Вопросы Семендяева С.В. второго семестра теоретической механики.

Содержание

Первое задание

Второе задание

Ответы

Первое задание

Равновесие склерономных систем
1. Положение равновесия.
2. Принцип виртуальных перемещений. Принцип возможных перемещений. Различие формулировок.
3. Идеальные связи.
4. Принцип освобождаемости от связей.
5. Условие равновесия для консервативных систем.

1. *Положение равновесия* - такое положение системы, в котором система будет находиться всё время, если в начальный момент времени она находилась в этом положении и скорости всех её точек были равны нулю.

2.Принцип виртуальных перемещений
Положение системы - положение равновесия $\Leftrightarrow$ сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{N}(m_k\ddot{\mathbf{r}}_k - \mathbf{F}) \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0$$

Принцип возможных перемещений
Положение механической системы со склерономными связями - положение равновесия $\Leftrightarrow \delta\mathbf{A}^{\text{приложенные силы}}_{\text{возможные перемещения}} = 0$
Склерономные связи - такие связи, в уравнениях которых t (время) не входит явно. Приложенные силы = активные силы + силы реакции.

Принцип

Виртуальных перемещений	**Возможных перемещений**
• идеальные связи	• склерономные связи
• виртуальные перемещения	• возможные перемещения
• активные силы	• приложенные силы
• $\delta\mathbf{A}^{\text{активные силы}}_{\text{виртуальные перемещения}} = 0$	• $\delta\mathbf{A}^{\text{приложенные силы}}_{\text{возможные перемещения}} = 0$

3.Идеальная связь - такая связь, что

$$\delta\mathbf{A}^{\text{реакция связей}}_{\text{виртуальные перемещения}} = 0$$

4.Принцип освобождаемости от связей
Принцип освобождаемости от связей: несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие реакциями.
5.Для консервативных систем положение равновесия характеризуется

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \forall i = 1 \dots n$$

здесь n - число степеней свободы

Устойчивость положение равновесия консервативных систем
6. Устойчивость по Ляпунову.
7. Теорема Лагранжа (Лагранжа-Дирихле).
8. Первая теорема Ляпунова.
9. Вторая теорема Ляпунова.
10. Теорема Четаева. Однородность функции.

6.Устойчивость по Ляпунову
Положение равновесия ($q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$) называется устойчивым, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall t \geqslant t_0 : |q_i^0| < \delta, |\dot{q}_i^0| < \delta \Rightarrow |q(t)| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| < \varepsilon, \forall i = 1 \dots n$$

7.Теорема Лагранжа-Дирихле
Если в некотором положении потенциальная энергия, являющаяся непрерывной функцией q, имеет строгий изолированный минимум, то такое положение есть положение устойчивого равновесия системы.
8.Первая теорема Ляпунова
Если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы Π(q) не имеет минимума и это устанавливается из рассмотрения членов 2-го порядка в разложении Π(q), то такое положение равновесия неустойчиво.
9.Вторая теорема Ляпунова
Если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы Π(q) имеет максимум и это устанавливается из рассмотрения членов наинизшего порядка в разложении Π(q), то такое положение равновесия неустойчиво.
10.Теорема Четаева.Однородность функции
Если потенциальная энергия консервативной системы является однородной функцией и в положении равновесия не имеет минимума, то такое положение равновесия неустойчиво.
Функция называется однородной, если $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$

Прямой метод Ляпунова

11. Теорема Ляпунова об устойчивости движения.
12. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости движения.
13. Теорема Четаева о неустойчивости движения.
14. Первая теорема Ляпунова о неустойчивости движения.
15. Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости движения.
16. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия.
17. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости положения равновесия.
18. Теорема Четаева о неустойчивости положения равновесия.

Теоремы об устойчивости/неустойчивости ДВИЖЕНИЯ отличаются от их аналогов для положения равновесия тем, что рассматривают функции Ляпунова на траекториях, удовлетворяющих уравнениям движения.

В данном блоке рассматриваются автономные системы $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ с положением равновесия $\vec{x} = (\vec{0})$. где

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Вводится функция V($\vec{x}$) - функция Ляпунова.

15. Теорема Ляпунова о неустойчивости положения равновесия

Если $\exists V(\vec{x})$, такая что

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \vec{x} = 0 \\ > 0, & \vec{x} \neq 0 \end{cases}$$

$\dfrac{dV(\vec{x})}{dt} > 0$, то положение равновесия неустойчиво в $x \in U_\delta(0)$

16. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия

Если $\exists V(\vec{x})$, такая что

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \vec{x} = 0 \\ > 0, & \vec{x} \neq 0 \end{cases}$$

и

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i \leqslant 0$$

то положение равновесия устойчиво.

17. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости положе-

ния равновесия

Если $\exists V(\vec{x})$, такая что

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \vec{x} = 0 \\ > 0 & \vec{x} \neq 0 \end{cases}$$

и

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i = \begin{cases} 0, & \vec{x} = 0 \\ < 0 & \vec{x} \neq 0 \end{cases}$$

то положение равновесия асимптотически устойчиво.

18. Теорема Четаева о неустойчивости положения равновесия

Если $\exists V(\vec{x})$, такая что в сколь угодно малой окрестности положения равновесия существует область, где $V(\vec{x}) > 0$, во всех точках которой $\dfrac{dV(\vec{x})}{dt} > 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Малые колебания консервативных систем

19. Малые колебания и линеаризация системы.
20. Положительная определенность квадратичных форм кинетической и потенциальной энергии.
21. Процедура построения решения для системы с малыми колебаниями.
22. Вековое уравнение (уравнение частот). Собственные частоты. Главные колебания. Главные колебания в случае нулевой собственной частотой. Главные колебания в случае кратных собственных частот. Общее решение для системы с малыми колебаниями.
23. Амплитудные векторы и их свойства: A(C)-ортогональность, линейная независимость, определенность направления, неопределенность модуля.
24. Нормальные координаты. Запись кинетической и потенциальной энергии в нормальных координатах. Нахождение матрицы перехода к нормальным координатам. Угадывание амплитудных векторов в случае симметрии системы.

19. *Малые колебания* - колебательное движение, описываемое линейными дифференциальными уравнениями.
Пример уравнений малых колебаний: $\ddot{q} + w^2 q = 0$
Линеаризация - приведение T и П к квадратичным формам в результате разложения по степеням и отбрасывания степеней выше 2.

$$\begin{cases} T \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \\ \Pi \Rightarrow \Pi_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k} c_{ik}q_i q_k \end{cases}$$

20. Квадратичные формы могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q} \\ \Pi_2 = \frac{1}{2}q^T C q \end{cases}$$

Матрицы A,C определены ниже:

$$A = \left\| \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right\|, C = \left\| \frac{\partial^2 E_\text{п}}{\partial q_i \partial q_k} \right\|$$

$E_\text{п}, E_k$ - потенциальная и кинетическая энергия.
Из физического смысла, требуем положительной определённости квадратичных форм Π_2, T_2

21. Процедура построения решение для системы с малыми колебаниями в случае консервативных систем заключается в следующем:

- Находим $E_п, E_k$ - потенциальную и кинетическую энергию.
- Находим матрицы A и C. Они определены в вопросе №20.
- Решаем характеристическое уравнение $det(C - w^2 A) = 0$.
- Получаем вектора $\vec{u}$ из уравнений $||\text{C-}w_i^2\text{A}||\vec{u}_i = 0$.
- Записываем решение в виде

$$\vec{q} = \sum_{i=1}^{n} S_i \vec{u}_i sin(w_i t + \alpha_i)$$

S_i - произвольная константа.

22. *Вековым уравнением* называется уравнение вида $det(C - w^2 A) = 0$.
Решения векового уравнения w_i называются *собственными частотами.*
$\vec{u}_i sin(w_i t + \alpha_i)$ - i-ое *главное колебание.*
Общее решение системы с малыми колебаниями - линейная комбинация главных колебаний.

Особые случаи

- **Кратные частоты**

  Пусть $w_1 = w_2 = \Omega$, тогда

$$\begin{cases} ||C - \text{w}_1^2\text{A}||\vec{u}_1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \\ ||C - \text{w}_2^2\text{A}||\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = k\vec{u}_1 \end{cases}$$

  $\vec{u}_1$ ищем из векового уравнения, а $\vec{u}_2$ находим из условия ортогональности

$$\begin{cases} \vec{u}_2^T A \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{u}_2^T A \vec{u}_3 = 0 \\ \dots \\ \vec{u}_2^T A \vec{u}_n = 0 \end{cases}$$

  Общее решение

$$\vec{q} = S_1 \vec{u}_1 sin(\Omega t + \alpha_1) + S_2 \vec{u}_2 sin(\Omega t + \alpha_2) + \sum_{i=3}^{n} S_i \vec{u}_i sin(w_i t + \alpha_i)$$

