СЕМИНАРЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ ВЕСЕННЕГО СЕМЕСТРА

МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ.

Преподаватель: Семендяев Сергей Вячеславович.

СЕМИНАР №7.

VII

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И СКОБКИ ПУАССОНА.

Указатель литературы.

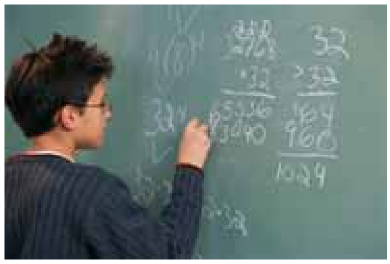
Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §9, с.58-60

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... -

Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. .... -

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. .... §7, 10 с.51-55, 66-70

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... -



Переходим к темам второго задания. Необходимо обязательно ходить на лекции по гамильтоновой механике, т.к. задание чисто теоретическое.

В подходе Гамильтона рассмотрение ведется в **расширенном фазовом пространстве**

q, p, t, где $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ - обобщенный импульс. Эти переменные еще называют гамильтоновыми.

Рассматриваются голономные системы, для которых существует функция Лагранжа L, удовлетворяющая требованию: $\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}\right\| \neq 0$ (Требование обратимости перехода от лагранжевых $t, q, \dot{q}$ переменных к гамильтоновым t, q, p).

Функция Гамильтона (Гамильтониан):

$$\mathrm{H}(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i \,|_{\dot{q}=\Psi(q,p,t)} - L(q,\dot{q},t)\,|_{\dot{q}=\Psi(q,p,t)}$$

где запись $\dot{q}_i = \Psi(q,p,t)$ означает, что $\dot{q}_i$ должны быть выражены через переменные q, p, t, что можно сделать с помощью соотношения $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f(t,q,\dot{q})$.

Канонические уравнения Гамильтона (гамильтонова система):

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} \end{cases}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Эти уравнения удобны для вычислительной техники, а также с точки зрения аналитического решения, т.к. разрешены относительно производных второго порядка. Также им на помощь приходят первые интегралы движения.

Первым интегралом уравнений Гамильтона называется функция $f(q,p,t)$, которая при подстановке в нее любого решения $q(t), p(t)$ системы Гамильтона сохраняет как функция t свое значение: $f(q(t),p(t),t) = f(q_0,p_0,t_0) = const$.

Количество всех функционально независимых первых интегралов: $2n$.

Первые интегралы можно найти без вычислений, например, через циклические координаты.

Координата q_k называется **циклической**, если функция Гамильтона (а значит и Лагранжиан) от нее не зависит явно, т.е. $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k} = 0$ (или $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$).

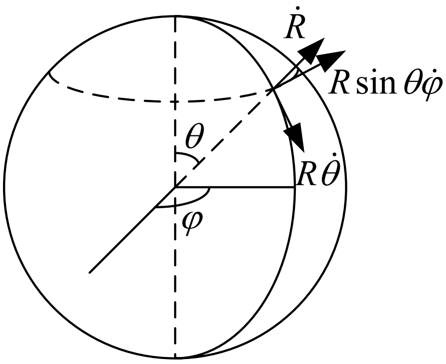
<u>Циклической координате</u> q_k <u>соответствует первый интеграл</u> $\boxed{p_k = C_k} = const$ - <u>импульс</u>.

При введении m циклических координат порядок системы Гамильтона понижается на $2m$ единицы. Чем больше циклических координат, тем больше можем понизить порядок системы.

Пример. Для центрального поля, если координаты декартовы - $\Pi(x, y, z)$. Если сферические - $\Pi(r)$, т.е. в сферических координатах θ и φ - циклические координаты.

H **совпадает с полной энергией, когда система натуральна (тогда $L = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi$) и склерономна (тогда $T = T_2$). Тогда можно записать гамильтониан $\mathrm{H} = \mathrm{T} + \Pi$, выраженный через p и q. Система натуральна, если существует обычный либо обобщенный потенциал. Если система, кроме того, склерономна, то вся кинетическая энергия в T_2. Если она, кроме того, еще и консервативна, то полная энергия сохраняется $\mathrm{H} = h$, $\frac{d\mathrm{H}}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}$. Таким образом ясен физический смысл Гамильтониана: для натуральных склерономных систем он совпадает с полной энергией, а для консервативных более того – сохраняется.**

Задача С.19.24.



□ Система реономна $R = R(t)$.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mgR\cos\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}.$$

$$\mathrm{H}(q,p,t)=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot q_i\,|_{\dot q=\Psi(q,p,t)}-L(q,\dot q,t)\,|_{\dot q=\Psi(q,p,t)}\,.$$

$$\mathrm{H}=\frac{p_\theta^2}{mR^2}+\frac{p_\varphi^2}{mR^2\sin^2\theta}-\frac{m}{2}\left(\frac{p_\theta^2}{m^2R^2}+\frac{p_\varphi^2}{m^2R^2\sin^2\theta}\right)+mgR\cos\theta-\frac{m}{2}\dot R^2$$

$\frac{m}{2}\dot R^2$ можно было не писать, т.к. H определяется с точностью до аддитивной функции от времени, а у нас $R=R(t)$.

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{R^2}+\frac{p_\varphi^2}{R^2\sin^2\theta}\right)+mgR\cos\theta=h\,.$$

$$\dot p_\theta=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial\theta}=\frac{1}{m}\frac{p_\varphi^2\cos\theta}{R^2\sin^3\theta}+mgR\sin\theta\,.$$

$$\dot p_\varphi=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial\varphi}=0\,.$$

$p_\varphi=C_\varphi$ и $\mathrm{H}=h$ - первые интегралы.

$\mathrm{H}(\theta,C_\varphi,p_\theta)=h$ (ушла явная зависимость от t).

Кстати, можно выразить $p_\theta=\sqrt{2mR^2h-2m^2gR^3\cos\theta-\dfrac{C_\varphi^2}{\sin^2\theta}}$.

$\dot\theta=\dfrac{p_\theta}{mR^2}$, $\dot\varphi=\dfrac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}$.■

Есть еще одна возможность приобретения первых интегралов – это **скобки Пуассона**:

$$(\varphi,\psi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right).$$

Свойства:

1. $(\varphi,\psi)=-(\psi,\varphi)$;
2. $\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i,\psi_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\varphi_i,\psi_i),\lambda=const$;
3. $((\varphi,f),\psi)+((f,\psi),\varphi)+((\psi,\varphi),f)=0$ (тождество Пуассона);
4. $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial t}=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right)+\left(\varphi,\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right)$.

Через скобки Пуассона можно сформулировать критерий того, что некоторая функция f - интеграл уравнений Гамильтона.

Для того чтобы f была первым интегралом необходимо и достаточно, чтобы

$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0}$ ($\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0$, и учесть уравнения Гамильтона).

Если для элементов векторного пространства определена бинарная операция $(\bullet,\bullet)$, удовлетворяющая условиям 1-3, то пространство есть алгебра Ли. Другим примером алгебры Ли является трехмерное векторное пространство с операцией векторного умножения.

Понятие скобки Пуассона полезно тем, что дает возможность по двум первым интегралам простыми вычислениями подсчитать еще один первый интеграл.

Теорема Якоби-Пуассона. Скобка Пуассона (φ,ψ) от первых интегралов гамильтоновой системы есть первый интеграл той же системы.

