Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2010/2011 уч.г.

№группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.(4) Выписать все возможные разложения функции $f(z)=\frac{z(4+i)}{z^2-iz-4-2i}$ в ряд Лорана по степеням z. Указать границы каждого из полученных колец сходимости.

2.(4) Найти и исследовать все особые точки функции (для полюсов указать их порядок):

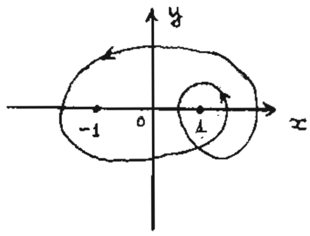
$$f(z)=\frac{(\pi^2-36z^2)\sin z}{\sin 5z-\sin z}\,e^{\frac{1}{\cos z}}.$$

3.(4) Найти конформное отображение области $\{z|\mathrm{Re}\, z>0,\ \ |z|<2\}$ с разрезом $\{z|\mathrm{Im}\, z=0,\ \ 1<\mathrm{Re}\, z<2\}$ на верхнюю полуплоскость.

4.(4) ~~Вычислить интеграл от функции~~ $\cancel{f(z)=\frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z}}$

а) (2) по малой петле гладкого контура, изображенного на рисунке;

б) (4) по всему контуру.



Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

5.(3) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-4)\sin(5-2x)dx}{x^2-6x+10}$$

6.(5)* $$\int_0^1\frac{(3x+1)dx}{(x+1)\sqrt[4]{(1-x)^3x}}$$

7.(7)* $\oint_{|z+3+3i|=6}\frac{(z+i)dz}{3+g(z)}$, где g(z) – регулярная ветвь функции $\sqrt{z^4-16}$ в плоскости с разрезом $\{z=2e^{it}, \frac{\pi}{2}\le t\le 2\pi\}$ такая, что g(0) = $4i$.

МФТИ-01

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2010/2011 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.(4) Функцию $f(z) = \frac{10-2iz}{iz^2+2z+3i}$ разложить в ряд Лорана по степеням $(z\text{-}2i)$ в кольце, которому принадлежит точка $(\frac{1-i}{2})$. Указать границы кольца сходимости.

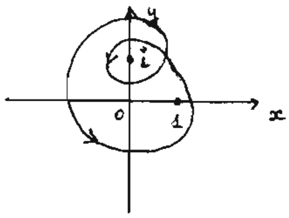
2.(4) Найти и исследовать все особые точки функции (для полюсов указать их порядок):

$$f(z)=\frac{(2z-\pi)^2 z^2}{(z-1)^2(1-\sin z)}\, sh\frac{1-z}{z}.$$

3.(4) Найти конформное отображение области $\{z\,|\operatorname{Im} z-\sqrt{3}\operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z+\sqrt{3}\operatorname{Re} z>0,\ |z|>1\}$ с разрезом $\{z|\operatorname{Im} z=0, \operatorname{Re} z\geq 2\}$ на верхнюю полуплоскость.

4.(4) Вычислить интеграл от функции $f(z)=\frac{z(z+1)}{z^2-(1+i)z+i}e^{\frac{1}{z}}$

а) (2) по малой петле гладкого контура, изображенного на рисунке;
б) (4)* по всему контуру.



Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

5.(3) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(5-6x)\cos(1-3x)dx}{9x^2-12x+20}$$

6.(5)* $$\int_0^1\frac{(2x+1)dx}{(x-2)\sqrt[3]{(1-x)x^2}}$$

7.(7)* $\oint_{|z+4+i|=5}\frac{zdz}{2z^2-ig(z)-3}$, где $g(z)$ – регулярная ветвь функции $\sqrt{4z^2-5z^4}$ в плоскости с разрезом $[\frac{-2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}]$ такая, что $g\left(\frac{i}{\sqrt{5}}\right)=i$.

МФТИ-02

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2010/2011 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.(4) Выписать все возможные разложения функции $f(z)=\frac{(1+2i)z}{z^2-z+1-i}$ в ряд Лорана по степеням z. Указать границы каждого из полученных колец сходимости.

