2003/2004 31

1④ Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{z^2\sin^2 z\cdot\sin\left(\dfrac{1}{z-\frac{\pi}{2}}\right)}{(\cos z-1)^2}e^{\sin z/z}$, определить их тип. Ответ обосновать.

Шабунин, Сидоров стр. 64 – 70 (примеры 9 - 13 стр. 68 – 72), Половинкин стр. 85 – 95 (примеры 1 - 4 стр. 91 – 93)

① $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функция $\psi(z)$ регулярна при всех z. Поэтому особые точки функции $f(z)$ определяютя особыми точками функции $\varphi(z)$ и нулями знаменателя $\psi(z)$.

Кандидаты в особые точки: $z=0$ - нуль знаменателя аргумента экспоненты,

$z=\dfrac{\pi}{2}$ - нуль знаменателя аргумента синуса в числителе,

$z=2\pi k,\ k=\pm1,\pm2,\dots$ - нули знаменателя,

$z=\infty$.

② Покажем, что точка $z=0$ является устранимой особой точкой[1] для функции $f(z)$:

$$f(z)=\frac{z^2\left(z+o(z^2)\right)^2\cdot\sin\left(-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2z}{\pi}}\right)}{\left(1-\dfrac{z^2}{2}+o(z^3)-1\right)^2}e^{\left(z+o(z^2)\right)/z}=\frac{\left(z^4+o(z^5)\right)\cdot\sin\left(-\dfrac{2}{\pi}+o(1)\right)}{\dfrac{z^4}{4}+o(z^5)}e^{1+o(1)}\xrightarrow[z\to0]{}-4e\sin\frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, $\boxed{z=0\text{ - УОТ}}$ для $f(z)$.

③ Покажем, что точка $z=\dfrac{\pi}{2}$ является существенно особой[2] для функции $\varphi(z)$:

пусть $z_l=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2\pi l}$, тогда $\lim\limits_{l\to\infty}z_l=\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{l\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{z_l-\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2\pi l}\right)}=\sin(2\pi l)=0$, т.е. $\lim\limits_{l\to\infty}f(z_l)=0$;

пусть теперь $z_m=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi m}$, тогда $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{m\to\infty}\sin\left(\dfrac{1}{z_m-\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi m}\right)}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\right)=1$, т.е.

$$\lim_{m\to\infty}f(z_m)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{2}-1\right)^2}e^{\left(\sin\frac{\pi}{2}\Big/\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi^2}{4}e^{2/\pi}\neq0.$$

---

[1] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***существенно особой точкой***, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a}f(z)$.

Следовательно, $\boxed{z=\frac{\pi}{2}\text{ - СОТ}}$ для $f(z)$.

③ Рассмотрим точки $z=2\pi k,\ k=\pm 1,\pm 2,\dots$, в которых нули знаменателя совпадают с нулями числителя функции $f(z)$. Произведем замену: $t=z-2\pi k$. Тогда

$$f(t)=\frac{(2\pi k)^2t^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2\pi k-\dfrac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o(t^3)}{\left(-\dfrac{t^2}{2}+o(t^3)\right)^2}e^{\left(\frac{t+o(t^2)}{2\pi k+o(1)}\right)}=\frac{(2\pi k)^2t^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2\pi k-\dfrac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o(t^3)}{\dfrac{t^4}{4}+o(t^5)}e^{\left(\frac{t+o(t)}{2\pi k}\right)}=$$

$$\frac{(2\pi k)^2\sin\left(\dfrac{1}{2\pi k-\dfrac{\pi}{2}}+o(1)\right)+o(t)}{\dfrac{t^2}{4}+o(t^3)}e^{o(1)}\xrightarrow[t\to 0]{}\infty$$ - полюсы[3] 2-го порядка.

Точки $\boxed{z=2\pi k,\ k=\pm 1,\pm 2,\dots\text{ - полюсы 2-го порядка}}$ для функции $f(z)$.

④ $\boxed{z=\infty\text{ - неизолированная особая точка}}$ (НОТ)[4], т.к. в любой ее окрестности есть полюсы 2-го порядка $z=2\pi k,\ k=\pm 1,\pm 2,\dots$ (точка накопления полюсов).

---

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$.

[4] **Определение**. Пусть функция f определена и регулярна в проколотой окрестности точки $a\in\overline{\mathbb{C}}$, т.е. на множестве $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$, $\rho>0$. Тогда точку a называют ***изолированной особой точкой (однозначного характера) функции*** f.

