РАВНОВЕСИЕ СКЛЕРОНОМНЫХ СИСТЕМ

1. **Положение равновесия** – это положение, в котором система может находиться сколь угодно долго, будучи приведена туда с нулевыми скоростями.

2. **Принцип виртуальных перемещений. Принцип возможных перемещений. Различие формулировок.**

Принцип:	Виртуальных перемещений	Возможных перемещений
Связи в системе:	Идеальные	Склерономные
Работа сил = 0:	Активные	Приложенные
На перемещениях:	Виртуальных	Возможных

3. **Идеальные связи.**
Связи — идеальные, если сумма работ реакция этих связей на любых виртуальных перемещениях = 0.

4. **Принцип освобождаемости от связей**

Несвободное тело можно рассматривать как свободное, если связи заменить их реакциями.

5. **Условие равновесия для консервативных систем.**

$$Q_i = \frac{-\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 (i = 1,2,....,n)$$

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

6. **Устойчивость по Ляпунову**.

Положение равновесия $q_1 = q_2 = ... = 0$ называется устойчивым, если :

$$\forall e > 0 \ \ \forall t > t_0 \ \ \exists \delta(e) > 0: \ |q_i(t_0)| < \delta \wedge |\dot{q}_i(t_0)| < \delta \ \rightarrow \ |q_i(t)| < e \wedge |\dot{q}_i(t)| < e \ \ (i = 1,2,...,n)$$

7. **Теорема Лагранжа (Лагранжа-Дирихле).**

Если в некотором положении консервативной системы П имеет строгий минимум, то это положение — устойчивого равновесия. (достаточное условие устойчивости)

8. **Первая теорема Ляпунова.**

Если в положении равновесия потенциальная энергия П консервативной системы не имеет минимума и это устанавливается из рассмотрения членов 2-го порядка в разложении П, то такое положение равновесия неустойчиво.

9. **Вторая теорема Ляпунова.**

Если в положении равновесия консервативной системы П имеет максимум и это устанавливается из членов наинизшего порядка в разложении П, то такое положение равновесия неустойчиво.

10. **Теорема Четаева. Однородность функции.**

Если П консервативной системы является однородной функцией, и в положении равновесия не имеет минимум, то такое положение равновесия неустойчиво.

Однородность функции порядка k : $f(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) = c^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

19. **Малые колебания и линеаризация системы.**

Малые колебания — колебания, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия.

Малые колебания подразумевают линеаризацию, т.е. отбрасывание членов выше определенного порядка для того, чтобы при составлении уравнений Лагранжа получилась линейная система дифференциальных уравнений.

20**. Положительная определенность квадратичных форм кинетической и потенциальной энергии.**

Поскольку поведение консервативной системы полностью описывается двумя функциями Т, П , то после линеаризации запишем их в квадратичной форме, при этом будем требовать, чтобы эти формы были положительно-определенными. Положительная определенность следует из физического смысла кинетической энергии $T=\frac{mv^2}{2}>0, v\neq 0$ и из теоремы Лагранжа-Дирихле, потому что мы рассматриваем малые колебания около устойчивого положения равновесия.

21. **Процедура построения решения для системы с малыми колебаниями.**

-Находим П и Т.

-Линеаризуем систему. Получим:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k$$

-Составляем уравнения Лагранжа и подставляем в них П и Т.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{-\partial \Pi}{\partial q_i}-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}+\widetilde{Q}_i,\ i=1,\dots,n$$

-В случае консервативных систем получим:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k+c_{ik}q_k)=0$$

-Частное решение этой системы ищем в виде $q_k=u_k\sin(\omega t+a)$, подставляем в уравнения Лагранжа и получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{ik}-\omega^2 a_{ik})u_k=0$$

-Чтобы получить нетривиальные решения этой системы, приравняем к нулю определитель матрицы коэффициентов этой системы, **вековое уравнение**:

$$det\|c_{ik}-\omega^2 a_{ik}\|=0$$

- Решения ω этого уравнения называются **собственными частотами**. Каждой частоте соответствует вектор $\mathbf{u_j}$ из системы:

$(C-\omega_j^2 A)\vec{u}_j=0$, C — матрица потенциальной энергии, A - кинетической

-После того как нашли все $\mathbf{u_j}$ можно записать **общее решение**:

$$\vec{q}=\sum_j C_j\vec{u}_j\sin(\omega_j t+a_j)$$

22. **Вековое уравнение (уравнение частот). Собственные частоты. Главные колебания. Главные колебания в случае нулевой собственной частотой. Главные колебания в случае кратных собственных частот. Общее решение для системы с малыми колебаниями.**

Вековое уравнение (уравнение частот). Собственные частоты.Общее решение для системы с малыми колебаниями. - см. 21

$\vec{u}_j\sin(\omega_j t+a_j)$ - j-ое главное колебание

В случае кратных собственных частот ранг системы $(C-\omega_j^2 A)\vec{u}_j=0$ равен (n-m), где m – кратность корня $\lambda_i = \omega^2_i$ и однозначности в направлении амплитудных векторов нет.