Пример. Пусть $\mathrm{H} = h$ - первый интеграл, а q_1 - циклическая координата, тогда $p_1 = C$ - первый интеграл. Скобка Пуассона от них: $(p_1, H) = 1 \cdot \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1} = 0$. Цепочка остановилась, новый первый интеграл не получить.

Кроме того, нас интересуют независимые первые интегралы.

Есть еще один способ получения первых интегралов, основанный на отделимых координатах.

Координата q_k называется **отделимой**, если от нее и от соответствующего ей импульса функция Гамильтона зависит следующим образом:

$\mathrm{H} = \mathrm{H}\left(t, z, q_1, .., q_{k-1}, q_{k+1}, .., q_n, p_1, .., p_{k-1}, p_{k+1}, .., p_n\right)$, где $z = f\left(q_k, p_k\right)$.

Циклическая координата q_k - частный случай отделимой координаты:

$z = f(q_k, p_k) = p_k$.

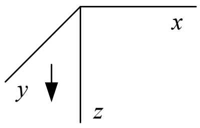
Теорема. **Отделимой координате q_k соответствует первый интеграл** $z = f(q_k, p_k)$.

Пример. Отделение переменных в $\mathrm{H}(f_2(f_1(q_1, p_1), q_2, p_2), p_3, q_4, p_4)$ дает четыре первых интеграла: $f_1(q_1, p_1) = \alpha_1$, $f_2(\alpha_1, q_2, p_2) = \alpha_2$, $p_3 = \alpha_3$, $\mathrm{H}(\alpha_2, \alpha_3, q_4, p_4) = \alpha_4$. Для каждой из шести скобок Пуассона этих функций выполняется $(\bullet,\bullet) = 0$, что позволит удвоить количество первых интегралов. (Об этом в §41 краткого курса аналитической динамики Г.Н. Яковенко).

Через скобки Пуассона уравнения Гамильтона можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = (q_i, \mathrm{H}) \\ \dot{p}_i = (p_i, \mathrm{H}) \end{cases}$$

Пример. В плоскости y, z точка отпущена вниз в поле тяжести с нулевой скоростью.



Допустим, есть первые интегралы:

$x = const$, $K_y = const = p_x z - x p_z$.

$$K_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Скобка Пуассона $(x, K_y) = 1 \cdot z = const$ в соответствии с теоремой Якоби-Пуассона.

Но $z \neq const$ $\Rightarrow$ противоречие. Ошибка здесь в том, что x и K_y не первые интегралы.

Задача С.19.41.

$q_i = f_i(\theta_j, t),\ i, j = \overline{1, n}$.

$\{q_i, \dot{q}_i, t\} \to \{\theta_j, \dot{\theta}_j, t\}$.

$$p_{iq} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}.$$

$$L = L\left(f_i, \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}, t \right).$$

$$p_{j\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_{\substack{q_i = \ldots, \\ \dot{q}_i = \ldots}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} = \sum_i p_{iq} \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}. \Rightarrow \vec{p}_\theta = \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\|^T \vec{p}_q$$

СЕМИНАР №8.

VIII

ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.

Указатель литературы.

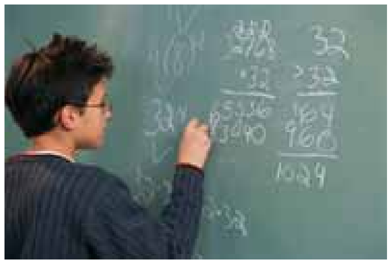
Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §9, с.58-60

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... -

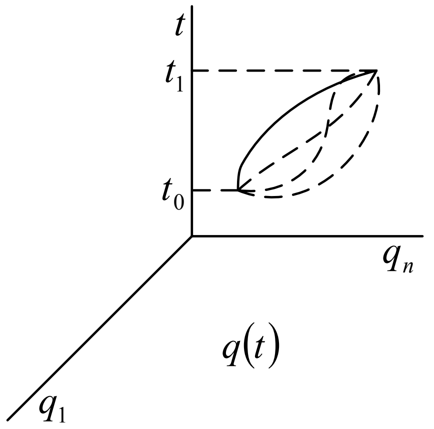
Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. .... -

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. .... §7, 10 с.51-55, 66-70

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... -



Принцип Гамильтона являет собой пример вариационного подхода к исследованию вопроса: возможно ли движение $q(t)$ у конкретной механической системы или такое движение реализоваться не может.



Прямой путь – график возможного движения в расширенном координатном пространстве. **Окольный путь** – невозможного.

Действием по Гамильтону называется функционал

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt,$$

для подсчета которого конкретный путь $q(t)$ подставляется в функцию Лагранжа, полученная функция времени $L(t, q(t), \dot{q}(t))$ интегрируется в заданных пределах t_0, t_1.

<u>Принцип Гамильтона</u>. Путь $q(t)$ является прямым в том и только в том случае, если при любом варьировании $q(t,\alpha)$ удовлетворяющем $q(t_0,\alpha) = q^0, q(t_1,\alpha) = q^1$, для вариации действия по Гамильтону на этом пути выполняется

$\delta W = 0$.

Другими словами принцип Гамильтона утверждает, что при любом варьировании с закрепленными конечными точками на прямом пути выполняется $\left.\frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$**,**

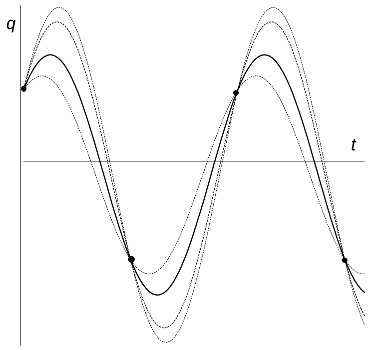
т.е. $\alpha = 0$ **есть стационарная точка функции** $W(\alpha)$**.**

Тип стационарной точки зависит от наличия или отсутствия на исследуемом пути кинетических фокусов.

<u>Пример</u> (осциллятор).

Возможные решения:

$q_1(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t$ и $q_2(t) = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t$



Точки нарушения единственности протекания путей в расширенном координатном пространстве– сопряженные кинетические фокусы.

Исходим из того, что $q_1(0)=q_2(0)$.

$0=B_1-B_2 \Rightarrow B_1=B_2$.

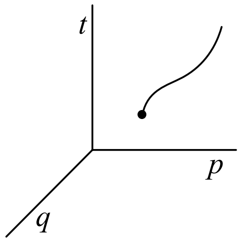
$t':q_1(t')=q_2(t')$,

$0=(A_1-A_2)\sin\omega t' \Rightarrow t'=\frac{k\pi}{\omega}$,

т.е. через каждые полпериода сопряженные кинетические фокусы.

Действие по Гамильтону минимально, когда нет нарушения единственности, т.е. отсутствуют сопряженные кинетические фокусы.

В расширенном координатном пространстве t,q могут быть точки нарушения единственности протекания путей. В то же время расширенное фазовое пространство t,q,p всегда обладает единственностью протекания путей.



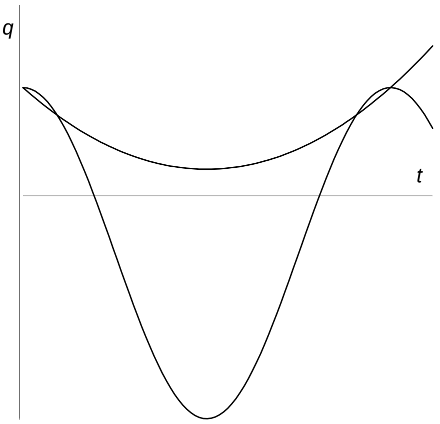
Выбор точки в нем однозначно задает траекторию.