2003/2004 31

2④ Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-2-i)$ функцию $f(z)=\dfrac{z^2-2iz+6}{z^2(z+3i)}$ в кольце, которому принадлежит точка $z=5+i$. Указать границы кольца сходимости.

Шабунин, Сидоров стр. 70 – 75 (примеры 1, 2 стр. 73 – 75), Половинкин стр. 78 – 85 (пример 1 стр. 83 – 84)

① Дробь правильная.

Находим корни уравнения $z^2=0$: $z_{1,2}=0$. Получаем кратные корни: $z_1=0$ и $z_2=0$.

Находим корни уравнения $z+3i=0$. Получаем простой корень: $z_3=-3i$.

② Точки $z_{1,2}=0$ и $z_3=-3i$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не регулярна).

③ Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z^2-2iz+6}{z^2(z+3i)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z+3i}=\frac{Az(z+3i)+B(z+3i)+Cz^2}{z^2(z+3i)}$$

$z^0:\ 3iB=6 \quad\rightarrow\quad B=\dfrac{2}{i}=-2i$ ↘

$z^1:\ 3iA+B=-2i \quad\rightarrow\quad A=0$ ↘

$z^2:\ A+C=1 \quad\rightarrow\quad C=1$

$$\boxed{f(z)=\frac{-2i}{z^2}+\frac{1}{z+3i}}.$$

④ Для удобства дальнейших выкладок произведем замену $z-2-i=w$ или $z=w+2+i$:

$$f(w)=\frac{-2i}{(w+2+i)^2}+\frac{1}{w+2+4i}$$

Кольца аналитичности $f(w)$: $|w|<|-2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$\sqrt{5}<|w|<|-2-4i|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$,

$|w|>2\sqrt{5}$.

⑤ При $z=5+i$ получаем $w=3$, $|w|=3$ $\left(=\sqrt{9}\right)$.

Т.о., раскладывать дроби в ряд Лорана по степеням w будем в кольце $\sqrt{5}<|w|<2\sqrt{5}$, используя разложения в ряд Тейлора.

При этом $|2+i|<|w|<|2+4i|$.

❶ $$\frac{-2i}{(w+2+i)^2}=\frac{-2i}{w^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2+i}{w}\right)^2}=\frac{2i}{w^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{2+i}{w}}\right]'_{\frac{2+i}{w}}=\frac{2i}{w^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2+i}{w}\right)^n\right]'_{\frac{2+i}{w}}=$$

$$=\frac{2i}{w^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{2+i}{w}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2in(2+i)^{n-1}}{w^{n+1}}.$$

❷ $$\frac{1}{w+2+4i}=\frac{1}{2+4i}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{2+4i}}=\frac{1}{2+4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{w}{2+4i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^n}{(2+4i)^{n+1}}$$

Ответ: в кольце, которому принадлежит точка $z=5+i$ $\left(\sqrt{5}<|z-2-i|<2\sqrt{5}\right)$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2in(2+i)^{n-1}}{(z-2-i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2-i)^n}{(2+4i)^{n+1}}$$

2003/2004 31

3⑤ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+1+i|=2} \frac{z-1}{(z+1)\sin\frac{1}{z}}dz$ [1].

📖 Шабунин, Сидоров стр. 134 – 138 (примеры 11 - 15 стр. 134 – 137), Половинкин стр. 95 – 102 (пример 1 стр. 101 – 102)

① Находим особые точки $f(z)=\frac{z-1}{(z+1)\sin\frac{1}{z}}$.

Особыми точками являются: $z=\infty$,

особые точки числителя: $\varnothing$,

нули знаменателя: $z=-1$,

$$\left(\sin\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_k}=k\pi \Leftrightarrow\right)\quad z_k=\frac{1}{\pi k},\ k=\pm 1,\pm 2,\ldots,$$

особые точки знаменателя: $z=0$ - НОТ.

Внутри контура $\gamma=\{z:|z+1+i|=2\}$ находятся: $z=0$ - НОТ,

$z=-1$ - ПП (П[1]) (простой полюс – полюс 1-го порядка)[2]

$z_k=\frac{1}{\pi k}$ - ПП, т.к. $|z_k+1+i|=\sqrt{\left(\frac{1}{\pi k}+1\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{\pi^2k^2}+\frac{2}{\pi k}+2}$

$$<\sqrt{\frac{3}{\pi k}+2}<\sqrt{1+3}<2$$

вне: $z=\infty$ - УОТ[3].