В случае нулевой собственной частоты полагаем

$$C_j\vec{u}_j\sin(\omega_j t+a_j)=(C_j t+C_{j-1})\vec{u}_j$$

23. **Амплитудные векторы и их свойства: A(C)-ортогональность, линейная независимость, определенность направления, неопределенность модуля.**

Амплитудные векторы линейно независимы и ортогональны в метриках A и C.

Амплитудные векторы известны с точностью до произвольной константы, являющейся их длиной, т.е. изменчивы по модулю, но не по направлению. Это следует из того, что ранг линейной системы равен (n −1) при n неизвестных.

24. **Нормальные координаты. Запись кинетической и потенциальной энергии в нормальных координатах. Нахождение матрицы перехода к нормальным координатам. Угадывание амплитудных векторов в случае симметрии системы.**

Квадратичные формы T и П, поскольку они положительно определены, одновременно приводятся к канонической форме линейным невырожденным преобразованием: $q_k = \sum u_{ik} \theta_i$ θ_i – нормальные координаты.

Тогда :

$$T = \frac{1}{2} \sum \dot{\theta}_i^2 \quad , \quad П = \frac{1}{2} \sum \theta_i^2 \omega_i^2$$

$$\ddot{\theta}_i + \omega_i^2 \theta_i^2 = 0$$

В случае симметрии системы, можно угадать один или несколько амплитудных векторов, а остальные найти из условия ортогональности по матрице А. Угадывание приводит к упрощению решения системы уравнений.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

25. **Асимптотическая устойчивость.**

см.6

26. **Общий вид решений. Случай кратных корней.**

Уравнения для стационарной системы:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots., n$$

Для линейной:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Вид решений:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} C_k u_{ik} e^{\lambda_k t}$$ - Все корни различны

$$x_i = \sum_{k=1}^{m} C_k u_{ik} t^{(k-1)} e^{\lambda_1 * t} + \sum_{k=m+1}^{n} C_k u_{ik} e^{\lambda_k t}$$ - Корень λ_1 кратности m.

27. **Отрицательность действительной части корней характеристического уравнения.**

$\Re \lambda_k < 0, \forall k$ - Требуем это для того, чтобы экспоненты были затухающими.

28. **Получение характеристического полинома для линейно-диссипативной системы.**

Подставив в систему дифференциальных уравнений, и сократив слева и справа экспоненты, мы получим линейную систему уравнений. Эта система будет иметь нетривиальные решения, если определитель, составленный из коэффициентов этой системы, будет равен нулю. Раскрывая этот определитель, получим **характеристическое уравнение :**

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

29. **Необходимое условие асимптотической устойчивости.**

В характеристическом уравнение должно выполнятся:

$a_0 > 0 \Leftrightarrow a_i > 0, \forall i$ - необходимое условие асимптотической устойчивости

30. **Критерий Рауса-Гурвица.**

Для $f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ состовляем матрицу Гурвица:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $a_0 > 0 \Leftrightarrow a_i > 0, \forall i$, и все главные миноры матрицы **A** были больше нуля.

31. **Критерий Льенара-Шипара.**

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $a_0>0 \Leftrightarrow a_i>0, \forall i$, и все четные(либо нечетные) главные миноры матрицы **A** были больше нуля.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СКЛЕРОНОМНЫХ СИСТЕМ

32. **Общее решение: решение однородной системы и решение частное.**

Рассматривается склерономная система в линеаризованной форме:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{kj}\ddot{q}_k+b_{kj}\dot{q}_k+c_{kj}q_k)=Q_j(t), j=1\ldots n$$

Предпологается ассимптотическая устойчивость положения равновесия.

Общее решение системы: $q_k^{общ}=q_k^{част}+q_k^{одн}$

Исследуется вопрос: по известному возмущению $Q_j(t)$ определить отклик $q_k(t)$.

33. **Принцип суперпозиции**

Если воздействиям $Q_j(t)$ j = 1...m соответствуют отклики $q_j(t)$ j = 1...m, то воздействию $\sum_{k=1}^{m}Q_k(t)$ соответствует отклик $\sum_{k=1}^{m}q_k(t)$.