Пример. С21.13.

На рисунке изображены прямой путь (часть косинусоиды) и окольный (часть параболы с положительным α)

$q(0)=q_0, \dot{q}(0)=0$

$q(t)=\frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega t+q_0\cos\omega t=q_0\cos\omega t$



$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{c}{2}q^2$$

$$\dot{q} = -q_0 \omega \sin \omega t .$$

$$W = \int_0^T L dt = \int_0^T \left(\frac{m}{2}\left(q_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \right) - \frac{c}{2} q_0^2 \cos^2 \omega t \right) dt = \left\| \omega^2 = \frac{c}{m} \right\| =$$

$$= \int_0^T \left(\frac{m}{2}\left(q_0^2 \frac{c}{m} \sin^2 \omega t \right) - \frac{c}{2} q_0^2 \cos^2 \omega t \right) dt = 0$$

Окольный путь: $q(t) = \alpha t(t - T) + q_0$.

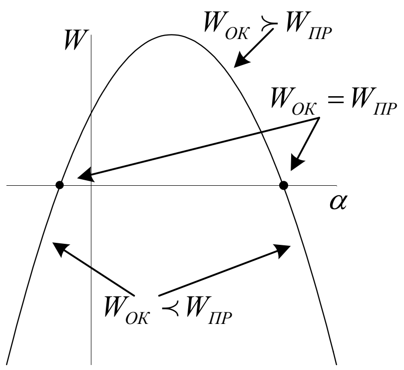
$\dot{q}(t) = 2\alpha t - \alpha T$.

$W_{OK} \vee W_{ПР}$?

$$W = \int_o^T \left(\frac{m}{2}\left(2\alpha t - \alpha T\right)^2 - \frac{c}{2}\left(\alpha t\left(t - T\right) + q_0\right)^2 \right) dt = -\frac{T}{30}\left(\alpha^2 \left(2\pi^2 - 5\right) T^2 - 20\pi^2 q_0 \alpha + \frac{60\pi^2 q_0^2}{T^2} \right)$$

при этом учтено, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

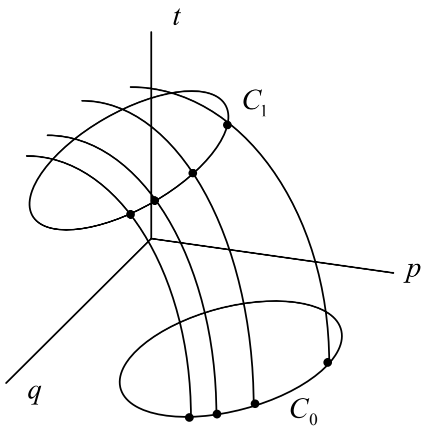
Получаем параболу относительно α .



Парабола имеет две точки пересечения с осью α , потому что ее дискриминант $D = q_0^2 \pi^2 80\left(15 - \pi^2\right) \succ 0$.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.

Для гамильтоновых систем, кроме законов сохранения – первых интегралов – имеют место законы сохранения особого вида: **интегральные инварианты**.



Контур C - полный набор начальных данных для уравнения Гамильтона.

Каждая точка порождает прямой путь.

Получили **трубку прямых путей**.

Интегральное выражение

$$J_{ПК} = \oint\limits_C \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \mathrm{H}\delta t \right)$$

носит название: **основной относительный интегральный инвариант Пуанкаре-Картана**. $J_{ПК}$ принимает одно и то же значение по любым двум <u>согласованным</u> контурам C_0 и C_1, охватывающим трубку прямых путей, порожденных функцией H.

«Относительный» означает, что инвариантность имеет место, когда интегрирование в $J_{ПК}$ проводится по замкнутому контуру. <u>Инвариантность интеграла Пуанкаре-Картана может быть положена в основу механики, так как из этой инвариантности вытекает, что движение системы подчиняется каноническим уравнениям Гамильтона</u>.

Если **контур изохронный**, т.е. $t = const$, то имеет место **универсальный интегральный инвариант Пуанкаре**

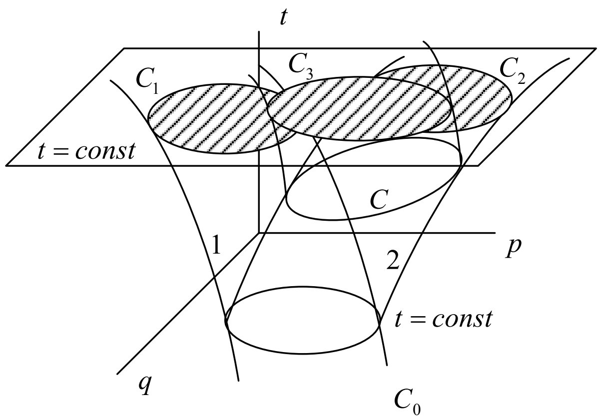
$$J_{П} = \oint\limits_C \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i$$

<u>Универсальный значит инвариантный для любой гамильтоновой системы</u> (поскольку H не входит в выражение).

Инвариантность интеграла Пуанкаре так же может быть положена в основу механики. Это утверждение является одной из обратных теорем теории интегральных инвариантов. **Если для некоторой системы дифференциальных уравнений** $\dot{q}_i = Q_i(t,q,p), \dot{p}_i = P_i(t,q,p), i=\overline{1,n}$ **имеет место инвариантность интеграла Пуанкаре, то эта система гамильтонова, т.е.** $\exists \mathrm{H}(t,q,p): Q_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}$.

Для интегрального инварианта Пуанкаре-Картана имеется аналогичное утверждение, только с несколько другой функцией вместо H.

Пример.



C_0 - изохронный контур.

C_1, C_2, C_3 - изохронные контуры в одной гиперплоскости $t = const$.

C - неизохронный контур.

Трубки прямых путей.

$\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$

Очевидно, $J_{\Pi}^{C_1} = J_{\Pi}^{C_2}$, потому что $J_{\Pi}^{C_1} = J_{\Pi}^{C_0}$ и $J_{\Pi}^{C_2} = J_{\Pi}^{C_0}$.

$$J_{\Pi}^{C_3} = \oint_{C_3} \sum p_i \delta q_i = \oint_{C} \sum \left(p_i \delta q_i - \mathrm{H}_3 \delta t\right),$$

$$J_{\Pi}^{C_2} = \oint_{C_2} \sum p_i \delta q_i = \oint_{C} \sum \left(p_i \delta q_i - \mathrm{H}_2 \delta t\right).$$

Поэтому $J_{\Pi}^{C_3} - J_{\Pi}^{C_2} = \oint_{C} (\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_3) \delta t$. ■

Рассмотрим все множество универсальных интегральных инвариантов первого порядка. «Первого порядка» значит, что в выражение под знаком интеграла дифференциалы входят линейно.

$$J' = \oint_C \sum_{i=1}^{n} \left(A_i(t,q,p)\delta q_i + B_i(t,q,p)\delta p_i \right).$$

<u>Теорема Ли Хуачжуна</u>. Если

$$J' = \oint_C \sum_{i=1}^{n} \left(A_i(t,q,p)\delta q_i + B_i(t,q,p)\delta p_i \right)$$

- универсальный интегральный инвариант, то $J' = cJ_П$, т.е.

$$\oint_C \sum_{i=1}^{n} \left(A_i(t,q,p)\delta q_i + B_i(t,q,p)\delta p_i \right) = c\oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i$$

где c - постоянная, $J_П$ - интегральный инвариант Пуанкаре.