② Интеграл $I=\oint\limits_{|z+1+i|=2}\frac{z-1}{(z+1)\sin\frac{1}{z}}dz$, можно вычислить по формуле $I=-2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$[4].

③ Для нахождения вычета[5] функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ разложим[6] эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Получаем:

---

[1] По умолчанию направление обхода считается положительным – против часовой стрелки.

[2] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\overline{\mathbb{C}}$.

[4] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,a_2,\ldots,a_n\in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[5] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r\overset{\Delta}{=}\{z:|z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_a f=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[6] $\operatorname*{res}\limits_a f=c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.

$$f(z)=\frac{z-1}{(z+1)\sin\frac{1}{z}}=\frac{1-\frac{1}{z}}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\sin\frac{1}{z}}=\frac{1-\frac{1}{z}}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+o\left(\frac{1}{z^4}\right)\right)}=$$

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\frac{z}{\left(1-\frac{1}{3!z^2}+o\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)}=z\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{6z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)=$$

$$\left(z-2+\frac{2}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right)\right)\left(1+\frac{1}{6z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)=z-2+\frac{2}{z}+\frac{1}{6z}+o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=2+\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=-\frac{13}{6}$[7].

④ По теореме Коши о вычетах

$$I=-2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-2\pi i\left[-\frac{13}{6}\right]=\frac{13\pi i}{3}$$

Ответ: $\boxed{\oint\limits_{|z+1+i|=2}\frac{z-1}{(z+1)\sin\frac{1}{z}}dz=\frac{13\pi i}{3}}$

[7] $\operatorname*{res}_{\infty} f=-c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

4④ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(2-x)}{4x^2+1}dx$.

📖 ✍ Шабунин, Сидоров стр. 140 – 145 (примеры 6 стр. 144), Половинкин стр. 103 – 108 (пример 3 стр. 107 – 108)

① Замечая, что $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(2-x)}{4x^2+1}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(x-2)}{4x^2+1}dx$,

для решения задачи достаточно вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i(x-2)}}{4x^2+1}dx$

и воспользоваться формулой

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(2-x)}{4x^2+1}dx = \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i(x-2)}}{4x^2+1}dx. \qquad (1)$$

② Для того чтобы применить теорему Коши[1] о вычетах[2], вводим функцию комплексной переменной $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(4z^2+1)e^{i2}}$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R, R]$ и полуокружности $C_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$, выбрав R так, чтобы все особые точки z_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{(4x^2+1)e^{i2}}dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (2)$$

③ Переходим к пределу при $R \to \infty$. Так как в нашем случае $\Phi(z) = \frac{z}{(4z^2+1)e^{i2}}$ есть правильная рациональная дробь и

$\alpha = 1 > 0$, то условия леммы Жордана[3] выполнены и, следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$.

Поскольку правая часть в (2) не зависит от R, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(4x^2+1)e^{i2}}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \qquad (3)$$

где z_k - особые точки функции $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(4z^2+1)e^{i2}}$, лежащие в верхней полуплоскости.

---

[1] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G \in \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

[2] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{o}{B}_{\rho}(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}\limits_{a} f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[3] **Лемма (Жордан).** Пусть $\Phi(z)$ - непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z|\ \operatorname{Im} z \ge 0, |z| = R_0 > 0\}$. Пусть число $\alpha > 0$ и $C_R \overset{\Delta}{=} \{z|\quad |z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$, $R > R_0$ - семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим $\varepsilon(R) \overset{\Delta}{=} \max\{|\Phi(z)|\quad z \in C_R\}$ при $R > R_0$. Если $\lim\limits_{R\to\infty} \varepsilon(R) = 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)dz = 0$.

④ Находим особые точки функции $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{(4z^2+1)e^{i2}} = \dfrac{ze^{iz}}{4\left(z-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{i}{2}\right)e^{i2}}$ как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z=\dfrac{i}{2}$ и $z=\dfrac{-i}{2}$. Таким образом, точки $z=\dfrac{i}{2}$ и $z=\dfrac{-i}{2}$ - полюса[4] 1-го порядка (ПП – простые полюса).