2.(4) Найти и исследовать все особые точки функции (для полюсов указать их порядок):

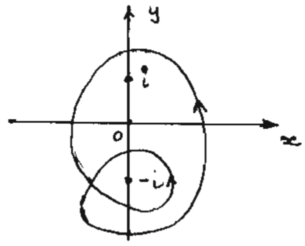
$$f(z)=\frac{(16z^2-9\pi^2)(\sin z)^2}{\sin 7z+\sin z}e^{\frac{-1}{\sin z}}.$$

3.(4) Найти конформное отображение области $\{z|\operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z<0,\ |z|>2\}$ с разрезом $\{z|\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z,\ \ 2<|z|<4\}$ на верхнюю полуплоскость.

4.(4) Вычислить интеграл от функции $f(z)=\frac{z}{z^2+1}\cos\frac{1}{z}$

а) (2) по малой петле гладкого контура, изображенного на рисунке;

б) (4)* по всему контуру.



Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

5.(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+3)\sin(1-2x)dx}{x^2+2x+2}$

6.(5)* $\int_0^2\frac{(x-2)dx}{(x-4)\sqrt[4]{(2-x)^3x}}$

7.(7)* $\oint_{|z-1-i|=3}\frac{(i-z)dz}{\sqrt{7}+ig(z)}$, где g(z) – регулярная ветвь функции $\sqrt{9-z^4}$ в плоскости с разрезом $\{z=\sqrt{3}e^{it},\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\pi\}$ такая, что $g(0)=3$.

МФТИ-03

Семестровая контрольная работа по ТФКП
5 семестр 2010/2011 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.(4) Функцию $f(z) = \frac{3+iz}{iz^2-6z-5i}$ разложить в ряд Лорана по степеням $(z+4i)$ в кольце, которому принадлежит точка $(1\text{-}6i)$. Указать границы кольца сходимости.

2.(4) Найти и исследовать все особые точки функции (для полюсов указать их порядок):

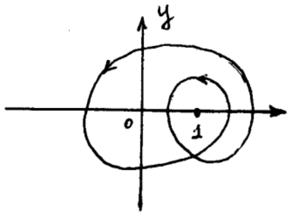
$$f(z)=\frac{(2\pi-z)^2(z+1)^2}{(1-z)^2(1-\cos z)}\sin\frac{z-1}{z+1}.$$

3.(4) Найти конформное отображение области $\{z|\operatorname{Re} z < 0, |z| < 3\}$ с разрезом $\{z|\operatorname{Im} z = 0,\ -3 < \operatorname{Re} z \le -2,\ -1 \le \operatorname{Re} z \le 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

4.(4) Вычислить интеграл от функции $f(z)=\frac{(z+1)^2}{z(z-1)}\sin\frac{1}{z}$

а) (2) по малой петле гладкого контура, изображенного на рисунке;

б) (4)* по всему контуру.



Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

5.(3) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1)\cos(5-2x)dx}{4x^2-16x+17}$$

6.(5)* $$\int_{-2}^{0}\frac{(x+1)dx}{(x+3)\sqrt[3]{x(x+2)^2}}$$

7.(7)* $\oint_{|z-2-3i|=6}\frac{zdz}{z^2+12+g(z)}$, где $g(z)$ – регулярная ветвь функции $\sqrt{2z^4+14z^2}$ в плоскости с разрезом $[-\sqrt{7}\,i;\sqrt{7}\,i]$ такая, что $g(1) = 4$.

МФТИ-04

Ответы.   Вариант 01

1.(4). $f(z) = \frac{2+i}{z-(2+i)} + \frac{2}{z+2}$;

D_1={z:$|z| < 2$} $f(z)= \sum_0^\infty((-2)^{-n} - (2+i)^{-n})z^n$,

D_2={z:2<$|z| < \sqrt{5}$} $f(z)= -\sum_0^\infty(2+i)^{-n}z^n - \sum_{-\infty}^{-1}(-2)^{-n}z^n$,

D_3={ z:$|z| > \sqrt{5}$} $f(z)= \sum_{-\infty}^{-1}((2+i)^{-n} - (-2)^{-n})z^n$.

2.(4) $z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$ - С.О.Т.

$z_m = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m\epsilon Z$ ($m \neq 0, -1$) – полюс 1 пор.

$z = \mp\frac{\pi}{6}$; $z_k = \pi k, k\epsilon Z$ – У.О.Т.

$z=\infty$ - неизолированная.

3.(4). $W_1 = \frac{z}{2}e^{\frac{i\pi}{2}}$; $W_2=(W_1)^2$; $W_3 = \frac{1}{2}(w_2 + \frac{1}{w_2})$; $W_4 = W_3 + \frac{17}{8}$;

$W_5 = \sqrt{W_4}$:($\sqrt{-1} = i$).