Иными словами, интеграл $J' = \oint_C \sum_{i=1}^{n} \left(A_i(t,q,p)\delta q_i + B_i(t,q,p)\delta p_i \right)$ является универсальным интегральным инвариантом тогда и только тогда, когда при некотором числе c выполняются условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_i}{\partial q_k} = \dfrac{\partial A_k}{\partial q_i}, \\ \dfrac{\partial B_i}{\partial p_k} = \dfrac{\partial B_k}{\partial p_i}, \\ \dfrac{\partial A_i}{\partial p_k} = \dfrac{\partial B_k}{\partial q_i} + c\delta_{ik} \end{cases}$$

<u>Пример. С22.4.</u>

$$J = \oint \sum_{i=1}^{n} \left[2q_i \cos^2\left(\frac{q_i p_i}{2}\right)\delta p_i + p_i \cos(q_i p_i)\delta q_i \right].$$

$$2q_i \cos^2\left(\frac{q_i p_i}{2}\right) = q_i\left(1 + \cos(q_i p_i)\right).$$

Тогда

$$J = \oint \sum_{i=1}^{n} \left[q_i \delta p_i + \cos(q_i p_i)(p_i \delta q_i + q_i \delta p_i) \right] = \oint \sum_{i=1}^{n} \left[q_i \delta p_i + \delta(\sin(q_i p_i)) \right]$$

Т.к. $q_i \delta p_i = \delta(p_i q_i) - p_i \delta q_i$, и $\oint \sum_{i=1}^{n} \delta(q_i p_i) = 0$, $\oint \sum_{i=1}^{n} \delta(\sin(q_i p_i)) = 0$ (интегралы по замкнутому контуру от полных дифференциалов равны нулю), то

$J = -\oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i$. Удовлетворяет условию т. Ли Хуачжуна, $c = -1$. ■

Кроме универсальных интегральных инвариантов первого порядка существуют и другие универсальные интегральные инварианты. Например, при помощи формулы Стокса находится инвариант второго порядка $J_П = J_1 = \oint\limits_C \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = \iint\limits_S \sum\limits_{i=1}^{n} \delta p_i \delta q_i = J_2$.

Поверхность S не замкнута, поэтому интегральный инвариант называется абсолютным.

Аналогично имеются универсальные интегральные инварианты более высоких порядков.

Фазовый объем – абсолютный интегральный инвариант порядка $2n$ (его еще называют «полным» или «старшим») $J_{2n} = \int\limits_{V(t)} \ldots \int \delta q_1 \delta p_1 \ldots \delta q_n \delta p_n$.

Теорема Лиувилля. Пусть правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x}_i = \varphi_i(t,x), i = \overline{1,n}$, удовлетворяют условию $div\varphi(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(t,x)}{\partial x_i} = 0$.

Тогда на решениях системы сохраняется величина фазового объема. Величина фазового объема не меняется при перемещении точек объема по траекториям гамильтоновой системы.

Статистический ансамбль – множество систем, у которых совпадают уравнения Гамильтона, но различаются начальные данные q_0, p_0. **Плотность статистического ансамбля** - $\rho(q,p) = \frac{\mu}{\upsilon}$, где υ - величина малого объема V, а μ - количество находящихся в V экземпляров ансамбля. **Плотность $\rho(q,p)$ статистического ансамбля является первым интегралом гамильтоновой системы.**

Для консервативной системы любая функция от энергии системы может служить плотностью статистического ансамбля.

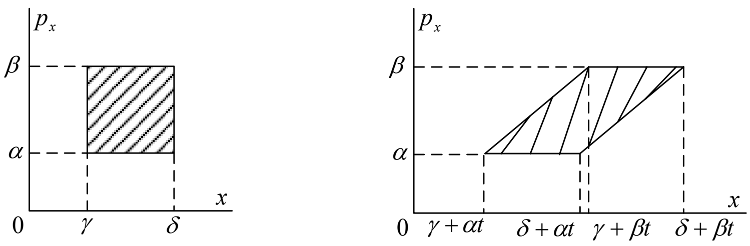
Пример С22.22.

$H = \frac{p^2}{2} \Rightarrow$ Уравнения Гамильтона

$\dot{q} = p, \dot{p} = 0$

$\Rightarrow p = p_0, q = q_0 + p_0 t$.

Очевидно, фазовый объем сохраняется.



СЕМИНАР №9.

IX

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Указатель литературы.

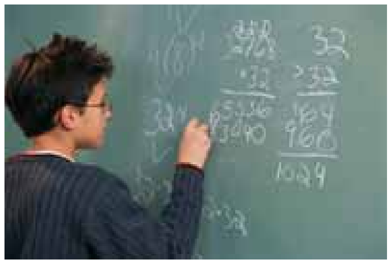
Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §9, с.58-60

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... -

Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. .... -

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. .... §7, 10 с.51-55, 66-70

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... -



Уравнения Лагранжа переходом к новым обобщенным координатам всегда можно привести опять к лагранжевым уравнениям. В этом заключается ковариантность уравнений Лагранжа. По-другому обстоит дело с уравнениями Гамильтона. Гамильтонова система переводится в гамильтонову систему только каноническим преобразованием. Т.е. ковариантность уравнений Гамильтона имеет место только относительно канонических преобразований.

Зачем нужно переходить к новым переменным? Гамильтониан в новых переменных может иметь более простую структуру.

Определение. Рассмотрим неособенное преобразование переменных

$$\begin{array}{l}\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t,q,p),\\ \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t,q,p),\\ i=\overline{1,n},\\ \det M \neq 0,\end{array}, \quad M = \begin{Vmatrix} \left\|\dfrac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k}\right\| & \left\|\dfrac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k}\right\| \\ \left\|\dfrac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_k}\right\| & \left\|\dfrac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k}\right\| \end{Vmatrix},$$

где M - <u>матрица Якоби преобразования</u>.

Такое **преобразование** называется **каноническим**, если замена переменных в любой гамильтоновой системе приводит опять к гамильтоновой системе.

<u>Критерий каноничности</u>. Преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t,q,p), \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t,q,p), i=\overline{1,n}$ **является каноническим тогда и только тогда, когда существует число** $c \neq 0$ **(<u>валентность</u>) и функция** F **(<u>производящая функция</u>), такие что**

$$\sum \tilde{p}_i \delta\tilde{q}_i - c\sum p_i \delta q_i = -\delta F(t,q,p) = -\sum \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i - \sum \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i \,\textbf{.}$$

{Это требование следует из т.Ли Хуачжуна с использованием инт.инв.Пуанкаре}

<u>Пример. С23.7</u>

$$\tilde{q} = -qctgp, \tilde{p} = 2\ln\cos p$$

$$\tilde{p}\delta\tilde{q} - Cp\delta q = -\frac{\partial F}{\partial q}\delta q - \frac{\partial F}{\partial p}\delta p$$

$$2\ln\cos p\left(-ctgp\delta q + \frac{q}{\sin^2 p}\delta p\right) - Cp\delta q = -\frac{\partial F}{\partial q}\delta q - \frac{\partial F}{\partial p}\delta p$$

Сравнивая левые и правые части при соответствующих вариациях, находим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial q} = 2ctgp\ln\cos p + Cp, \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = -2\dfrac{q}{\sin^2 p}\ln\cos p \end{cases}$$

Для того чтобы установить каноничность не обязательно находить производящую функцию, достаточно установить ее существование, т.е. в нашей системе выполнение условия:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q\partial p} = \frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}.$$

$$-2\frac{\sin p}{\cos p}ctgp - 2\ln\cos p\frac{1}{\sin^2 p} + C = -2\ln\cos p\frac{1}{\sin^2 p} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \exists C \neq 0.$$

Неравенство нулю C существенно, т.к. $\sum \tilde{p}\delta\tilde{q}$ в общем случае полным дифференциалом быть не может.