⑤ Вычисляем вычет в простом полюсе $z=\dfrac{i}{2}$ по формуле $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{i}{2}} f(z)=\lim\limits_{z\to\frac{i}{2}}\left(z-\frac{i}{2}\right)f(z)$. Получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{i}{2}} f(z)=\left.\frac{ze^{iz}}{4\left(z+\frac{i}{2}\right)e^{i2}}\right|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{\frac{i}{2}e^{-\frac{1}{2}}}{4\left(2\frac{i}{2}\right)e^{i2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}-i2}}{8}$$

⑥ Вычисляем несобственный интеграл по формуле (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(4x^2+1)e^{i2}}dx = 2\pi i\operatorname*{res}_{z=\frac{i}{2}} f(z) = 2\pi i\,\frac{e^{-\frac{1}{2}-i2}}{8} = \frac{\pi i}{4\sqrt{e}}e^{-2i} = \frac{\pi i}{4\sqrt{e}}\left(\cos(-2)+i\sin(-2)\right) = \frac{\pi i}{4\sqrt{e}}\left(\cos 2-i\sin 2\right).$$

⑦ Используя формулу (1), находим искомый интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(2-x)}{4x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(x-2)}{4x^2+1}dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i(x-2)}}{4x^2+1}dx = \operatorname{Re}\frac{\pi i}{4\sqrt{e}}\left(\cos 2-i\sin 2\right) = \frac{\pi\sin 2}{4\sqrt{e}}$$

Ответ: $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(2-x)}{4x^2+1}dx = \frac{\pi\sin 2}{4\sqrt{e}}}$

[4] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{\circ}{B}_{\rho}(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

2003/2004 31

5⑥ Применяя теорию вычетов вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \cdot \frac{1}{x} dx$.

📖 Шабунин, Сидоров стр. 151 – 158 (пример 11 стр. 151-152, пример 12 стр. 153-154, пример 13 стр. 154-156), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 3 стр. 111 – 114)

① Чтобы вычислить этот интеграл J с помощью теории вычетов, продолжая подынтегральную функцию в комплексную плоскость, мы вынуждены иметь дело с многозначной функцией $\left\{\sqrt[5]{\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash[1,2]$, что проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая в пределе на верхнем берегу I^+ разреза по отрезку [1, 2] принимает значения арифметического корня $\sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \geq 0$, $x \in [1,2]$, т.е. обозначим через g регулярную ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt[5]{\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}\right\}$ в области $\mathbb{C}\backslash[1,2]$ такую, что ее предел из верхней полуплоскости в точках $x \in (1,2)$ равен

$$g(x+i0) = \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} > 0\,. \tag{1}$$

$$\boxed{g(z) = \sqrt[5]{\left|\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}\right|} e^{\frac{i}{5}(3\Delta_\gamma \arg(2-z) - 3\Delta_\gamma (z-1))}}\ ^3 - \tag{2}$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию (1).

Отметим, что предельное значение функции g из нижней полуплоскости в точках $x \in (1,2)$, т.е. на нижнем берегу I^- разреза по отрезку [1, 2], принимает по формуле (2) значение

$$\boxed{g(x-i0)} = \sqrt[5]{\left|\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}\right|} e^{\frac{i}{5}(3\Delta_\gamma \arg(2-z) - 3\Delta_\gamma (z-1))} = g(x+i0) e^{\frac{i}{5}(3\cdot 0 - 3\cdot 2\pi)}\ ^4 = \boxed{g(x+i0) e^{-\frac{i6\pi}{5}}} \tag{3}$$

В формуле (3) контур γ начинается в точке на верхнем берегу разреза и оканчивается в той же точке на нижнем берегу разреза.

③ Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим в области G контур γ_ε, имеющий вид «гантели», т.е. составленный из окружностей $C_{1\varepsilon}$ и $C_{2\varepsilon}$ радиуса ε и центрами в точках 1 и 2 соответственно, а также двух берегов I_ε^+ и I_ε^- разреза по отрезку $[1+\varepsilon, 2-\varepsilon]$.

Ориентируем полученный контур γ_ε положительно по отношению к ограниченной им внешней части плоскости.

Рассмотрим интеграл $J_\varepsilon \overset{\Delta}{=} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz$, где $f(z) \overset{\Delta}{=} \frac{g(z)}{z}$.

---

[1] $\sqrt[5]{\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}} = \sqrt[5]{\left|\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}\right|} e^{\frac{i}{5}(3\varphi_{01} + 3\Delta_\gamma \arg(2-z) - 3\varphi_{02} - 3\Delta_\gamma (z-1) + 2\pi k)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\gamma \in \overset{\circ}{G}$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = (2\pi n) k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] $g(x+i0) = \sqrt[5]{\left|\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}\right|} e^{\frac{i}{5}(3\varphi_{01} - 3\varphi_{02} + 2\pi k)} = \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} = \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} e^{i2\pi l}$, т.е. $\frac{(3\varphi_{01} - 3\varphi_{02} + 2\pi k)}{5} = 2\pi l$.