- **Нулевые частоты**

  Пусть $w_1 = 0$, тогда общее решение малых колебаний записывается в виде

$$\vec{q} = (S_1 t + \alpha_1)\vec{u}_1 + \sum_{i=2}^{n} S_i \vec{u}_i sin(w_i t + \alpha_i)$$

  S_i - константа

23. Амплитудными векторами называются вектора, полученные из уравнения

$$||C - w_i^2 A||\vec{u}_i = 0$$

В данном разделе будем считать, что кратных частот нет.
Амплитудные вектора линейно независимы, обладают А-ортогональностью ($\vec{u}_i^T A\vec{u}_j = 0$) и С - ортогональностью ($\vec{u}_i^T C\vec{u}_j = 0$), i≠j.
Вектора $\vec{u}_i$ определены по направлению, но не определены по модулю.

24. Квадратичные формы T_2,Π_2 положительно определены, поэтому их можно привести к виду

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i^2 \text{ и } \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2\theta_i^2$$

при помощи невырожденного преобразования $\vec{q} = u\vec{\theta}$. $\vec{\theta}$ называют нормальными координатами.
Когда у нас симметриченая система, можно попытаться угадать амплитудные вектора исходя из здравого смысла, а недостающие вектора восстановить из условия ортогональности амплитудных векторов.

Асимптотическая устойчивость равновесия диссипативных систем
25. Асимптотическая устойчивость.
26. Общий вид решений. Случай кратных корней.
27. Отрицательность действительной части корней характеристического уравнения.
28. Получение характеристического полинома для линейно-диссипативной системы.
29. Необходимое условие асимптотической устойчивости.
30. Критерий Рауса-Гурвица.
31. Критерий Льенара-Шипара.

В данном разделе рассматриваются системы вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Здесь n означает порядок системы дифференциальных уравнений, а не число степеней свободы.

25. Положение равновесия называется асимптотически устойчивым, если

1. Оно устойчиво
2. $$\exists\delta_0 > 0 : |q_i^0| < \delta_0, |\dot{q}_i^0| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0\ ,\ \lim_{t\to\infty} \dot{q}_i(t) = 0$$

26. Общий вид решения такой системы ищется в виде

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} S_k \vec{u}_k \exp\left(\lambda_k t\right)$$

Когда появляются кратные корни, то структура решения меняется. Пусть корень λ_1 имеет кратность m, а остальные λ_k различны, тогда

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{m} S_k \vec{u}_k t^{k-1} \exp\left(\lambda_1 t\right) + \sum_{k=m+1}^{n} S_k \vec{u}_k \exp\left(\lambda_k t\right)$$

27. Вне зависимости от наличия кратных корней λ_k асимптотическая устойчивость положения равновесия обеспечивается лишь при условии $Re\lambda_k < 0$.

28. Получение характеристического полинома происходит в несколько шагов

1. В систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

подставляется решение вида

$$\vec{x} = \vec{u}e^{\lambda t}$$

2. После получения
$$||A - \lambda E||\vec{u} = 0$$
решается уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$.
3. Раскрыв определитель, получаем характеристический полином

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

29. Необходимое условие асимптотической устойчивости : $a_i > 0$ (при $a_0 > 0$)

30. Критерий Рауса-Гурвица
Для того чтобы $Re\lambda_k < 0$ необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные миноры A (определителя Гурвица).

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

31. Критерий Льенара-Шипара
Для того чтобы $Re\lambda_k < 0$, при выполнении необходимого условия (№29), необходимо и достаточно, чтобы были положительны все чётные или нечётные миноры A (определителя Гурвица).

Вынужденные колебания склерономных систем
32. Общее решение: решение однородной системы и частное решение.
33. Принцип суперпозиции.
34. Алгебраическое дополнение и определитель матрицы коэффициентов линейно-диссипативной системы.
35. Амплитудно-фазовые характеристики. Амплитудно-частотные, фазово-частотные характеристики.
36. АФХ, АЧХ и ФЧХ в одномерном случае для систем с нулевым и ненулевым декрементом затухания.
37. Явление резонанса. Характер возрастания амплитуды при резонансе для консервативной системы.
38. Собственные, сопровождающие, вынужденные колебания.
39. Запись вынуждающих сил в нормальных координатах.