4.(4) а)(2) $\oint_{\gamma_1} \frac{z^2}{z^2-1} sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i(res f(z)_{z=1} = \pi i sin1$.

б)*(2) $\oint_{\gamma_1\cup\gamma_2} \frac{z^2}{z^2-1} sin\frac{1}{z}dz = \oint_{\gamma_1} \frac{z^2}{z^2-1} sin\frac{1}{z}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^2-1} sin\frac{1}{z}dz =$

$2\pi i sin1 - 2\pi i\ res f(z)_{z=\infty} = \pi i(sin1+2)$.

5.(4) $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} F(x)dx = J = -Im[\, 2\pi i\, res_{3+i}\frac{(z-4)e^{i(2z-5)}}{z^2-6z+10}\,] =$

$= -Im\left[2\pi i\frac{(z-4)e^{i(2z-5)}}{2(z-3)}\ \Big|_{z=3+i}\right] = \frac{\pi}{e^2}(sin1 - cos1)$.

6*.(5) $J\left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = 2\pi i(resF(z)_{z=-1} + resF(z)_{z=\infty}).J = \sqrt{2}\,\pi\left(3 - \sqrt[4]{2}\right)$.

$F(z) = \frac{(3z+1)}{(z+1)g(z)}, g(z)\epsilon\left\{\sqrt[4]{(1-z)^3z}\right\}$ – регулярная ветвь: $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$resF(z)_{z=-1} = \frac{3z+1}{g(z)}\ \Big|_{z=-1} = -\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.\ g(-1) = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$F(z) = \left(\frac{3}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}, z\to\infty.\ resF(z)_{z=\infty} = -3e^{i\frac{3\pi}{4}} = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

7*.(6).$J = -2\pi i\left[resF(z)_{z=\infty} + resF(z)_{z=i\sqrt{5}}\right].resF(z)_{z=i\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{10\sqrt{5}}$.

$g(\sqrt{5}) = 3, g(i\sqrt{5}) = -3.\ F(z) = \frac{z+i}{3+g(z)}\ .\ g(z) = \sum_0^\infty C_{\frac{1}{2}}^n(-16)^n z^{2-4n}$.

$F(z)\sim\frac{1}{z}\ , z\to\infty, \Rightarrow\ resF(z)_{z=\infty} = -1.\ J = \pi i\frac{7\sqrt{5}-3}{5\sqrt{5}}$.

Ответы.   Вариант 02

1.(4). $f(z) = \frac{2}{z+i} - \frac{4}{z-3i} = \frac{2}{t+3i} - \frac{4}{t-i}$; $t_0 = \frac{1-i}{2} - 2i = \frac{1-5i}{2}$.

$f(z) = -\sum_0^\infty \frac{2(i^{n+1})}{3^{n+1}}\ (z-2i)^n - \sum_{-\infty}^{-1} 4(i)^{-n-1}(z-2i)^n.$

$1 < |z-2i| < 3.$

2.(4) z =0 - С.О.Т.

z=1– полюс 1 пор.

$z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \epsilon \mathrm{Z}\ (\mathrm{k} \neq 0)$ – полюсы 2 пор.

$z = \frac{\pi}{2}$ - У.О.Т.

z=∞ - неизолированная.

3.(4). $W_1 = z^3$; $W_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{w}_1 + \frac{1}{\mathrm{w}_1})$; $W_3 = \frac{w_2-1}{w_2 - \frac{65}{16}}$; $W_4 = \sqrt{W}_3(\sqrt{-1} = i)$.

4.(4) а)(2) $\oint_{\gamma_1} \frac{z(z+1)}{z^2-(1+i)z+i} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i(res f(z)_{z=i}) = 2\pi(sin1+icos1).$

б)*(2) $\oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz =$

$= \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz - 2\pi i\, res f(z)_{z=\infty} = 2\pi[(sin1+1)+i(cos1-3)].$

$res f(z)_{z=\infty} = -3 - i.$

5.(4) $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)dx = J = Re[\ 2\pi i\ res_{\frac{2+4i}{3}} \frac{(5-6z)e^{i(3z-1)}}{9z^2-12z+20}\ ] =$

$= Re\left[2\pi i \frac{(5-6z)e^{i(3z-1)}}{6(3z-2)}\ \Big|_{z=\frac{2+4i}{3}}\right] = \frac{\pi}{12e^4}(cos1 + 8sin1).$

6*.(5). $J\left(1 - e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right) = 2\pi i(resF(z)_{z=2} + resF(z)_{z=\infty})$. $J = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(4 - 5\sqrt[3]{2})$.