[4] или $g(x+i0) e^{\frac{i}{5}(3\cdot(-2\pi) - 3\cdot 0)}$.

По теореме о вычетах[5], с одной стороны, и из формы контура γ_ε с другой, получаем равенства

$$J_\varepsilon = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right]^{6} = \left(\int\limits_{I_\varepsilon^+} + \int\limits_{I_\varepsilon^-} + \int_{C_{1\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}}\right) f(z)dz \,. \qquad (4)$$

④ Точка $z=0$ ПП (П[1]) – простой полюс[7] (полюс первого порядка), поэтому вычет[8] в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = g(0)^{9} = \sqrt[5]{\left|\frac{(2-0)^3}{(0-1)^3}\right|}\, e^{\frac{i}{5}(3\cdot 0-3\cdot\pi)} = \sqrt[5]{8}\, e^{-\frac{i3\pi}{5}} \,.$$

Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[10]) разложим[11] эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$: $f(X)=\dfrac{g(X)}{X}$ =

$$\frac{1}{X}\sqrt[5]{\left|\frac{(2-X)^3}{(X-1)^3}\right|}\, e^{\frac{i}{5}(3\cdot(-\pi)-3\cdot 0)} = \frac{1}{X}\sqrt[5]{\left(\frac{X-2}{X-1}\right)^3}\, e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \frac{1}{X}\sqrt[5]{\left(\frac{1-\frac{2}{X}}{1-\frac{1}{X}}\right)^3}\, e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \frac{1}{X}\sqrt[5]{\left(\left(1-\frac{2}{X}\right)\left(1+\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)\right)^3}\, e^{-\frac{i3\pi}{5}}$$

$$= \frac{1}{X}\sqrt[5]{\left(1-\frac{2}{X}+\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)^3}\, e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \frac{1}{X}\left(1-\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)^{\frac{3}{5}} e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \frac{1}{X}\left(1-\frac{3}{5}\frac{1}{X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)e^{-\frac{i3\pi}{5}} =$$

$\left(\dfrac{1}{X}+o\left(\dfrac{1}{X}\right)\right)e^{-\frac{i3\pi}{5}}$. По теореме единственности[12] имеем: $f(z)=\left(\dfrac{1}{z}+o\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)e^{-\frac{i3\pi}{5}}$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\dfrac{1}{z}$ равен $c_{-1}=e^{-\frac{i3\pi}{5}}$, следовательно $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -e^{-\frac{i3\pi}{5}}$[13].

---

[5] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k} f$.

[6] Особыми точками функции f являются: $z=\infty$, нули знаменателя: $z=0$, особые точки числителя: $\varnothing$, особые точки знаменателя: $\varnothing$ (**<u>в *G*!!!</u>**)

[7] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$.

[8] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$, $\rho>0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a|=r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0<r<\rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_a f = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[9] Для вычисления $g(0)$ берем контур γ с началом в точке, лежащей на верхнем берегу разреза I_ε^+, и концом в точке $z=0$

[10] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

[11] $\operatorname*{res}_a f = c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\dfrac{1}{z}$.

[12] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f:G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0\ \ \forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv 0$ на области G.

[13] $\operatorname*{res}_\infty f = -c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

Таким образом, $J_\varepsilon = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right] = 2\pi i\left[\sqrt[5]{8}e^{-\frac{i3\pi}{5}} - e^{-\frac{i3\pi}{5}}\right] = 2\pi i\left[\sqrt[5]{8}-1\right]e^{-\frac{i3\pi}{5}}$

⑤ Оценим интегралы по окружностям $C_{1\varepsilon} = \{z : |z-1| = \varepsilon\}$ и $C_{2\varepsilon} = \{z : |z-2| = \varepsilon\}$:

$$\left|\int_{C_{1\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \sqrt[5]{\frac{|1+\varepsilon|^3}{|\varepsilon|^3}} \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon)} \varepsilon d\varphi \le A\cdot\varepsilon^{\frac{2}{5}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

$$\left|\int_{C_{2\varepsilon}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \sqrt[5]{\frac{|\varepsilon|^3}{|1-\varepsilon|^3}} \cdot \frac{1}{(2-\varepsilon)} \varepsilon d\varphi \le B\cdot\varepsilon^{\frac{8}{5}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

