Содержание

1 Элеметарная теория погрешностей.

Пусть u и u^* — соответственно приближенное и точное значение некоторой величины. **Абсолютной погрешностью** приближения u называют величину $\Delta(u)$, удовлетворяющей неравенству

$$|u - u^*| \leq \Delta(u)$$

Относительной погрешностью называется величина $\delta(u)$, удовлетворяющая неравенству

$$\left|\frac{u - u^*}{u}\right| \leq \delta(u)$$

Пример.
Оцените погрешности Δx в определении корня $x = 1$ уравнения

$$ax^4 + bx^3 + dx + e = 0$$

с параметрами

$$a = b = 1 \pm 10^{-3}, \quad c = d = -1 \pm 10^{-3},$$

не решая само уравнение.
Решение. Погрешность параметров дает погрешность корней, поэтому уравнение можно представить в виде

$$(a+\Delta a)(x+\Delta x)^4+(b+\Delta b)(x+\Delta x)^3+(d+\Delta d)(x+\Delta x)+e+\Delta e = 0$$

С другой стороны, имеет место точное равенство

$$ax^4 + bx^3 + dx + e = 0$$

Вычитая из первого уравнения второе и принебрегая величинами с порядком малости больше единицы, получим

$$\Delta x = \left| \frac{-x^4\Delta a - x^3\Delta b - x\Delta d - \Delta e}{4x^3 a + 3x^2 b + d} \right|$$

Подставляя значения параметров и их погрешностей, получаем для корня $x = 1$ $\Delta x = \frac{2}{3}10^{-3}$.

Пример.

Для системы

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -10 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

найти $\Delta\lambda_1$ и $\Delta\lambda_2$, если $\Delta\lambda_3 = 0.2$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру, имеем

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \Delta\lambda_1)(\lambda_2 + \Delta\lambda_2)(\lambda_3 + \Delta\lambda_3) = -10 \\ \lambda_1 + \Delta\lambda_1 + \lambda_2 + \Delta\lambda_2 + \lambda_3\Delta\lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Вычитая из этой системы систему без погрешностей и отбрасывая величины с порядком малости больше единицы, получим

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2\Delta\lambda_3 + \lambda_1\Delta\lambda_2\lambda_3 + \Delta\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \\ \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 + \Delta\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $\Delta\lambda_1$ и подставим в первое. Имеем

$$\Delta\lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \Delta\lambda_3 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3} \right),$$

откуда находим $\Delta\lambda_2$ относительно λ_1, λ_2 и λ_3. Аналогично для $\Delta\lambda_1$.

2 Решение систем линейных алгебраических уравнений.

2.1 Нормы в конечномерных пространствах.

В векторном конечномерном линейном нормированном пространстве введем следующие нормы вектора:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{x}\|_1 &= \max_k |x_k| \\
\|\overrightarrow{x}\|_2 &= \sum_k |x_k| \\
\|\overrightarrow{x}\|_3 &= \sqrt{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}
\end{aligned}$$

Согласованные с этими нормами векторов нормы матриц будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_k \sum_j |a_{kj}| \\
\|A\|_2 &= \max_j \sum_k |a_{kj}| \\
\|A\|_3 &= \sqrt{\max_k \lambda_k \left(A^T A\right)}
\end{aligned}$$

Здесь и далее считаем квадратную матрицу A невырожденной. λ_k — ее собственные значения.
В случае, когда A — симметричная, имеем $A^T = A$ и

$$\|A\|_3 = \max_k |\lambda_k (A)|$$

2.2 Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть в СЛАУ

$$A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$$

матрица A и правая часть заданы с некоторой погрешностью. Тогда и решение будет неточным, а реально рассматриваемая система будет иметь вид

$$(A + \Delta A)(\overrightarrow{u} + \Delta\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f} + \Delta\overrightarrow{f},$$

где $\Delta\overrightarrow{u}$ — погрешность решения.

Введем понятие **числа обусловленности**:

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Имеет место следующая оценка относительной погрешности решения:

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta\overrightarrow{f}\|}{\|\overrightarrow{f}\|} \right)$$

Если матрица дана без погрешности ($\Delta A = 0$), то

$$\frac{\|\Delta\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} \leq \mu(A) \frac{\|\Delta\overrightarrow{f}\|}{\|\overrightarrow{f}\|}$$

В этом случае также пользуются другим параметром обусловленности:

$$\nu(A, \overrightarrow{f}) = \sup_{\Delta\overrightarrow{f} \neq \overrightarrow{0}} \frac{\|\Delta\overrightarrow{u}\|/\|\overrightarrow{u}\|}{\|\Delta\overrightarrow{f}\|/\|\overrightarrow{f}\|} = \frac{\|\overrightarrow{f}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} \cdot \|A^{-1}\|,$$

причем можно показать, что $1 \leq \nu \leq \mu$.