$F(z) = \frac{(2z+1)}{(z-2)g(z)}$, $g(z)\epsilon\left\{\sqrt[3]{(1-z)z^2}\right\}$ – регулярная ветвь: $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$resF(z)_{z=2} = \frac{2z+1}{g(z)}\ \Big|_{z=2} = \frac{5}{\sqrt[3]{4}} e^{i\frac{\pi}{3}}$. $g(2) = \sqrt[3]{4}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$F(z) = \left(\frac{2}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) e^{i\frac{\pi}{3}}, z \to \infty.\ resF(z)_{z=\infty} = -2e^{i\frac{\pi}{3}}.$

7*.(6). $J = -2\pi i[resF(z)_{z=\infty} +\ resF(z)_{z=3i}].\ resF(z)_{z=3i} = -\frac{21}{10}.$

$g(1) = -i, g(3i) = 21i.\ F(z) = \frac{z}{2z^2 - ig(z) - 3}\ .\ g(z) =$

$-i\sqrt{5}\sum_0^\infty C_{\frac{1}{2}}^n \left(-\frac{4}{5}\right)^n z^{2-2n}.$

$F(z) \sim \frac{1}{(2-\sqrt{5})z}\ , z \to \infty, \Rightarrow\ resF(z)_{z=\infty} = \frac{1}{\sqrt{5}-2}.\ J = \frac{\pi i}{5}(1 - 10\sqrt{5}).$

Ответы. Вариант 03

1.(4). $f(z) = \frac{i}{z+i} + \frac{1+i}{z-(1+i)}$;

$D_1=\{z:|z| < 1\}$ $f(z)= \sum_0^\infty((i)^n - (1+i)^{-n})z^n,$

$D_2=\{z:1<|z| < \sqrt{2}\}$ $f(z)= -\sum_0^\infty(1+i)^{-n}z^n - \sum_{-\infty}^{-1}(i)^n z^n,$

$D_3=\{ z:|z| > \sqrt{2}\}$ $f(z)= \sum_{-\infty}^{-1}((1+i)^{-n} - (i)^n)z^n.$

2.(4) $z_n = \pi n, n \epsilon Z$ - С.О.Т.

$z_m = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m$, $m\epsilon Z$; $z_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ($k\neq$--2,1) – полюс 1 пор.

$z = \pm\frac{3\pi}{4}$ – У.О.Т.

$z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$ – полюс 2 пор.

$z=\infty$ - неизолированная.

3.(4). $W_1 = \frac{-z}{2}$; $W_2=(W_1)^4$; $W_3 = \frac{1}{2}(w_2 + \frac{1}{w_2})$; $W_4 = W_3 + \frac{257}{32}$;

$W_5 = \sqrt{W}_4 (\sqrt{-1} = i)$.

4.(4) а)(2) $\oint_{\gamma_1} \frac{z}{z^2+1} \cos\frac{1}{z} dz = 2\pi i(res f(z)_{z=-i}) = \pi i(\cos i) = \pi i ch1.$

б)*(2) $\oint_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} \frac{z}{z^2+1}\cos\frac{1}{z}\,dz =$

$= \pi i ch1 - 2\pi i(res f(z)_{z=\infty}) = \pi i(2+ch1).$

5.(4) $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R F(x)dx = J = -\text{Im}\,[\,2\pi i\, res_{z=-1+i}\frac{(z+3)e^{i(2z-1)}}{z^2+2z+2}\,] =$

$= -\text{Im}\left[2\pi i\frac{(z+3)e^{i(2z-5)}}{2(z+1)}\,\Big|_{z=-1+i}\right] = \frac{\pi}{e^2}(2\sin 3 - \cos 3).$

6*.(5). $J\left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = 2\pi i(resF(z)_{z=4} + resF(z)_{z=\infty})$. $J = \pi\left(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}\right)$.

$F(z) = \frac{(z-2)}{(z-4)g(z)}$, $g(z)\epsilon\left\{\sqrt[4]{(2-z)^3 z}\right\}$ – регулярная ветвь: $g(1) = 1$.