Если $c=1$, то преобразование называют **унивалентным**.

Найдем F интегрированием частной производной $\frac{\partial F}{\partial q}$:

$$F=\left(2ctgp\ln\cos p+2p\right)q+\varphi\left(p\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=\left(-2\frac{\sin p}{\cos p}ctgp-2\ln\cos p\frac{1}{\sin^2 p}+2\right)q+\varphi'\left(p\right)=$$

$$=-2\ln\cos p\frac{q}{\sin^2 p}\Rightarrow\varphi'\left(p\right)=0$$

F определяется с точностью до аддитивной функции от времени $\Rightarrow \varphi=const$ можно отбросить. ■

<u>Следствие</u> критерия каноничности. Пусть каноническому преобразованию соответствуют $c\neq 0$ и F. Обратное к нему преобразование также каноническое с валентностью $\tilde{c}=\frac{1}{c}$ и $\tilde{F}=-\frac{F}{c}$.

Свободные канонические преобразования.

Если мы дополнительно потребуем: $\det\left\|\frac{\partial\tilde{q}_i\left(t,q,p\right)}{\partial p_k}\right\|\neq 0$, мы можем взять вместо переменных q,p переменные $q,\tilde{q}$. Переменные $q,\tilde{q}$ более удобны по сравнению с q,p, т.к. содержат вариации $\delta q,\delta\tilde{q}$ в вариации производящей функции δF. Набор переменных $t,q,\tilde{q}$ будем называть свободным.

Неособенное **преобразование** $q,\tilde{q}$ называется **свободным**, если для него выполнено условие $\det\left\|\frac{\partial\tilde{q}_i\left(t,q,p\right)}{\partial p_k}\right\|\neq 0$.

<u>Критерий каноничности для свободного преобразования</u>:

$$\sum\tilde{p}_i\delta\tilde{q}_i-c\sum p_i\delta q_i=-\delta F=-\sum\frac{\partial S}{\partial q_i}\delta q_i-\sum\frac{\partial S}{\partial\tilde{q}_i}\delta\tilde{q}_i$$

$$S\left(t,q,\tilde{q}\right)=F\left(t,q,p\left(t,q,\tilde{q}\right)\right)$$

Получим $2n$ соотношений, которые называют **структурными формулами свободного канонического преобразования**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q_i} = cp_i(t, q, \tilde{q}) \\ \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i(t, q, \tilde{q}) \end{cases}$$

<u>Возможность выбора новых переменных не единственна</u>. Можно взять наборы $q\tilde{p}, p\tilde{q}, p\tilde{p}$, и все это <u>допустимо при соответствующих требованиях</u>.

Например, набор $q, \tilde{p}$ возможен при следующем условии для преобразования: $\det\left\|\dfrac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k}\right\| \neq 0$. Этот набор менее ущербный по сравнению с $q, \tilde{q}$, потому что в отличие от $q, \tilde{q}$, является группой преобразований (см. книгу Яковенко).

Преобразование называется **полусвободным**, если для него выполнено условие $\det\left\|\dfrac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k}\right\| \neq 0$.

Полусвободными их назвали потому, что <u>критерий каноничности пришлось заменить эквивалентной формулой</u>:

{Добавим и вычтем $\tilde{q}_i \delta \tilde{p}_i$:

$$\sum\left(\tilde{p}_i \delta\tilde{q}_i + \tilde{q}_i \delta\tilde{p}_i - \tilde{q}_i \delta\tilde{p}_i\right) - c\sum p_i \delta q_i = -\delta F \Rightarrow \sum\left(-\tilde{q}_i \delta \tilde{p}_i\right) - c\sum p_i \delta q_i = -\delta F - \sum \delta\left(\tilde{p}_i \tilde{q}_i\right)\}$$

$$-\sum \tilde{q}_i \delta\tilde{p}_i - c\sum p_i \delta q_i = -\delta\Phi(t, q, \tilde{p}) = -\sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\delta q_i - \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{p}_i}\delta\tilde{p}_i,$$

где $\Phi = F + \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \tilde{q}_i$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых вариациях, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i} = cp_i(t, q, \tilde{p}) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \tilde{p}_i} = \tilde{q}_i(t, q, \tilde{p}) \end{cases}$$

<u>интегрируемость которой (т.е. выполнение условия $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial \tilde{p}_i} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{p}_i \partial q_i}$)</u> <u>при некотором числе</u> $c \neq 0$ <u>гарантирует каноничность преобразования</u>.

Что происходит с функцией Гамильтона при канонических преобразованиях?

При свободном преобразовании $q, p \to q, \tilde{q}$:

$$\widetilde{\mathrm{H}}\left(t,\widetilde{q},\widetilde{p}\left(t,q,\widetilde{q}\right)\right)=\frac{\partial S}{\partial t}+c\mathrm{H}\left(t,q,p\left(t,q,\widetilde{q}\right)\right).$$

При полусвободном преобразовании $q,p\to q,\widetilde{p}$:

$$\widetilde{\mathrm{H}}\left(t,\widetilde{q}\left(t,q,\widetilde{p}\right),\widetilde{p}\right)=\frac{\partial\Phi\left(t,q,\widetilde{p}\right)}{\partial t}+c\mathrm{H}\left(t,q,p\left(t,q,\widetilde{p}\right)\right),\text{ где }\Phi=F+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{p}_i\widetilde{q}_i\ .$$

<u>Замечание. Условие каноничности преобразования также можно сформулировать в виде системы равенств через скобки Лагранжа</u> (см. Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. с. 327):

$$\left[q_i,q_k\right]=\sum_j\left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_k}-\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\right)=0\,,$$

$$\left[p_i,p_k\right]=\sum_j\left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_k}-\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_i}\right)=0\,,$$

$$\left[q_i,p_k\right]=\sum_j\left(\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial p_k}-\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{p}_j}{\partial q_i}\right)=\delta_{ik}c$$

<u>и скобки Пуассона (</u>Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001, с. 163<u>):</u>

$$\left(\tilde{q}_i,\tilde{q}_k\right)=0,$$
$$\left(\tilde{p}_i,\tilde{p}_k\right)=0,$$
$$\left(\tilde{q}_i,\tilde{p}_k\right)=c\delta_{ik}$$

где $\delta_{ik}=\begin{cases}1,i=k\\0,i\neq k\end{cases}$ - символ Кронекера.