Иногда можно пренебречь величинами второго порядка малости и выше ($\Delta A \cdot \Delta \overrightarrow{u} \approx 0$), тогда

$$\frac{\|\Delta \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} \leq \mu(A) \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta \overrightarrow{f}\|}{\|\overrightarrow{f}\|} \right)$$

Число обусловленности определяет, насколько погрешность входных данных может повлиять на решение системы. $\mu(A) \geq 1$, так как

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|E\| = 1$$

При $\mu(A) \approx 1 \div 10$ система считается хорошо обусловленной: ошибки входных данных слабо сказываются на решении системы. При $\mu(A) \gg 100$ система считается плохо обусловленной.

Пример.

Найдем числа обусловленности для всех норм и параметр ν_1 для первой нормы системы

$$\begin{cases} x_1 + 0.99x_2 = b_1 \\ 0.99x_1 + x_2 = b_2 \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, $\|A\|_1 = \|A\|_2 = 1.99$

Для нахождения третьей нормы учтем, что A — симметричная. $\lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 1.99$, откуда $\|A\|_3 = 1.99$.

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj} A}{\det A}, \quad \mathrm{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & -0.99 \\ -0.99 & 1 \end{pmatrix}$$

где adj$A$ — присоединенная матрица. Тогда

$$\|A^{-1}\|_1 = \|A^{-1}\|_2 = \|A^{-1}\|_3 = \frac{1.99}{\det A}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1.99^2}{\det A} = 199$$

Чтобы найти ν_1, сначала нужно решить систему.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & 0.99 \\ b_2 & 1 \end{vmatrix} = b_1 - 0.99 b_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ 0.99 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 - 0.99 b_1$$

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b_1 - 0.99 b_2 \\ b_2 - 0.99 b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{u}\|_1 = \frac{|b_1 - b_2|}{detA}$$

В данном случае было сделано приближение $0.99 b_2 \approx b_2$, $0.99 b_1 \approx b_1$.

$$\nu_1 = \frac{\|\overrightarrow{f}\|_1}{\|\overrightarrow{u}\|_1} \cdot \|A^{-1}\|_1 = \frac{max(b_1, b_2) \det A}{|b_1 - b_2|} \cdot \frac{1.99}{\det A} \approx$$
$$\approx 2 \frac{max(b_1, b_2)}{|b_1 - b_2|}$$

2.3 Итерационные методы решения линейных систем.

2.3.1 Метод простых итераций.

Рассматриваем СЛАУ

$$A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$$

Представим матрицу A в виде суммы $A = B + C$, причем $\det B \neq 0$. Тогда

$$B\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f} - C\overrightarrow{u}$$

и

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{-B^{-1}C}_{G}\overrightarrow{u} + \underbrace{B^{-1}\overrightarrow{f}}_{\overrightarrow{g}} = G\overrightarrow{u} + \overrightarrow{g}$$

Выбрав произвольный вектор $\overrightarrow{u}^{(0)}$ за начальное приближение, метод простой итерации (МПИ) строится путем уточнения начального приближения $\overrightarrow{u}^{(0)}$ по рекуррентному соотношению

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = G\overrightarrow{u}^{(k)} + \overrightarrow{g}$$

Метод сходится, если сходится итерационный процесс, то есть существует $\lim\limits_{k} \overrightarrow{u}^{(k)}$.

Ответ на вопрос сходимости МПИ к точному решению дают следующие теоремы (здесь и далее точное решение СЛАУ будем обозначать $\overrightarrow{u}^{*}$)

Теорема 1 (достаточное условие сходимости МПИ): *если $\|G\| = q < 1$, то существует единственное решение $\overrightarrow{u}^{*}$ уравнения $\overrightarrow{u} = G\overrightarrow{u} + \overrightarrow{g}$ при любом начальном приближении $\overrightarrow{u}^{(0)}$, причем*

$$\|\overrightarrow{u}^{(k)} - \overrightarrow{u}^{*}\| \leq q^{k}\|\overrightarrow{u}^{(0)} - \overrightarrow{u}^{*}\|$$

Теорема 2 (критерий сходимости МПИ): *для сходимости итерационного процесса $\overrightarrow{u}^{(k+1)} = G\overrightarrow{u}^{(k)} + \overrightarrow{g}$ к $\overrightarrow{u}^{*}$ необходимо и достаточно, чтобы $|\lambda_i(G)| < 1$.*

Отметим, что сходимость метода можно проверять по любой норме, так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. То есть если метод сходится по какой-то одной норме, то он сходится и по остальным нормам.