⑥ В силу формул (1) и (3) получаем выражения:

$$\int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz = \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \cdot \frac{1}{x} dx,$$

$$\int_{I_\varepsilon^-} f(z)dz = \int_{2-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{g(x-i0)}{x} dx = \int_{2-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-\frac{i6\pi}{5}} \cdot \frac{g(x+i0)}{x} dx = -e^{-\frac{i6\pi}{5}} \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{g(x+i0)}{x} dx = -e^{-\frac{i6\pi}{5}} \int_{I_\varepsilon^+} f(z)dz.$$

⑦ Переходя в формуле (4) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем равенство:

$$2\pi i\left[\sqrt[5]{8}-1\right]e^{-\frac{i3\pi}{5}} = \left(1 - e^{-\frac{i6\pi}{5}}\right) J,$$

т.е. $\pi\left[\sqrt[5]{8}-1\right] = \dfrac{\left(e^{\frac{i3\pi}{5}} - e^{-\frac{i3\pi}{5}}\right)}{2i} J$, $J = \dfrac{\pi\left[\sqrt[5]{8}-1\right]}{\sin\frac{3\pi}{5}}$

Ответ: $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\pi\left[\sqrt[5]{8}-1\right]}{\sin\frac{3\pi}{5}}}$

6⑦ Пусть $g(z)$ - регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\sqrt{1+4z^2}\right\}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma=\left\{z:|z|=\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}\le\arg z\le 2\pi\right\}$ такая, что $g(0)=1$. Пусть $f(z)=\frac{z}{(g(z)+3)^2}$. Найти $\operatorname*{res}_{\infty} f$ и вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}} f(z)dz$.

Шабунин, Сидоров стр. 81 – 119 (пример 9 стр. 110-111, пример 12 стр. 103-115), Половинкин$_н$ стр. 108 – 115 (пример 4 стр. 114 – 115)

① Прежде всего следует проверить, что в заданной области действительно существуют регулярные ветви функции $\left\{\sqrt{1+4z^2}\right\}$[1]. Эта функция допускает выделение регулярных ветвей в области $G=\mathbb{C}\backslash\gamma$, что легко проверяется[2].

② Выберем теперь регулярную ветвь корня, которая удовлетворяет условию $g(0)=1$:

$$g(0)=\sqrt{\left|1+4\cdot 0^2\right|}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}=e^{\frac{i}{2}(\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}=1=e^{i2\pi l}\text{, т.е. }\frac{(\varphi_{01}+\varphi_{02}+2\pi k)}{2}=2\pi l.$$

$$\boxed{g(z)=\sqrt{\left|1+4\cdot z^2\right|}e^{\frac{i}{2}(\Delta_\gamma\arg(1+2iz)+\Delta_\gamma\arg(1-2iz))}}\ - \qquad (1)$$

регулярная ветвь, соответствующая вышеприведенному условию $g(0)=1$.

③ Для вычисления вычета функции $f(z)$в точке $z=\infty$ (- УОТ[3]) разложим эту функцию в ряд Лорана в кольце $R<|z|<\infty$ $(R>>1)$. Для этого воспользуемся разложением $f(z)$ в точке вещественной оси $R<X$: $f(X)=\frac{X}{(g(X)+3)^2}=$

$$\frac{X}{\left(\sqrt{\left|1+4\cdot X^2\right|}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}+3\right)^2}=\frac{X}{\left(2X\sqrt{1+\frac{1}{4X^2}}e^{\frac{i}{2}\cdot 0}+3\right)^2}=\frac{X}{4X^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{4X^2}}+\frac{3}{2X}\right)^2}=\frac{1}{4X\left(1+\frac{3}{2X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)^2}=$$

$$\frac{1}{4X}\left(1-2\frac{3}{2X}+o\left(\frac{1}{X}\right)\right)=\frac{1}{4X}+o\left(\frac{1}{X}\right).$$

По теореме единственности[4] имеем: $f(z)=\frac{1}{4z}+o\left(\frac{1}{z}\right)$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $c_{-1}=\frac{1}{4}$, следовательно $\boxed{\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=-\frac{1}{4}}$[5].

