) \sin z \cdot \cos 2z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

Шабунин, Сидоров стр. 64 – 70 (примеры 9 – 13 стр. 68 – 72), Половинкин стр. 85 – 95 (примеры 1 – 4 стр. 91 – 93)

① $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функция $\psi(z)$ регулярна при всех z . Поэтому особые точки функции $f(z)$ определяются особыми точками функции $\varphi(z)$ и нулями знаменателя $\psi(z)$.

Кандидаты в особые точки: $z = 0$, $z = \pi j$ при $j = \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$z = \infty,$$

$$z = -\frac{\pi}{2},$$

$$z = \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- нули знаменателя.

② а) Покажем, что точка $z = 0$ является существенно особой¹ для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_l = \frac{1}{l}$, тогда $\lim_{l \rightarrow \infty} z_l = 0$, а $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin(z_l)} = +\infty$, т.е. $\lim_{l \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sin(z_l)}} = +\infty$;

пусть теперь $z_m = -\frac{1}{m}$, тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = 0$, а $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin(z_m)} = -\infty$, т.е. $\lim_{m \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sin(z_m)}} = 0$.

Отметим попутно, что $\frac{z}{\sin z} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1$.

Следовательно, $[z = 0 - \text{COT}]$ для $f(z)$.

б) Аналогично, покажем, что точки $z_j = \pi j$ при $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ² являются существенно особыми для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_{jl} = \pi j + \frac{1}{l}$, тогда $\lim_{l \rightarrow \infty} z_{jl} = \pi j$, а $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin(z_{jl})} = \begin{cases} +\infty, & j = 2i \\ -\infty, & j = 2i - 1 \end{cases}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т.е.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sin(z_{jl})}} = \begin{cases} +\infty, & j = 2i \\ 0, & j = 2i - 1 \end{cases}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

пусть теперь $z_{jm} = \pi j - \frac{1}{m}$, тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{jm} = \pi j$, а $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin(z_{jm})} = \begin{cases} -\infty, & j = 2i \\ +\infty, & j = 2i - 1 \end{cases}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sin(z_{jm})}} = \begin{cases} 0, & j = 2i \\ +\infty, & j = 2i - 1 \end{cases}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Отметим попутно, что $\frac{z}{\sin z} \xrightarrow{z \rightarrow \pi j} \infty$. Но $\lim_{u \rightarrow \infty} u e^{|u|} = \infty$, а $\lim_{u \rightarrow \infty} u e^{-|u|} = \pm \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} \stackrel{\text{пр. Лопиталя}}{=} \pm \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^u} = 0$

Следовательно, $[z_j = \pi j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots - \text{COT}]$ для $f(z)$.

③ Оставшиеся нули знаменателя не совпадают с нулями числителя и являются полюсами³ функции $f(z)$. Определим их порядок.

¹ **Определение.** Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f: \overset{\circ}{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$ называется **существенно особой точкой**, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

² Предыдущий случай можно было и не рассматривать отдельно.

³ **Определение.** Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f: \overset{\circ}{B}_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$ называется **полюсом**, если существует предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

- ❶ $z = -\frac{\pi}{2}$ - нуль первого порядка функции $\psi(z)$, т.к. в этой точке числитель $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, то для функции $f(z)$ точка

$$z = -\frac{\pi}{2} \text{ - полюс 1-го порядка (ПП – простой полюс).}$$

- ❷ Рассмотрим точки $z = \frac{\pi}{4}(1+2n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - нули $\psi(z) = h(z)\cos 2z$, где $h(z) = (2z + \pi)\sin z$. Т.к.

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= h'(z)\cos 2z - 2h(z)\sin 2z, & \text{то} & & \psi'\left(\frac{\pi(1+2n)}{4}\right) &= -2h\left(\frac{\pi(1+2n)}{4}\right)\sin 2\frac{\pi(1+2n)}{4} = \\ &= -\left(2\frac{\pi(1+2n)}{4} + \pi\right)\sin \frac{\pi(1+2n)}{4}\sin \frac{\pi(1+2n)}{2} \neq 0, & \text{то это нули первого порядка знаменателя.} \end{aligned}$$

Таким образом, $z = \frac{\pi}{4}(1+2n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - полюсы 1-го порядка (ПП – простые полюсы) для функции $f(z)$.

- ④ $z = \infty$ - неизолированная особая точка (НОТ)⁴, т.к. в любой ее окрестности есть ПП $z = \frac{\pi}{4}(1+2n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

⁴ **Определение.** Пусть функция f определена и регулярна в проколотой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{C}}$, т.е. на множестве $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$, $\rho > 0$. Тогда точку a называют *изолированной особой точкой (однозначного характера) функции f* .