Частным случаем метода простых итераций является однопараметрический МПИ. Для этого вводится итерационный параметр $\tau > 0$, затем на него умножается исходная СЛАУ, после чего к правой и левой частям системы прибавляют $\overrightarrow{u}$:

$$\tau A\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = \tau\overrightarrow{f} + \overrightarrow{u},$$

откуда

$$\overrightarrow{u} = \underbrace{(E - \tau A)}_{G}\overrightarrow{u} + \underbrace{\tau\overrightarrow{f}}_{\overrightarrow{g}}$$

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = G\overrightarrow{u}^{(k)} + \overrightarrow{g}$$

Если матрица A положительно определена и симметрична, то однопараметрический МПИ сходится при

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{max}(A)},$$

поэтому если нужно определить область параметров, при которых МПИ сходится, в случае, когда матрица A не является симметричной, то ее следует привести к симметричному виду, например, умножением левой и правой частей исходной системы на A^T.

Оптимальным значением параметра считается величина

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

Если за начальное приближение взят вектор $\overrightarrow{u}^{(0)} = \overrightarrow{0}$, то можно оценить количество итераций МПИ, необходимое для достижения точности ε:

$$N = \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\overrightarrow{g}\|}}{\ln q} \right] + 1$$

Пример(Задача № 1*).

Для СЛАУ $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ постройте сходящийся однопараметрический метод простой итерации. Укажите область параметров, при которых МПИ сходится. Оцените количество итераций МПИ, необходимое для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$, если в качестве начального приближения выбран вектор $\overrightarrow{u}^{(0)} = (0, 0)^T$.

Решение. Приведем матрицу системы к симметричному виду:

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$$

Теперь исходная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{f}$$

Далее

$$G = E - \tau B, \quad \overrightarrow{f}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{f}, \quad \overrightarrow{g} = \tau \overrightarrow{f}'$$

В итоге мы построили однопараметрический МПИ

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = G\overrightarrow{u}^{(k)} + \overrightarrow{g},$$

который сходится при

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{max}(B)} \approx 0.053$$

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \frac{1}{19}$$

Для оптимального значения параметра

$$\overrightarrow{g} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Дальше будем использовать третью норму:

$$G = E - \tau B = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -6 & -18 \\ -18 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица G симметричная, поэтому для третьей нормы

$$q = \|G\|_3 = \max_k |\lambda_k(G)| = \frac{6\sqrt{10}}{19}$$

в частности, этим мы доказали, что наш метод сходится, так как выполняется достаточное условие сходимости МПИ (достаточно выполнения условия теоремы хотя бы для какой-то одной нормы).

$$\|\overrightarrow{g}\|_3 = \sqrt{(\overrightarrow{g}, \overrightarrow{g})} = \frac{\sqrt{74}}{19}$$

$$N = \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\overrightarrow{g}\|_3}}{\ln q}\right] + 1 = 9155$$

2.3.2 Метод Якоби.

Представим матрицу A в виде

$$A = L + D + U,$$

где L и U — нижняя и верхняя треугольные матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали, D — диагональная матрица.

Построим итерационный метод Якоби:

$$D\overrightarrow{u}^{(k+1)} + (L+U)\overrightarrow{u}^{(k)} = \overrightarrow{f},$$

откуда

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{G}\overrightarrow{u^{(k+1)}} + \underbrace{D^{-1}\overrightarrow{f}}_{\overrightarrow{g}}$$

Ответ на вопрос сходимости метода Якоби к точному решению дают следующие теоремы

Теорема 1 (достаточное условие сходимости метода Якоби): *метод Якоби сходится к $\overrightarrow{u}^*$, если выполнено условие* ***диагонального преобладания****:*

$$|a_{jj}| > \sum_{k \neq j} |a_{jk|}$$

Теорема 2 (критерий сходимости метода Якоби): *для сходимости метода Якоби к $\overrightarrow{u}^*$ необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю не превосходили единицы.