---

[1] $\sqrt{1+4z^2}=\sqrt{(1+2iz)(1-2iz)}=\sqrt{1+2iz}\sqrt{1-2iz}=\sqrt{|1+2iz|}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{01}+\Delta_\gamma\arg(1+2iz)+2\pi k_1)}\sqrt{|1-2iz|}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(1-2iz)+2\pi k_2)}=$ $\sqrt{\left|1+4z^2\right|}e^{\frac{i}{2}(\varphi_{01}+\varphi_{02}+\Delta_\gamma\arg(1+2iz)+\Delta_\gamma\arg(1-2iz)+2\pi k)}$

[2] **Теорема** 2(§16П) Пусть функция f в области G регулярна, прчем $f(z)\ne 0$, $\forall z\in G$. Чтобы в области G существовали ветви регулярной функции $\left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого кусочно-гладкого контура $\overset{\circ}{\gamma}\in G$ нашлось целое число $k_{\overset{\circ}{y}}$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}}\arg f(z)=(2\pi n)k_{\overset{\circ}{\gamma}}$.

[3] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***устранимой особой точкой***, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)\in\mathbb{C}$.

[4] **Теорема** (**единственности**). Пусть функция $f:G\to\mathbf{C}$ регулярна в области $G\subset\mathbf{C}$. Пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}\subset G$, сходящаяся к некоторой точке $a\in G$ и такая, что $f(z_n)=0\ \ \forall n\in N$. Тогда $f(z)\equiv 0$ на области G.

④ Находим особые точки $f(z)=\dfrac{z}{(g(z)+3)^2}$.

Особыми точками являются: $z=\infty$,

особые точки числителя: $\varnothing$,

нули знаменателя: $z=-\sqrt{2}$,

$g(z)+3=0 \leftrightarrow g(z)=-3 \rightarrow g^2(z)=9 \leftrightarrow 1+4z^2=9 \leftrightarrow 4z^2=8 \leftrightarrow z^2=2 \leftrightarrow z=\pm\sqrt{2}$:

- $z=\sqrt{2}$, $g(\sqrt{2})=\sqrt{\left|1+4\cdot(\sqrt{2})^2\right|}e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\alpha)} = \sqrt{1+4\cdot 2}e^{\frac{i}{2}0} = 3$ – не подходит,
- $z=-\sqrt{2}$, $g(-\sqrt{2})=\sqrt{\left|1+4\cdot(-\sqrt{2})^2\right|}e^{\frac{i}{2}((2\pi-\alpha)+\alpha)} = \sqrt{1+4\cdot 2}e^{\frac{i}{2}2\pi} = \sqrt{9}e^{i\pi} = -3$

особые точки знаменателя: $\varnothing$.

Вне контура $\gamma=\left\{z:|z|=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\le\arg z\le 2\pi\right\}$ находятся: $z=\infty$ - УОТ,

$z=-\sqrt{2}$ - Π^2 (полюс 2-го порядка)[6]:

$$g^2(z)=1+4z^2 \rightarrow 2g(z)g'(z)=8z \rightarrow g'(z)=\frac{8z}{2g(z)}=\frac{4z}{g(z)} \rightarrow g'(-\sqrt{2})=\frac{4(-\sqrt{2})}{g(-\sqrt{2})}=-4\frac{\sqrt{2}}{-3}=\frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$g''(z)=\left(\frac{8z}{2g(z)}\right)'=\frac{4}{g(z)}-\frac{4z}{g^2(z)}g'(z) \rightarrow g''(-\sqrt{2})=\frac{4}{-3}-\frac{4(-\sqrt{2})}{(-3)^2}\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{3}\left(-1+\frac{4\cdot 2}{9}\right)=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{27}$$

$$\left.\left((g(z)+3)^2\right)'\right|_{z=-\sqrt{2}}=2(g(z)+3)g'(z)\Big|_{z=-\sqrt{2}}=2(-3+3)\frac{4\sqrt{2}}{3}=0,$$

$$\left.\left((g(z)+3)^2\right)''\right|_{z=-\sqrt{2}}=\left.\left(2(g(z)+3)g'(z)\right)'\right|_{z=-\sqrt{2}}=2\left((g'(z))^2+(g(z)+3)g''(z)\right)\Big|_{z=-\sqrt{2}}=$$
$$2\left(\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2+(-3+3)\frac{4}{27}\right)=2\frac{16\cdot 2^2}{9}\neq 0$$

⑤ Интеграл $I=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}} f(z)dz$, можно вычислить по формуле $I=-2\pi i\left(\operatorname*{res}\limits_{z=-\sqrt{2}} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)\right)$[7].

⑥ Точка $z=-\sqrt{2}$ - Π^2 (полюс 2-го порядка), поэтому вычет[8] в этой точке равен $\operatorname*{res}\limits_{z=-\sqrt{2}} f(z)=\lim\limits_{z\to-\sqrt{2}}\dfrac{1}{(2-1)!}\dfrac{d}{dz}\left((z+\sqrt{2})^2 f(z)\right)$. ☹

---

[5] $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f=-c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности.