В данном разделе рассматриваются уравнения вида

$$A\ddot{\vec{q}} + B\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{Q}(t)$$

Используется обозначение

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$$

32. Общее решение

$$\vec{q}_{\text{общ}} = \vec{q}_{\text{одн}} + \vec{q}_{\text{частн}}$$

Здесь $\vec{q}_{\text{одн}}$ - решение однородного уравнения, а $\vec{q}_{\text{частн}}$ - частное решение неоднородной системы.
33. Принцип суперпозиции заключается в следующем:
если воздействию Q_j, j$=1\dots n$ соответствует отклик $q_j(t)$, то воздействию $\sum_{i=1}^{n} Q_j(t)$ соответствует отклик $\sum_{i=1}^{n} q_j(t)$.
34. Исследуем воздействие по одной координате

$$Q_j(t) = \begin{cases} hsin(pt), & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$$

p - частота вынуждающей силы.
В случае периодической негармонической силы, её можно разложить в ряд Фурье по гармоническим функциям. В случае непериодической силы используется интегралы Фурье.
Найдём решение в виде $q_k = D_k \exp{(ipt)}$, тогда уравнение колебаний примет

вид

$$\sum_k (a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k)D_k = \begin{cases} h\exp(ipt), & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$$

После сокращения на $\exp(ipt)$, используя правило Крамера, получим

$$D_k = h\frac{\Delta_{lk}(ip)}{\Delta(ip)}$$

Здесь $\Delta(ip)$ - определитель матрицы из коэффициентов полученной системы алгебраических уравнений, а $\Delta_{lk}(ip)$ - алгебраическое дополнение элемента, расположенного в l-той строке и k-том столбце.

35. Обозначим в предыдущем вопросе коэффициент перед h за функцию

$$W_{lk}(ip) = \frac{\Delta_{lk}(ip)}{\Delta(ip)}$$

Функция	$W_{lk}(ip)$	$\lvert W_{lk}(ip)\rvert$	$\arg(W_{lk}(ip))$
Название	Амплитудно-фазовая характеристика	Амплитудно-частотная характеристика	Фазово-частотная характеристика

Таблица 1: Таблица характеристик

36. В одномерном случае уравнение колебаний сводится к

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + w^2 q = h\exp(ipt),\ \delta \text{ - декремент затухания.}$$

	$\delta \neq 0$	$\delta = 0$
АФХ	$\dfrac{1}{w^2 - p^2 + 2i\delta p}$	$\dfrac{1}{w^2 - p^2}$
АЧХ	$\dfrac{1}{\sqrt{(w^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}$	$\dfrac{1}{w^2 - p^2}$
ФЧХ	$\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-2p\delta}{w^2 - p^2}\right)$	$\begin{cases} 0, & p < w \\ -\pi/2, & p = w \\ -\pi, & p > w \end{cases}$

Таблица 2: Характеристики колебательной системы с одной степенью свободы

37. Неограниченное увеличение амплитуды при стремлении частоты вынуждающей силы к собственной частоте соответствующей консервативной системы называется *резонансом.*