<u>Пример. C23.98.</u>

$$\tilde{q}_1=\ln\frac{p_1+4q_2}{4}-2q_1,$$
$$\tilde{p}_1=-\frac{1}{2}\left(p_1+4q_2\right),$$
$$\tilde{q}_2=\frac{1}{2}\ln\frac{p_2+4q_1}{3}-\frac{1}{2}q_2,$$
$$\tilde{p}_2=-2\left(p_2+4q_1\right)$$

Определитель $\det\left\|\frac{\partial\widetilde{q}_i\left(t,q,p\right)}{\partial p_k}\right\|\neq 0\Rightarrow$ преобразование свободное.

$$p_1 = 4\exp\left(\tilde{q}_1 + 2q_1\right) - 4q_2,$$
$$p_2 = 3\exp\left(2\tilde{q}_2 + q_2\right) - 4q_1,$$
$$\tilde{p}_1 = -\frac{1}{2}4\exp\left(\tilde{q}_1 + 2q_1\right),$$
$$\tilde{p}_2 = -2\cdot 3\exp\left(2\tilde{q}_2 + q_2\right)$$

$p_1, p_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ мы выражали через $q, \tilde{q}$ чтобы записать структурные формулы свободного канонического преобразования:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q_i} = cp_i\left(t, q, \tilde{q}\right) \\ \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i\left(t, q, \tilde{q}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = 4c\exp\left(\tilde{q}_1 + 2\tilde{q}_1\right) - 4q_2c,$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = 3c\exp\left(2\tilde{q}_2 + q_2\right) - 4q_1c,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_1} = 2\exp\left(\tilde{q}_1 + 2q_1\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_2} = 6\exp\left(2\tilde{q}_2 + q_2\right)$$

Ищем c, записав условие интегрируемости

$\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial \tilde{q}_1} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial \tilde{q}_1 \partial q_1} \to 4c\exp\left(\tilde{q}_1 + 2q_1\right) = 4\exp\left(\tilde{q}_1 + 2q_1\right) \Rightarrow$ c=1, преобразование унивалентное.

Интегрируем частные производные от S:

1. $S = 2\exp\left(\tilde{q}_1 + 2q_1\right) - 4q_2q_1 + \varphi_1\left(q_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2\right)$

2. $S = 3\exp\left(2\tilde{q}_2 + q_2\right) - 4q_1q_2 + \varphi_2\left(q_1, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2\right)$

3. $S = 2\exp\left(\tilde{q}_1 + 2q_1\right) + \varphi_3\left(q_1, q_2, \tilde{q}_2\right)$

4. $S = 3\exp\left(2\tilde{q}_2 + q_2\right) + \varphi_4\left(q_1, q_2, \tilde{q}_1\right)$

$S = 3\exp\left(2\tilde{q}_2 + q_2\right) + 2\exp\left(\tilde{q}_1 + 2q_1\right) - 4q_1q_2$ ■

В задании есть задача на **<u>теорему Эмми Нётер</u>.**

Рассматривается невырожденное однопараметрическое семейство преобразований обобщенных координат и времени:

$$\begin{aligned}\tilde q_i &= \tilde q_i(q,t,\alpha),\\ \tilde t &= \tilde t(q,t,\alpha)\end{aligned}$$ **, причем при** $\alpha = 0 : \tilde q_i = q_i, \tilde t = t$ **.**

Теорема Э. Нётер выделяет такое преобразование, когда элементарное действие Ldt **инвариантно относительно преобразования и не зависит от** α **, т.е.:**

$L\left(\tilde t, \tilde q, \frac{d\tilde q}{d\tilde t}\right) d\tilde t = L(t,q,\dot q)\, dt$ **(будем писать сокращенно** $\tilde L d\tilde t = Ldt$ **).**

Если это соотношение имеет место, тогда у системы есть первый интеграл

$$\Phi(t,q,p) = \sum p_i \left(\frac{\partial \tilde q_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - \mathrm{H}\left(\frac{\partial \tilde t}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} .$$

<u>Пример. С20.35.</u>

Нужно, чтобы однопараметрическое семейство преобразований было группой вариационных симметрий, т.е. при любом фиксированном α должно выполняться

$$L\left(\tilde t, \tilde q, \frac{d\tilde q}{d\tilde t}\right) d\tilde t = L(t,q,\dot q)\, dt .$$

По условию, $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j - \Pi(q)$.

$a_{ij}(q)$-однородные функции порядка k, $\Pi(q)$-однородная функция порядка l.

$\tilde q_i = q_i \exp(\alpha a), \tilde t = t\exp(\alpha b)$. Запишем: $\tilde L d\tilde t = Ldt$:

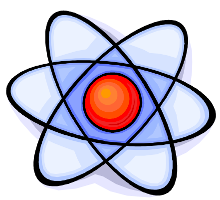
$$\left(\frac{1}{2}\sum a_{ij}(q)\exp(k\alpha a)\exp\big(2\alpha(a-b)\big)\dot q_i \dot q_j - \Pi(q)\exp(l\alpha a)\right)\exp(\alpha b)\,dt = \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j - \Pi(q)\right)dt$$

$$\Rightarrow ka + 2a - b = 0, la + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -la \\ k + l = -2 \end{cases}$$

Ищем первый интеграл: $\Phi(t,q,p) = \sum p_i \left(\frac{\partial \tilde q_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - \mathrm{H}\left(\frac{\partial \tilde t}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$

С учетом соотношений $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$ и $\mathrm{H}(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot q_i \,|_{\dot q = \Psi(q,p,t)} - L(q,\dot q,t)\,|_{\dot q = \Psi(q,p,t)}$ получаем:

$$\Phi(t,q,\dot q) = \sum a_{ij}(q)\dot q_j a q_i - \left(\frac{1}{2}\sum a_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j + \Pi(q)\right)bt$$



СЕМИНАР №10.

X

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ.

Указатель литературы.

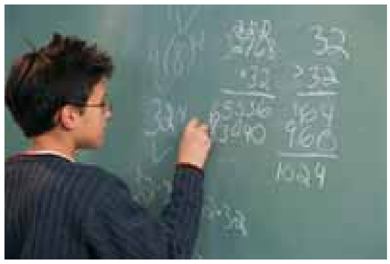
Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001. .... §9, с.58-60

Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980. .... -

Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. .... -

Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. .... §7, 10 с.51-55, 66-70

Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001. . ... -



Если мы поставим задачей поиск циклических координат, то для этого нужно сделать каноническое преобразование. Нужно, <u>чтобы новый гамильтониан не содержал новых координат и импульсов и был равен нулю</u>.

$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, q, p)$

$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, q, p)$

$\tilde{\mathrm{H}} \equiv 0$

$\tilde{q}_i = \alpha_i, \tilde{p}_i = \beta_i$

где α_i, β_i - константы.

Уравнение Гамильтона-Якоби традиционно выводится с привлечением свободных канонических преобразований валентности $c = 1$. Переход к переменным $q, \tilde{q}$ возможен при выполнении условия:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S(t,q,\tilde{q})}{\partial q_i \partial \tilde{q}_k}\right\| = \det\left\|\frac{\partial^2 S(t,q,\alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right\| \neq 0$$

Новый гамильтониан связан со старым следующим соотношением:

$$\tilde{\mathrm{H}}(t,\tilde{q},\tilde{p}) = \frac{\partial S}{\partial t} + c\mathrm{H}(t,q,p)$$

Т.к. $\tilde{\mathrm{H}} \equiv 0$, c=1 и $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ (это следует из структурных формул свободного канонического преобразования), то

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{H}\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)$$

Получили уравнение в частных производных для производящей функции $S(t,q,\tilde{q}) = S(t,q,\alpha)$.

Уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{H}\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

- **уравнение Гамильтона-Якоби** для системы с функцией Гамильтона $\mathrm{H}(t,q,p)$.

Спектр решений уравнения Гамильтона-Якоби простирается от частных решений до общего решения, зависящего от произвольных функций. Нас интересуют полные интегралы.

Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется решение $S(t,q_1,...,q_n,\alpha_1,...,\alpha_n)$, зависящее от произвольных постоянных $\alpha_1,...,\alpha_n$ и удовлетворяющее условию

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S(t,q,\alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right\| \neq 0 .$$

Название «полный» оправдано тем, что не происходит потери информации при переходе: функция Гамильтона$\rightarrow$уравнение Гамильтона-Якоби$\rightarrow$полный интеграл.

Полными интегралами уравнения Гамильтона-Якоби являются **главная функция Гамильтона** с $q^0 \equiv \alpha$ (см. также Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001, с. 138):

$$W\left(t,q^0,p^0\right)=\int\limits_{t_0}^{t} L\left(s,q\left(s,q^0,p^0\right),\dot{q}\left(s,q^0,p^0\right)\right)ds$$

где переменная p^0 понимается как функция $p^0=p^0\left(t,q,q^0\right)$ и **полуглавная функция Гамильтона** с $p^0 \equiv \alpha$:

$$V\left(t,q,p^0\right)=W\left(t,q^0\left(t,q,p^0\right),p^0\right)+\sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0\left(t,q,p^0\right).$$

Но уравнение Гамильтона-Якоби характерно тем, что один <u>полный интеграл часто удается найти без громоздких вычислений</u>. А также без применения общей теории интегрирования уравнений в частных производных.

Прием – **отделение (разделение) переменных**.

Если переменные разделяются в гамильтониане, то полный интеграл можно представить в виде аддитивной комбинации:

$$S(t,q,\alpha)=S_0(t)+\sum_{i=1}^{n} S_i(q_i,\alpha).$$

В этом случае $p_i=\dfrac{\partial S}{\partial q_i}=\dfrac{dS_i}{dq_i}=p_i\left(q_i,\alpha\right)$. Интегрирование дает S_i. Остается найти $S_0(t)$.

Начинается сужение класса функций. Рассмотрим обобщенно консервативные системы, $\mathrm{H}(q,p)=h$ при дополнительном условии $\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}\neq 0$, которое дает возможность разрешить равенство $\mathrm{H}(q,p)=h$ относительно $p=f(q,h)$. Тогда,

$$\frac{dS_0}{dt}+h=0 \to S_0=-ht.$$

Поэтому, $S(t,q,\alpha)=-ht+\sum\limits_{i=1}^{n}\int p_i\left(q_i,\alpha\right)dq_i$.

<u>Пример</u>. $\mathrm{H}\left(f_1\left(q_1,p_1\right),f_2\left(q_2,p_2\right),\ldots,f_n\left(q_n,p_n\right)\right)$. В этом случае $f_i(q_i,p_i)=\alpha_i \to p_i=\varphi_i(q_i,\alpha_i)$.

Исходя из полного интеграла, можно выделить конкретные траектории. В каждой конкретной точке траектории есть зависимость между координатами и импульсами. Но, в общем, нужно помнить, что p_i и q_i независимые переменные.

Пример. Анизотропный осциллятор.

$$\mathrm{H} = \sum\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{c_i q_i^2}{2}\right) = h$$

$$\frac{p_i^2}{m} + c_i q_i^2 = \alpha_i$$

- первые интегралы.

$$p_i = \sqrt{m\alpha_i - mc_i q_i^2},$$

$$\frac{1}{2}\sum \alpha_i = h.$$

$$S = -\frac{1}{2}\sum \alpha_i t + \sum \int \sqrt{m\alpha_i - mc_i q_i^2}\, dq_i$$ - полный интеграл.

Уравнения движения в полном виде $q_i = q_i(t, \alpha, \beta), p_i = p_i(t, \alpha, \beta)$ **можно получить с помощью соотношений:**

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\frac{1}{2}t + \int \frac{m dq_i}{2\sqrt{m\alpha_i - mc_i q_i^2}} = -\beta_i,$$

$$p_i = \sqrt{m\alpha_i - mc_i q_i^2}$$

Пример. $\mathrm{H} = f_n\left(\ldots f_2\left(f_1\left(q_1, p_1\right), q_2, p_2\right)\ldots q_n, p_n\right) = h$

С помощью скобок Пуассона показывается, что все указанные функции являются первыми интегралами: $f_1(q_1, p_1) = \alpha_1$, $f_2(\alpha_1, q_2, p_2) = \alpha_2$, …, $f_n = h = \alpha_n$.

Пример. Движение Кеплера (поле Всемирного тяготения). В переменных Гамильтона:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) - \frac{\gamma}{r}.$$

φ - циклическая координата. $p_\varphi = \alpha_\varphi = \frac{dS_\varphi}{d\varphi}$ - первый интеграл.

$$p_\theta^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\theta$$ - первый интеграл.

$$\Rightarrow p_\theta = \sqrt{\alpha_\theta - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,.$$

$\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\alpha_\theta}{r^2}\right) - \frac{\gamma}{r} = \alpha_r$ - первый интеграл.

$$\Rightarrow p_r = \sqrt{2m\alpha_r + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}\,.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{H}\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

где в гамильтониан нужно поставить $p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}$.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \frac{\gamma}{r} = 0$$

- уравнение Гамильтона-Якоби.

Полный интеграл:

$$S = -\alpha_r t + \int\sqrt{\alpha_\theta - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}d\theta + \int\sqrt{2m\alpha_r + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}dr + \alpha_\varphi\varphi\,.$$

Полный интеграл, также как и H определяется с точностью до аддитивной функции по времени.

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi - \int\frac{\frac{2}{\sin^2\theta}\alpha_\varphi d\theta}{2\sqrt{\alpha_\theta - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}} = -\beta_\varphi\,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta} = \int\frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_\theta - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}} - \int\frac{\frac{1}{r^2}dr}{2\sqrt{2m\alpha_r + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}} = -\beta_\theta\,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = -t + \int\frac{2mdr}{2\sqrt{2m\alpha_r + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{\alpha_\theta}{r^2}}} = -\beta_r\,.$$

Если бы мы взяли декартовы координаты, то переменные не разделились бы, поскольку потенциальная энергия в них записывается в виде $\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Пример.

$$\mathrm{H}=\frac{\sum f_i(q_i,p_i)}{\sum \varphi_i(q_i,p_i)}=h$$

Используя скобки Пуассона можно показать, что:

$$f_i(q_i,p_i)-h\varphi_i(q_i,p_i)=\alpha_i$$

- первые интегралы.

Константу h выбросить не можем, но можем записать:

$$\sum \alpha_i=0.$$

Замечание. Как правило, структуры с разделенными переменными бывают сочетаниями. Иногда требуется смекалистость.

Пример. С24.44.

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2+p_2^2}{q_1-q_2}+\left(p_3^2+\frac{1}{q_3^2}\right)(q_1+q_2)\right)=h$$

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\mathrm{H}\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2}{q_1-q_2}+\left(\left(\frac{\partial S}{\partial q_3}\right)^2+\frac{1}{q_3^2}\right)(q_1+q_2)\right)=0.$$

Разделяем переменные.

$$p_3^2+\frac{1}{q_3^2}=\alpha_3$$

- первый интеграл.

$$p_1^2+p_2^2+\alpha_3\left(q_1^2-q_2^2\right)=2h(q_1-q_2),$$

$$p_1^2+\alpha_3q_1^2-2hq_1=-p_2^2+\alpha_3q_2^2-2hq_2\rightarrow$$

$$\alpha_1=p_1^2+\alpha_3q_1^2-2hq_1$$

- первый интеграл.