Пример.

Для СЛАУ $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ постройте сходящийся метод Якоби. Оцените количество итераций, необходимое для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Здесь

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Построим метод Якоби:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{u}^{(k+1)} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{u}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как D — единичная, то

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{u}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Выберем первую норму. Для нее

$$q = \|G\|_1 = \frac{1}{2}, \quad \|\overrightarrow{g}\|_1 = 1$$

Наш метод сходится, так как выполняется условие диагонального преобладания.
Выберем в качестве начального приближения вектор $\overrightarrow{u}^{(0)} = (0, 0)^T$, тогда

$$N = \left[\frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{\|\overrightarrow{g}\|_1}}{\ln q} \right] + 1 = 12$$

2.3.3 Метод Зейделя.

Матрица A разбивается так же, как и в методе Якоби, но итерационный процесс строится иначе:

$$(L + D)\overrightarrow{u}^{(k+1)} + U\overrightarrow{u}^{(k)} = \overrightarrow{f},$$

откуда

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{G}\overrightarrow{u}^{(k)} + \underbrace{(L+D)^{-1}\overrightarrow{f}}_{\overrightarrow{g}}$$

Ответ на вопрос сходимости метода Зейделя к точному решению дают следующие теоремы

Теорема 1 (достаточное условие сходимости метода Зейделя): *метод Зейделя сходится к $\overrightarrow{u}^*$, если исходная матрица A — вещественная, симметричная и положительно определенная.*

Теорема 2 (критерий сходимости метода Зейделя): *для сходимости метода Зейделя к $\overrightarrow{u}^*$ необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

по модулю не превосходили единицы.

Пример.

Найти область допустимых значений параметров α и β, при которых метод Зейделя сходится для СЛАУ $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta & 0 \\ \lambda\beta & \lambda\alpha & \beta \\ 0 & \lambda\beta & \lambda\alpha \end{vmatrix} = \lambda^3\alpha^3 - 2\lambda^2\alpha\beta^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = \frac{2\beta^2}{\alpha^2},$$

причем $\alpha \neq 0$, так как в этом случае матрица A вырождается и детерминант, выписанный в начале решения, равен нулю при любых λ, а значит, по критерию сходимости, метод сходиться не будет. Используя критерий сходимости метода Зейделя, получаем

$$\lambda_3 \leq 1,$$

и окончательно

$$|\beta| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha|, \quad \alpha \neq 0$$

Пример.
Для СЛАУ $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ постройте сходящийся метод Зейделя. Вычислите первую итерацию, если начальное приближение $\overrightarrow{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Здесь

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Построим метод Зейделя:

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{g} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{u}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Метод сходится, так как выполняется достаточное условие сходимости. Найдем первую итерацию:

$$\overrightarrow{u}^{(1)} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Отметим, что первая итерация совпала с точным решением СЛАУ.

2.3.4 Метод верхней релаксации.

Иногда для ускорения сходимости метода Зейделя прибегают к методу верхней релаксации. Для этого вводят показатель релаксации p $(0 < p < 1)$ и строят итерационный процесс:

$$L\overrightarrow{u}^{(k+1)} + D\frac{\overrightarrow{u}^{(k+1)} + p\overrightarrow{u}^{(k)}}{1+p} + U\overrightarrow{u}^{(k)} = \overrightarrow{f}$$

С показателем релаксации связывают итерационный параметр $\tau = 1 + p$. Часто итерационный параметр выбирают близким к оптимальному (см. пункт 1.3.1), откуда затем находят показатель релаксации.

Пример.

Для СЛАУ $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ вычислите первую итерацию метода верхней релаксации, если начальное приближение $\overrightarrow{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Здесь

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим $\overrightarrow{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$ и найдем первую итерацию метода верхней релаксации:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\frac{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1+p} \right) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+p} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2(x_2 + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+p} x_1 = 0 \\ x_1 + \dfrac{2}{1+p}(x_2 + p) = 1, \end{cases}$$

откуда $\overrightarrow{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-p}{2} \end{pmatrix}^T$

2.4 Методы решения, основанные на минимизации функционалов.

Рассматриваем СЛАУ

$$A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$$

Введем функционал

$$\Phi(\overrightarrow{u}) = (A\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) - 2\left(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{u}\right)$$

Теорема: *если матрица A симметрична и положительно определена, то существует единственный элемент $\overrightarrow{u}^*$, придающий функционалу $\Phi(\overrightarrow{u})$ наименьшее значение, причем $A\overrightarrow{u}^* = \overrightarrow{f}$.*
Эта теорема позволяет свести нахождение решения СЛАУ к нахождению минимума соответствующего функционала.