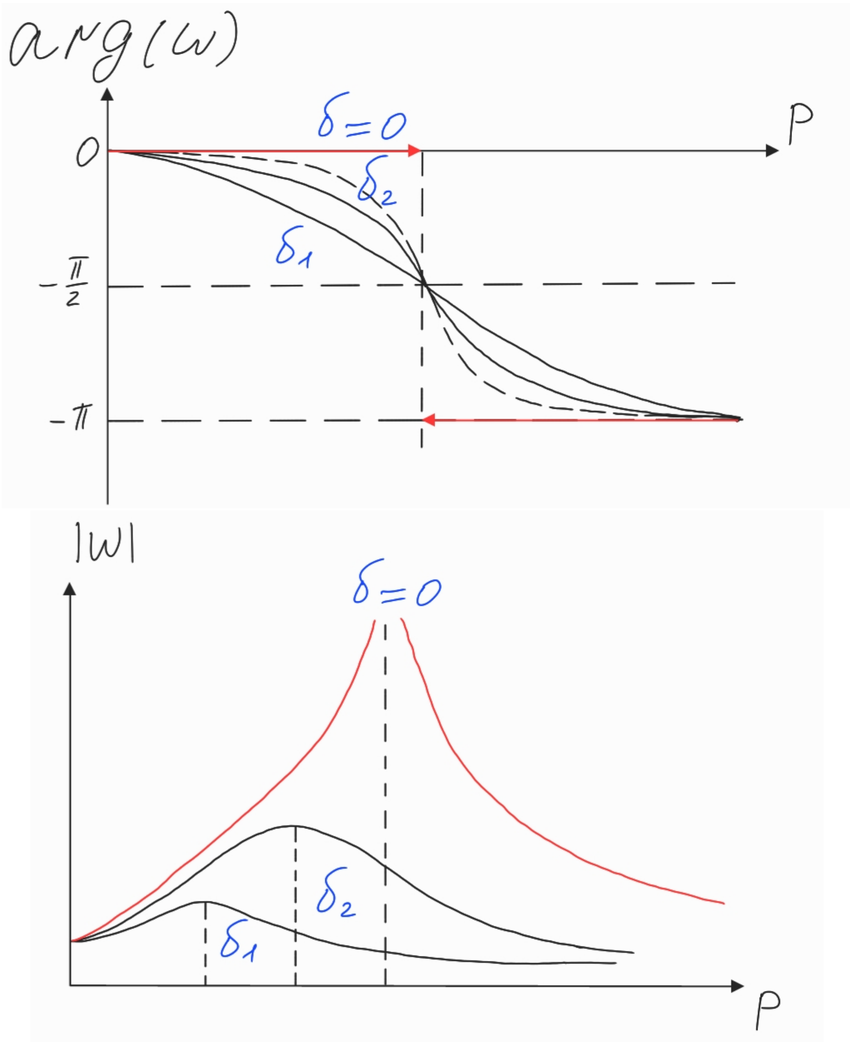

Рис. 1: ФЧХ(сверху) и АЧХ(снизу) при различных δ ($\delta_2 < \delta_1$) при частотах близких к резонансным

38. Рассмотрим характер роста амплитуды со временем при p = w. Уравнение движения запишем в виде

$$\ddot{q} + w^2 q = hsin(pt)$$

общее решение которого имеет вид

$$q = Acos(wt) + Bsin(wt) + \frac{h}{w^2 - p^2} sin(pt)$$

При помощи начальных условий изабвляемся от констант A,B

$$q = \underbrace{q_0 cos(wt) + \frac{\dot{q}_0}{w} sin(wt)}_{\text{собственные колебания}} - \underbrace{\frac{hp}{(w^2-p^2)w} sin(wt)}_{\text{сопровождающие колебания}} + \underbrace{\frac{h}{w^2-p^2} sin(pt)}_{\text{вынужденные колебания}}$$

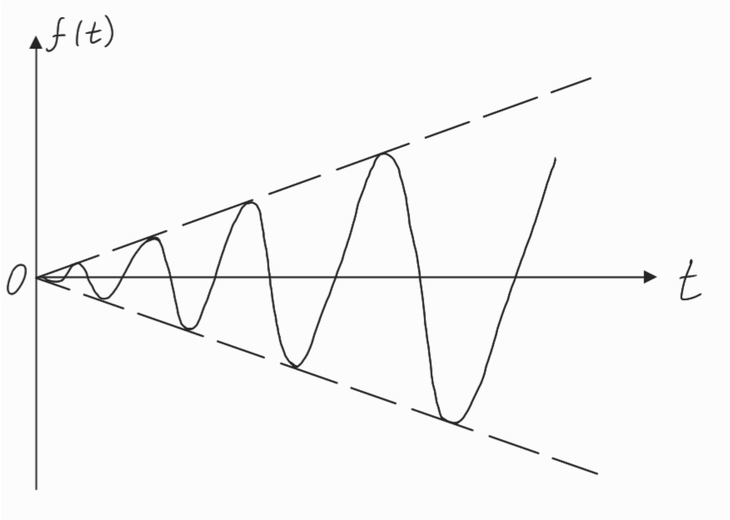

Рис. 2: Зависимость частного решение неоднородного уравнения от времени

39. Как обсуждалось выше, преобразование $\vec{q} = u\vec{\theta}$ приводит систему к нормальным координатам. Оно также преобразует вынуждающие силы $\Theta = u^T Q$, уравнение колебаний записывается в виде

$$\ddot{\theta} + w_i^2 \theta = \Theta_i \ , \, i = 1 \dots n$$

Таким образом, в обычных координатах вынуждающая сила, действующая по одной координате, оказывает влияние на движения по другим координатам. В то же время в нормальные координатах каждая вынуждающая сила проявляет влияние только по координате ее действия.