$-\alpha_2 = -p_2^2 + \alpha_3 q_2^2 - 2hq_2$,

$\alpha_1 = -\alpha_2$.

Поскольку α_1 и α_2 почти не отличаются (с точностью до знака), то вместо α_2 будем рассматривать h, т.е. будет пользоваться константами α_1, α_3, h.

$p_1 = \sqrt{\alpha_1 - \alpha_3 q_1^2 + 2hq_1}$,

$p_2 = \sqrt{-\alpha_1 + \alpha_3 q_2^2 - 2hq_2}$,

$p_3 = \sqrt{\alpha_3 - \frac{1}{q_3^2}}$.

$$S = -ht + \int \sqrt{\alpha_1 - \alpha_3 q_1^2 + 2hq_1}\,dq_1 + \int \sqrt{-\alpha_1 + \alpha_3 q_2^2 - 2hq_2}\,dq_2 + \int \sqrt{\alpha_3 - \frac{1}{q_3^2}}\,dq_3$$

Сколько всего полных интегралов? Сколько угодно. $p_i = \pm\sqrt{\ldots}$. На самом деле, $\pm$ стоят. И α вводить можно различными способами $f(q_i, p_i) = \alpha_i, \alpha_i^2, tg\alpha_i$. Полный интеграл определен с точностью до обозначения констант.

От различия способов выбора знаков и α будут меняться уравнения движения в конечном виде. Но структура их остается той же самой.

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3 q_1^2 + 2hq_1}} + \int \frac{-dq_2}{2\sqrt{-\alpha_1 + \alpha_3 q_2^2 - 2hq_2}} = -\beta_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \int \frac{-q_1^2 dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3 q_1^2 + 2hq_1}} + \int \frac{q_2^2 dq_2}{2\sqrt{-\alpha_1 + \alpha_3 q_2^2 - 2hq_2}} + \int \frac{dq_3}{2\sqrt{\alpha_3 - \frac{1}{q_3^2}}} = -\beta_3$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = -t + \int \frac{2q_1 dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3 q_1^2 + 2hq_1}} + \int \frac{-2q_2 dq_2}{2\sqrt{-\alpha_1 + \alpha_3 q_2^2 - 2hq_2}} = -\beta_h$$

Следующие соотношения, на самом деле, не надо вычислять, поскольку ранее мы нашли выражения для $p_i(\alpha, h, q)$.

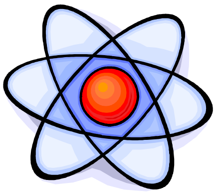
$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = \int \frac{1}{2} \frac{2h - 2\alpha_3 q_1}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3 q_1^2 + 2hq_1}}\,dq_1 = p_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = \int \frac{1}{2} \frac{2\alpha_3 q_2 - 2h}{\sqrt{-\alpha_1 + \alpha_3 q_2^2 - 2hq_2}}\,dq_2 = p_2$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_3} = \int \frac{1}{2} \frac{2\frac{1}{q_3^3}}{\sqrt{\alpha_3 - \frac{1}{q_3^2}}} dq_3 = p_3$$

Домашнее задание. Учитесь решать следующие типы задач:

1. Дано: L. Получить H. Записать уравнения Гамильтона, уравнение Гамильтона-Якоби. Найти полный интеграл разделением переменных. И выписать уравнения движения в полном виде.
2. Дано преобразование. Установить каноничность. Найти валентность и производящую функцию.



САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА.

Учение не только свет,... - оно также свобода. (И.С. Тургенев)

ТУРГЕНЕВ Иван Сергеевич (1818-1883), русский писатель, член-корреспондент Петербургской АН (1860). В цикле рассказов "Записки охотника" (1847-1852) показал высокие духовные качества и одаренность русского крестьянина, поэзию природы. В социально-психологических романах "Рудин" (1856), "Дворянское гнездо" (1859), "Накануне" (1860), "Отцы и дети" (1862), повестях "Ася" (1858), "Вешние воды" (1872) созданы образы уходящей дворянской культуры и новых героев эпохи - разночинцев и демократов, образы самоотверженных русских женщин. В романах "Дым" (1867) и "Новь" (1877) изобразил жизнь русских за границей, народническое движение в России. На склоне жизни создал лирико-философские "Стихотворения в прозе" (1882). Мастер языка и психологического анализа, Тургенев оказал существенное влияние на развитие русской и мировой литератур.

ВОПРОСЫ

Дорогие студенты и студентки!

С помощью нижеследующего списка ключевых понятий, определений и теорем по различным темам, предлагается проверить свои знания. Что вы могли бы рассказать по какому-либо вопросу, будучи на экзамене?
Самый лучший вариант: выучить и знать наизусть формулировки и формулы, ориентироваться в методах решения задач на данную тему.
Вопросы составлены на основе семинаров по теоретической механике МФТИ преподавателя Семендяева Сергея Вячеславовича.

Семинар №7.
УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И СКОБКИ ПУАССОНА.
Расширенное фазовое пространство. Функция Гамильтона (Гамильтониан).
Канонические уравнения Гамильтона (гамильтонова система).
Первые интегралы. Количество функционально независимых первых интегралов. Поиск первых интегралов.
Циклические координаты. Понижение порядка системы.
Скобки Пуассона. Свойства.
Теорема Якоби-Пуассона.
Отделимые координаты.

Семинар №8.

ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.

Прямой путь. Окольный путь.

Действие по Гамильтону. Принцип Гамильтона.

Сопряженные кинетические фокусы.

Интегральные инварианты.

Трубка прямых путей.

Основной относительный интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.

Изохронный контур. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре.

Обратные теоремы теории интегральных инвариантов.

Теорема Ли Хуачжуна.

Фазовый объем. Теорема Лиувилля.

Статистический ансамбль. Плотность статистического ансамбля.

Семинар №9.

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Канонические преобразования.

Критерий каноничности. Валентность. Производящая функция.

Унивалентность.

Свободные канонические преобразования. Структурные формулы. Поиск производящей функции и валентности из условия интегрируемости системы структурных формул. Другие возможности выбора переменных и требования.

Полусвободные канонические преобразования. Структурные формулы.

Функция Гамильтона при канонических преобразованиях.

Вариационная симметрия. Теорема Эмми Нетер.

Семинар №10.

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

Уравнение Гамильтона-Якоби. Запись импульса через производящую функцию свободного унивалентного преобразования.

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

Решения: главная и полуглавная функции Гамильтона. Другие решения.

Отделение (разделение) переменных. Уравнения движения в полном виде.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1]. Айзерман М.А.Классическая механика. – М.: Наука, 1974, 1980.

[2]. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической динамике. 3-е издание. – М.: Наука, 2001.

[3]. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.

[4]. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е издание – М.: Наука, 2001.

[5]. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.

[6]. Ярошевский В.А. Лекции по теоретической механике. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2001.

Дополнительная литература:

- на сайте кафедры теоретической механики http://teormech.fizteh.ru или http://teormech.mipt.ru

- методические пособия.

Успехов!