2.4.1 Метод наискорейшего спуска и метод минимальных невязок.

Градиент рассматриваемого нами функционала имеет вид:

$$\nabla\Phi(\overrightarrow{u}) = 2(A\overrightarrow{u} - \overrightarrow{f})$$

Чтобы найти решение СЛАУ, можно найти минимум соответствующего функционала. Так как направление градиента есть направление наибольшего возрастания функционала, то для нахождения минимума функционала нам нужно двигаться от некоторой начальной точки (начального приближения) в направлении, противоположном направлению градиента. Соответствующий итерационный процесс выглядит следующим образом:

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = \overrightarrow{u}^{(k)} - \alpha_k \nabla\Phi\left(\overrightarrow{u}^{(k)}\right)$$

Вектор

$$\overrightarrow{r_k} = A\overrightarrow{u}^{(k)} - \overrightarrow{f}$$

называется **вектором невязки**. Тогда

$$\nabla\Phi\left(\overrightarrow{u}^{(k)}\right) = 2\overrightarrow{r_k}$$

Методы наискорейшего спуска и минимальных невязок отличаются только выбором параметра α_k:

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\frac{(\overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{r_k})}{(A\overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{r_k})} \text{ — метод наискорейшего спуска;}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\frac{(A\overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{r_k})}{(A\overrightarrow{r_k}, A\overrightarrow{r_k})} \text{ — метод минимальных невязок.}$$

Пример.

Для СЛАУ $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ вычислите первую итерацию метода минимальных невязок, если начальное приближение $\overrightarrow{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычисляем нулевой вектор невязки:

$$\overrightarrow{r_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\nabla\Phi\left(\overrightarrow{u}^{(0)}\right) = 2\overrightarrow{r_0} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем параметр α_0:

$$A\overrightarrow{r_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{(A\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{r_0})}{(A\overrightarrow{r_0}, A\overrightarrow{r_0})} = \frac{1}{5},$$

и окончательно

$$\overrightarrow{u}^{(1)} = \overrightarrow{u}^{(0)} - \alpha_0 \nabla\Phi\left(\overrightarrow{u}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Метод сопряженных градиентов.

Данный метод является точным. Его суть заключается в том, чтобы выбирать параметры α_k таким образом, чтобы каждый следующий вектор невязки был ортогонален всем предыдущим. Так как мы рассматриваем конечномерные пространства, то на последнем шаге вектор невязки будет нулевым, так как в конечномерном пространстве число ненулевых взаимно ортогональных векторов конечно. Таким образом можно получить точное решение за конечное число итераций.

Приведем одно из возможных построений метода.

$$\overrightarrow{u}^{(1)} = (E - \tau_1 A)\,\overrightarrow{u}^{(0)} + \tau_1 \overrightarrow{f},$$

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = \alpha_{k+1}\,(E - \tau_{k+1}A)\,\overrightarrow{u}^{(k)} + (1-\alpha_{k+1})\,\overrightarrow{u}^{(k-1)} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}\overrightarrow{f},$$

где

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{k+1} = \left[1 - \frac{1}{\alpha_k}\frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}\frac{(\overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{r_k})}{(\overrightarrow{r}_{k-1}, \overrightarrow{r}_{k-1})}\right]^{-1}$$

2.5 Степенной метод нахождения максимального по модулю собственного значения.

Пусть матрица A — самосопряженная, т.е. $A^T = \overline{A}$. Выберем произвольный ненулевой вектор $\overrightarrow{u}^{(0)}$ и построим последовательность векторов

$$\overrightarrow{u}^{(k+1)} = A\overrightarrow{u}^{(k)}$$

Итерационный процесс

$$\lambda^{(k)} = \frac{(A\overrightarrow{u}^{(k)}, \overrightarrow{u}^{(k)})}{(\overrightarrow{u}^{(k)}, \overrightarrow{u}^{(k)})} = \frac{(\overrightarrow{u}^{(k+1)}, \overrightarrow{u}^{(k)})}{(\overrightarrow{u}^{(k)}, \overrightarrow{u}^{(k)})}$$

есть последовательность приближений максимального по абсолютной величине собственного значения матрицы A.