[6] **Определение**. Изолированная особая точка $a\in\overline{\mathbb{C}}$ функции $f:\overset{o}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ называется ***полюсом***, если существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

[7] **Теорема (Коши о вычетах).** Пусть дана область $G\in\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n\in G$ (при этом имеется в виду, что, если $\infty\in G$, то $\infty=a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула $\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname*{res}\limits_{a_k} f$.

Кроме того, $\operatorname*{res}_{z=-\sqrt{2}} f = c_{-1}$[9], где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке $-\sqrt{2}$ при $\frac{1}{z}$.

Рассмотрим точку $z = x + i0 = -\sqrt{2} + u$. $f\left(-\sqrt{2}+u\right) = \dfrac{-\sqrt{2}+u}{\left(g\left(-\sqrt{2}+u\right)+3\right)^2} =$

$$\frac{-\sqrt{2}+u}{\left(\sqrt{\left|1+4\cdot\left(-\sqrt{2}+u\right)^2\right|}e^{\frac{i}{2}((2\pi-\beta)+\beta)}+3\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}+u}{\left(\sqrt{\left|1+4\cdot\left(u^2-2\sqrt{2}u+2\right)\right|}e^{\frac{i}{2}2\pi}+3\right)^2} = \frac{u-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\left|1+4u^2-8\sqrt{2}u+8\right|}e^{i\pi}+3\right)^2}$$

$$= \frac{u-\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{9-8\sqrt{2}u+4u^2}+3\right)^2} = \frac{u-\sqrt{2}}{\left(3-3\sqrt{1-\frac{8}{9}\sqrt{2}u+\frac{4}{9}u^2}\right)^2} =$$

$$\frac{u-\sqrt{2}}{9\left(1-\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{9}\sqrt{2}u+\frac{4}{9}u^2\right)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8}{9}\sqrt{2}u\right)^2+o\left(u^2\right)\right)\right)^2} =$$

$$\frac{u-\sqrt{2}}{9\left(1-1-\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{9}\sqrt{2}u+\frac{4}{9}u^2\right)+\frac{1}{8}\frac{64}{81}2u^2+o\left(u^2\right)\right)^2} = \frac{u-\sqrt{2}}{9\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}u-\frac{2}{9}u^2+\frac{16}{81}u^2+o\left(u^2\right)\right)^2} =$$

$$\frac{u-\sqrt{2}}{9\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}u\right)^2\left(1+\frac{16-18}{81}\frac{9}{4\sqrt{2}}u+o(u)\right)^2} = \frac{u-\sqrt{2}}{\frac{16\cdot 2}{9}u^2\left(1-\frac{2}{9}\frac{1}{4\sqrt{2}}u+o(u)\right)^2} = \frac{9\left(u-\sqrt{2}\right)}{32u^2\left(1-\frac{1}{18\sqrt{2}}u+o(u)\right)^2} =$$

$$\frac{9}{32}\left(\frac{1}{u}-\frac{\sqrt{2}}{u^2}\right)\left(1+2\frac{1}{18\sqrt{2}}u+o(u)\right) = \frac{9}{32}\left(-\frac{\sqrt{2}}{u^2}+\frac{1}{u}-\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{2}u}+O(1)\right) = -\frac{9\sqrt{2}}{32u^2}+\frac{9}{32}\left(1-\frac{1}{9}\right)\frac{1}{u}+O(1)$$

По теореме единственности имеем: $f\left(-\sqrt{2}+w\right) = -\dfrac{9\sqrt{2}}{32w^2}+\dfrac{9}{32}\cdot\dfrac{8}{9}\dfrac{1}{w}+O(1)$. Откуда получаем, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{w}$ равен $c_{-1} = \frac{1}{4}$, следовательно $\boxed{\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{4}}$.

⑥ Окончательно $\boxed{I = -2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-\sqrt{2}} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right) = -2\pi i\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)\right) = 0}$

---

[8] **Определение.** Пусть изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f : \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \overset{\Delta}{=} \{z : |z-a| = r\}$ - положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда вычетом функции f в точке a называется число $\operatorname*{res}_a f = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)dz$.

[9] $\operatorname*{res}_a f = c_{-1}$, где c_{-1} - коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в конечной точке a при $\frac{1}{z}$.