$resF(z)_{z=4} = \frac{z-2}{g(z)}\,\Big|_{z=4} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. $g(4) = 2\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$F(z) = \left(\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}, z\to\infty$. $resF(z)_{z=\infty} = -e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

7*.(6). $J = -2\pi i[resF(z)_{z=\infty} + resF(z)_{z=-2i}]$. $resF(z)_{z=-2i} = -\frac{3\sqrt{7}}{16}$.

$g(-2i) = i\sqrt{7}, g(-2) = -i\sqrt{7}$. $F(z) = \frac{i-z}{\sqrt{7}+ig(z)}$. $g(z) =$

$-i\sum_0^\infty C_{\frac{1}{2}}^n(-9)^n z^{2-4n}$. $|z| > \sqrt{3}$

$F(z) \sim -\frac{1}{z}, z\to\infty, \Rightarrow resF(z)_{z=\infty} = 1$. $J = \pi i\frac{3\sqrt{7}-16}{8}$.

Ответы. Вариант 04

1.(4). $f(z) = \frac{2}{z+5i} - \frac{1}{z+i} = \frac{2}{t+i} - \frac{1}{t-3i}$; $t_0 = 1 - 6i + 4i = 1 - 2i.$

$f(z) = -\sum_0^\infty (3i)^{-n-1}\,(z+4i)^n + \sum_{-\infty}^{-1} 2(i)^{n+1}(z+4i)^n.$

$1 < |z+4i| < 3.$

2.(4) z =-1 - С.О.Т.

z=1- полюс 1 пор.

$z_k = 2\pi k$, $k \epsilon Z$ $(k \neq 1)$– полюсы 2 пор.

z= 2π - У.О.Т.

z=∞ - неизолированная.

3.(4). $W_1 = -\frac{z}{3}$; $W_2 = (W_1)^2$; $W_3 = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$; $W_4 = \frac{w_3 - \frac{97}{72}}{w_3 - \frac{41}{9}}$;

$W_5 = \sqrt{W}_4 : (\sqrt{-1} = i).$

4.(4) а)(2) $\oint_{\gamma_1} \frac{(z+1)^2}{z(z-1)} sin\frac{1}{z} dz$= 2πi$(resf(z)_{z=1})$ =8$\pi i(sin1)$.

б)*(2) $\oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} \frac{(z+1)^2}{z(z-1)} sin\frac{1}{z} dz =$

8$\pi i(sin1)$ - 2πi$(resf(z)_{z=\infty})$ =2πi(4sin1+1).

5.(4) $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)dx$ =J=Re[2πi $res_{z=2+\frac{i}{2}} \frac{(z-1)e^{i(2z-5)}}{4z^2-16z+17}$]=

$=Re\left[2\pi i \frac{(z-1)e^{i(2z-5)}}{8(z-2)}\ \Big|_{z=2+\frac{i}{2}}\right] = \frac{\pi}{4e}(2cos1 + sin1).$

6*.(5). $J\left(1 - e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right) = 2\pi i(resF(z)_{z=-3} + resF(z)_{z=\infty}).$ $J = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} - 1\right).$

$F(z) = \frac{(z+1)}{(z+3)g(z)}$, $g(z)\epsilon\left\{\sqrt[3]{(2+z)^2 z}\right\}$ – регулярная ветвь: $g(-1) = -1.$

$resF(z)_{z=-3} = \frac{z+1}{g(z)}\ \Big|_{z=-3} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$ $g(-3) = -\sqrt[3]{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$F(z) = \left(\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)e^{-i\frac{2\pi}{3}}, z \to \infty.$ $resF(z)_{z=\infty} = -e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$

7*.(6).$J = -2\pi i\left[resF(z)_{z=\infty} + resF(z)_{z=-i\sqrt{8}}\right].$ $resF(z)_{z=-i\sqrt{8}} = \frac{2}{13}.$

$g(-i\sqrt{8}) = -4, g(3\sqrt{2}) = 30.$ $F(z) = \frac{z}{z^2+12+g(z)}$. $g(z) = \sqrt{2}\sum_0^\infty C_{\frac{1}{2}}^n (7)^n z^{2-2n}.$ $|z| > \sqrt{7}$

$F(z) \sim \frac{1}{(\sqrt{2}+1)z}$, $z \to \infty, \Rightarrow$ $resF(z)_{z=\infty} = 1 - \sqrt{2}.$ $J = \frac{2\pi i}{13}(13\sqrt{2} - 15).$