Если матрица A симметричная с действительными элементами, то также справедливо другое приближение:

$$\lambda^{(k)} = \frac{(A^{k+1}\overrightarrow{u}^{(0)})_{max}}{(A^{k}\overrightarrow{u}^{(0)})_{max}},$$

где индекс max означает, что нужно выбрать максимальный элемент вектора.

Для нахождения минимального по абсолютной величине собственного значения матрицы A нужно использовать степенной метод, только матрицу A в итерационном процессе следует заменить на обратную, так как собственные значения матриц A и A^{-1} взаимно обратны.

Пример (Задача № 2*).

Проведите три шага вычислений для определения максимального по модулю собственного значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и соответствующего собственного вектора степенным методом, взяв в качестве начального приближения вектор $\overrightarrow{u}^{(0)} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$.

Решение. Матрица A — симметричная с действительными элементами, поэтому

$$\lambda^{(k)} = \frac{(A^{k+1}\overrightarrow{u}^{(0)})_{max}}{(A^k\overrightarrow{u}^{(0)})_{max}}$$

$$\lambda^{(0)} = (A\overrightarrow{u}^{(0)})_{max} = \left(\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)_{max} = \begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}_{max} = 4$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{(A^2\overrightarrow{u}^{(0)})_{max}}{(A\overrightarrow{u}^{(0)})_{max}} = \frac{\begin{pmatrix}17 & 6\end{pmatrix}^T_{max}}{\begin{pmatrix}4 & 1\end{pmatrix}^T_{max}} = \frac{17}{4}$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{(A^3\overrightarrow{u}^{(0)})_{max}}{(A^2\overrightarrow{u}^{(0)})_{max}} = \frac{\begin{pmatrix}74 & 29\end{pmatrix}^T_{max}}{\begin{pmatrix}17 & 6\end{pmatrix}^T_{max}} = \frac{74}{17}$$

Соответствующий собственный вектор есть «числитель» последней итерации:

$$\overrightarrow{u}^{(3)} = \begin{pmatrix}74\\ 29\end{pmatrix}$$

3 Методы численного решения уравнений и систем нелинейных уравнений.

3.1 Локализация корней.

Рассмотрим произвольную матрицу A с элементами a_{ij}. Рассмотрим круги на комплексной плоскости:

$$P_i: \quad |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

$$Q_j: \quad |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

Здесь радиусы кругов равны сумме модулей внедиагональных элементов i-ой строки и соответственно j-го столбца матрицы.

Теорема Гершгорина: *все собственные значения матрицы A принадлежат множеству*

$$\left(\bigcup_i P_i\right) \bigcap \left(\bigcup_j Q_j\right)$$

на комплексной плоскости.

Отметим, что для симметричных матриц $P_i \equiv Q_i$.

Пример.

Используя теорему Гершгорина, локализовать корни характеристического уравнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

и провести три шага вычислений для определения максимального по модулю собственного значения степенным методом, взяв в качестве начального приближения вектор $\overrightarrow{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Матрица A — симметричная, поэтому $P_i \equiv Q_i$ и по теореме Гершгорина все собственные значения лежат на объединении кругов

$$\begin{cases} |z-3| \le 1 \\ |z-1| \le 1 \\ |z+2| \le 2 \end{cases}$$

Теперь как и в примере пункта 1.5 находим

$$\lambda^{(0)} = 3, \quad \lambda^{(1)} = \frac{10}{3}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{31}{10}$$

Рассмотрим теперь многочлены $P(x)$ и $P_1(x) = P'(x)$. Будем искать наибольший общий делитель многочленов $P(x)$ и $P_1(x)$ по алгоритму Евклида:

$$\begin{aligned} P &= q_1 P_1 - P_2 \\ P_1 &= q_2 P_2 - P_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{n-2} &= q_{n-1} P_{n-1} - P_n \\ P_{n-1} &= q_n P_n \end{aligned}$$

Последовательность $\{P_i\}$ называется **последовательностью Штурма** многочлена P.

Теорема Штурма: *пусть $\omega(x)$ — число перемен знака в последовательности $\{P_i(x)\}$. Тогда количество корней многочлена P (без учета их кратности), заключенных между a и b, где $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$ и $a < b$, в точности равно $\omega(a) - \omega(b)$.*

3.2 Принцип сжимающих отображений. Метод простых итераций. Условие сходимости метода простых итераций.

Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$$

Ее можно переписать в равносильном виде

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})$$

Пусть $\overrightarrow{x} \in X$. *Отображение* $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) : X \to X$ *называется* ***сжимающим*** *в замкнутой выпуклой области* X, *если*

$$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X\ \exists q(0 < q < 1) : \rho\left[\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{F}(\overrightarrow{y})\right] \leq q\rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$$

В линейном нормированном пространстве расстояние есть норма разности векторов.

Отображение $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) : X \to X$ *называется* ***непрерывным****, если*

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \Omega : \rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) < \delta \longrightarrow \longrightarrow \rho\left[\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{F}(\overrightarrow{y})\right] < \varepsilon$$

Теорема 1: *пусть отображение* $\overrightarrow{F} : X \to X$ *– сжимающее. Тогда*
1. метод простой итерации

$$\overrightarrow{x}^{(k+1)} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}^{(k)})$$

сходится к точному решению $\overrightarrow{x}^*$ *системы* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})$;
2. при любом начальном приближении $\overrightarrow{x}^{(0)}$ *выполняется неравенство*

$$\rho(\overrightarrow{x}^{(k)}, \overrightarrow{x}^*) \le \frac{q^k}{1-q}\rho(\overrightarrow{x}^{(1)}, \overrightarrow{x}^{(0)})$$

Теорема 2: *если для вектор-функции* $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})$, *заданной на линейном нормированном пространстве, якобиан*

$$J = \frac{d\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})}{d\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

существует, причем $\|J\| \le q < 1$ $\forall \overrightarrow{x} \in X$, *то отображение* $\overrightarrow{F} : X \to X$ *является сжимающим в* X.
Таким образом, досаточным условием сходимости метода простой итерации в случае решения системы нелинейных уравнений является условие $\|J\| < 1$.
Пример (Задача № 3*).
Предложите сходящийся метод простой итерации и проверьте выполнение достаточного условия его сходимости для уточнения корней

$$\begin{aligned} -0.6 \le x_1 \le -0.5 \\ -0.7 \le y_1 \le -0.6 \\ -0.9 \le x_2,\ y_2 \le -0.8 \end{aligned}$$

системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - \exp(-x)\sin y = 0 \\ 2y + \exp(-x)\cos y = 0 \end{cases}$$

Сколько итераций потребуется для достижения точности $\varepsilon = 10^{-4}$?

Решение. Построим метод простых итераций. Для этого представим систему в виде $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x})$. Это можно сделать различными способами. Следует выбрать такой способ, при котором $\|J\| < 1$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\exp(-x)\sin y}{2} = F_1(x,y) \\ y = -\dfrac{\exp(-x)\cos y}{2} = F_2(x,y) \end{cases}$$

В преобразованной системе третья норма якобиана

$$\|J\|_3 = \left\| \begin{pmatrix} -\dfrac{\exp(-x)\sin y}{2} & \dfrac{\exp(-x)\cos y}{2} \\ \dfrac{\exp(-x)\cos y}{2} & \dfrac{\exp(-x)\sin y}{2} \end{pmatrix} \right\|_3$$

меньше единицы для первой пары корней (x_1, y_1). Покажем это. Для собственных значений матрицы 2×2 справедливо:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr} J = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 = \det J = -\frac{e^{-2x}}{4}$$

Учитывая, что

$$-0.6 \le x_1 \le -0.5$$
$$-0.7 \le y_1 \le -0.6,$$

для первой пары корней получаем

$$-0.84 \approx -\frac{e^{1.2}}{4} \le \lambda_1\lambda_2 \le -\frac{e}{4} \approx -0.6,$$

откуда $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$, то есть метод сходится, так как выполняется достаточное условие сходимости.
Для второй пары корней достаточное условие не выполняется, так как при $x_1 = -0.9$ $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$. Аналогично можно проверить, что и для других норм достаточное условие сходимости не выполняется для второй пары корней. Поэтому для второй пары нужно представить систему иначе. Например, после несложных преобразований можно получить такую систему:

$$\begin{cases} x = -\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) \\ y = \operatorname{arcctg}\dfrac{-y}{x} \end{cases}$$

Теперь достаточное условие для второй пары корней будет выполняться (для какой нормы?). Опустим выкладки по обоснованию этого утверждения и вернемся к последнему вопросу задачи для первой пары корней.
Чтобы найти число итераций, необходимых для достижения точности ε, достаточно воспользоваться теоремой 1. Для этого нужно выбрать начальное приближение $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})$, провести первый шаг итерации, положить $q = \|J\|_3$ и решить неравенство

$$\frac{q^k}{1-q}\|\overrightarrow{x}^{(1)} - \overrightarrow{x}^{(0)}\|_3 \geq \varepsilon$$

относительно k.
Аналогично следует поступить для второй пары корней, используя соответствующую преобразованную систему и норму, в которой норма якобиана меньше единицы.