34. **Алгебраическое дополнение и определитель матрицы коэффициентов линейно-диссипативной системы.**

В силу принципа суперпозиции исследуем воздействие только по одной кординате:

Пусть $Q_j(t)=\begin{cases}Q(t), j=l\\ 0, j\neq l\end{cases}$

$Q(t)=h\sin(pt)\rightarrow Q(t)=he^{ipt}$, p – частота вынуждающей силы.

В случае периодической негармонической силы, ее можно разложить в ряд Фурье по гармоническим функциям. В случае непериодической силы используются интегралы Фурье.

$q_k = D_k e^{ipt}$ - ищем решение на частоте вынуждающей силы, потому что решение однородной системы через определенное время становится сколь угодно малым.

$$\sum (a_{jk}(ip)^2 + b_{jk} ip + c_{jk}) D_k = \begin{cases} h, j=l \\ 0, j \neq l \end{cases}$$

По правилу Крамера решением будет:

$D_k = h \frac{\Delta_{lk}(ip)}{\Delta(ip)}$, где Δ_{lk} – алгебраическое дополнение до элемента lk матрицы коэффициентов линейной системы, Δ — определитель этой системы.

35. **Амплитудно-фазовые характеристики. Амплитудно-частотные, фазово-частотные характеристики.**

Можно записать в таком виде $D_k = hW_{lk}(ip) = h|W_{lk}(ip)|e^{i\arg W_{lk}(ip)} = hR_{lk}(p)e^{i\Psi_{lk}(p)}$

Тогда $q_k = hR_{lk}(p)e^{i(pt+\Psi_{lk}(p))}$, где

$W_k = \frac{\Delta_{lk}(ip)}{\Delta(ip)}$ - амплитудно-фазовая характеристика (АФХ)

$R_{lk}(p)$ - амплитудно-частотная характеристика

$\Psi_{lk}(p)$ - фазово-частотная характеристика

36. **АФХ, АЧХ и ФЧХ в одномерном случае для систем с нулевым и ненулевым декрементом затухания (δ).**

Рассмотрим систему с одной степенью свободы :

$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega^2 q = he^{ipt}$, ω - собственная частота соответствующей консервативной системы, δ – декремент затухания.

	$\delta \neq 0$	$\delta = 0$
АФХ	$W = \frac{1}{\omega^2 - p^2 + 2i\delta p}$	$W = \frac{1}{\omega^2 - p^2}$
АЧХ	$R = \frac{1}{\sqrt{(\omega - p)^2 + 4\delta^2 p^2}}$	$R = \frac{1}{\omega^2 - p^2}$
ФЧХ	$\Psi = arctg(\frac{-2p\delta}{\omega^2 - p^2})$	$\Psi = \begin{cases} 0, p<\omega \\ -\pi/2, p=\omega \\ -\pi, p>\omega \end{cases}$

37. **Явление резонанса. Характер возрастания амплитуды при резонансе для консервативной системы.**

Резкое возрастание амплитуды отклика, когда частота внешней силы приближается к p = p* называется резонансом, а соответствующая частота резонансной. У консервативной системы (δ = 0) резонансной частотой называется значение p , при котором амплитудная характеристика системы имеет разрыв второго рода. Консервативная система резонирует на всех своих собственных частотах и только на них.

38. **Собственные, сопровождающие, вынужденные колебания.**

Если δ = 0 , то у нас консервативная система, и все графики становятся разрывными.

Исследуем поведение при резонансе:

$$\ddot{q}+\omega^2 q=h\sin(pt)$$

$$q=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)+\frac{h}{\omega^2-p^2}\sin(pt)$$

$$q_0=A\,,\ \dot{q}_0=B\omega+\frac{hp}{\omega^2-p^2}\Rightarrow A=q_0,\ B=\frac{\dot{q}_0}{\omega}-\frac{hp}{(\omega^2-p^2)\omega}$$

$$q=\underbrace{q_0\cos(\omega t)+\frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin(\omega t)}_{\text{СОБСТВЕННЫЕ}}\underbrace{\underbrace{-\frac{hp}{(\omega^2-p^2)\omega}\sin(\omega t)}_{\text{СОПРОВОЖДАЮЩИЕ}}+\underbrace{\frac{h}{\omega^2-p^2}\sin(\omega t)}_{\text{ВЫНУЖДЕННЫЕ}}}_{\text{ЗАВИСЯТ ОТ P}}$$

39. **Запись вынуждающих сил в нормальных координатах.**

В обычных координатах вынуждающая сила действующая по одной координате, оказывает влияние на движение по другим координатам, в то время как в <u>главных нормальных координатах</u> вынуждающая сила проявляет влияние только по координате ее действия.

$\ddot{\theta}_i+\omega_i^2\theta_i=H_i$, где H_i – сила в нормальных координатах.