Отметим, что если в условии задачи корни не локализованы, следует локализовать их самостоятельно, например, графически.

Пример (Задача № 4*).
Определите порядок сходимости итерационного метода для вычисления корней уравнения $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ по формуле

$$x_{n+1} = \frac{5x_n}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{4x_n} + \frac{1}{72x_n^2} - \frac{1}{72x_n^3}$$

Решение. Очевидно, корни уравнения равны $-1, -1, 0.5$. Порядок сходимости определяется из неравенства

$$|x_{n+1} - x^*| < c|x_n - x^*|^\alpha, \quad 0 < c \le 1$$

Чтобы найти порядок сходимости, то есть α, левую часть в неравенстве представляют в виде

$$x_{n+1} - x^* = g(x_n - x^*) = c_0(x_n - x^*)^\alpha + c_1(x_n - x^*)^{\alpha-1} + \ldots$$

Минимальное k, при котором $g^{(k)}(x_n - x^*)\big|_{x_k = x^*} \neq 0$ и есть искомое α. В нашем случае

$$g(x_n - x^*) = \frac{5x_n}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{4x_n} + \frac{1}{72x_n^2} - \frac{1}{72x_n^3} - x^*$$

Несложно проверить, что для кратного корня -1 первая производная уже не обращается в ноль, а для корня 0.5 только третья производная не равна нулю. Поэтому для вычисления корня -1 порядок сходимости линейный, а для вычисления корня 0.5 — кубический.

3.3 Метод Ньютона.

Рассмотрим нелинейное уравнение $f(x) = 0$. Построим метод Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Теорема: *пусть $f(x)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, причем $f(a)f(b) < 0$, а производные $f'(x)$, $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют знак на отрезке $[a, b]$. Тогда, исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, такого, что $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можно построить метод Ньютона, сходящийся к единственному на $[a, b]$ решению $\overrightarrow{x}^*$ уравнения $f(x) = 0$.*

Обозначим

$$M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|$$

Для оценки погрешности $(k + 1)$-го приближения корня можно воспользоваться неравенством

$$|x_{k+1}| \leq \frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1}|x_k - x^*|^2$$

Обозначив

$$\frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1} = c,$$

получим после преобразований:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{c}\left(c|x^{(0)} - x^*|\right)^{2^{k+1}}$$

Пример.

Используя метод Ньютона, предложите сходящийся алгоритм нахождения корня $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ уравнения

$$f(x) = \mathrm{ctg} x - \frac{1}{x^2} = 0$$

Выберите начальное приближение и проверьте выполнение условий сходимости.

Решение. Графически можно убедиться, что корень на указанном отрезке существует и единственен. Найдем первую производную:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2}{x^3}$$

Используя ограничение на x и ограниченность синуса, можно уточнить локализацию корней: $x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$.
Вычислим вторую производную:

$$f''(x) = 2\frac{\mathrm{ctg} x}{\sin^2 x} - \frac{6}{x^4}$$

Легко показать, что на отрезке $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ вторая производная меняет знак. Поэтому условия сходимости метода Ньютона не будут выполняться. Чтобы метод сошелся, сделаем равносильное преобразование функции такое, чтобы корень уравнения остался прежним, но выполнялись условия сходимости. Например, выберем

$$f(x) = x^2 \cos x - \sin x = 0,$$

тогда

$$f'(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x - \cos x$$
$$f''(x) = (2 - x^2) \cos x - 4x \sin x + \sin x$$

Теперь обе производные сохраняют знак (обе они положительны) на отрезке $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$. Очевидно, что функция и обе производные непрерывны на рассматриваемом отрезке, а также

$$f(\frac{5\pi}{4}) f(\frac{3\pi}{2}) < 0$$

Выберем $x_0 = \frac{3\pi}{2}$. $f(x_0) = 1$, откуда $f(x_0)f''(x_0) > 0$, так как вторая производная положительна на рассматриваемом отрезке.

Все условия сходимости метода Ньютона выполнены, поэтому при указанном начальном приближении метод сходится.