Второе задание

Уравнения Гамильтона. Первые интегралы. Скобки Пуассона

1.Переменные Гамильтона. Требование обратимости перехода к гамильтоновым переменным
2. Обобщенный импульс. Гамильтониан
3. Канонические уравнения (уравнения Гамильтона)
4. Первый интеграл
5. Скобки Пуассона
6. Критерий первого интеграла для гамильтоновой системы
7. Теорема Якоби-Пуассона
8. Функциональная независимость первых интегралов
9. Обобщенно-консервативная система. Обобщенная энергия
10. Физический смысл гамильтониана натуральной склерономной системы
11. Циклические координаты и соответствующие первые интегралы
12. Отделимые координаты и соответствующие первые интегралы

1.От переменных Лагранжа (t,q,$\dot{q}$) переходим к переменным (t,q,p), называемыми переменными Гамильтона. L - лагранжиан системы, L = T - П. Требование обратимости перехода от переменных Лагранжа к переменным Гамильтона

$$det\left|\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right|\right| \neq 0$$

2. *Обобщенным импульсом* p_i называется величина

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \varphi_i(t,q,\dot{q})$$

Функцией Гамильтона (гамильтонианом) называется объект

$$H(t,q,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(t,q,\dot{q})$$

Фукнция $\dot{q}$ - обобщенная скорость, что представлена в виде $\dot{q} = \dot{q}(t,q,p)$

3.Система канонических уравнений Гамильтона приведена ниже

$$\begin{cases} \dot{q}_i = & \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = & -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

4. *Первым интегралом* канонических уравнений Гамильтона называется функция f(t,q,p), которая при подстановке в неё любого решения q(t),p(t) системы уравнений Гамильтона сохраняет как функция t своё значение

$$f(t,q(t),p(t)) = f(t_0,q_0,p_0) = const$$

5. *Скобками Пуассона* называется объект

$$(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)$$

Скобки Пуассона обладают свойствами

1. $$(\varphi,\psi) = -(\psi,\varphi)$$

2. $$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i,\psi\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\varphi_i,\psi\right), \lambda_i = const$$

3. $$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right) + \left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

6.Критерий первого интеграла

f(t,q,p) - первый интеграл системы $\Leftrightarrow$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) = 0$$

7.Теорема Якоби-Пуассона

Скобка Пуассона (φ,ψ) от первых интегралов гамильтоновой системы есть первый интеграл той же системы.

8. Нас инетересуют только функционально независимые первые интегралы. Пусть $f_1,f_2\ldots f_m$ - первые интегралы.Рассматривается ранг матрицы

$$\left|\left|\frac{\partial(f_1\ldots f_m)}{\partial(q_1\ldots q_n,p_1\ldots p_n)}\right|\right|$$

Если ранг матрицы равен m, то первые интегралы $f_1,f_2\ldots f_m$ функционально независимы, если меньше m, то они функционально зависимы.

9. *Обобщенно-консервативная системой* называется такая система, если функция Гамильтона H(q,p) не завист от времени t.

Фунукия Гамильтона H(q,p) обобщённо консеравтивной системы является

первым интегралом соответствующей гамильтоновой системы.
Так как функция Гамильтона от времени не зависит, то от времени не зависит и функция Лагранжа, поэтому

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = const$$

это выражение называется *обобщенным интегралом энергии*
10. Для натуральных склерономных систем функция Гамильтона совпадает с полной энергией системы.
11.Координата q_k называется *циклической*, если функция Гамильтона от неё не зависит

$$H = H(t,q_1,\ldots,q_{k-1},q_{k+1},\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$$

Циклической координате q_k соответствует первый интеграл $p_k = const$
12.Координата q_k называется *отделимой*, если от нее и от соответствующего ей импульса функция Гамильтона H(q,p) зависит следующим образом:

$$H = H(t,z,q_1,\ldots,q_{k-1},q_{k+1},\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_{k-1},p_{k+1},\ldots,p_n),\ z = f(q_k,p_k)$$

Отделимой координате q_k соответствует первый интеграл z=f(q_k,p_k)

Принцип Гамильтона
13. Прямой и окольный путь
14. Возможное и невозможное движение
15. Действие по Гамильтону
16. Принцип Гамильтона
17. Сопряженный кинетический фокус
18. Теорема Бобылева

13.Пусть есть две точки M_0, M_1.*Прямой путь* - путь, по которому может двигаться система при заданной функции L. Для прямого пути функции $q_i = q_i(t)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Все остальные пути, проходящие через точки M_0, M_1, будем называть окольными.
14.Прямой путь - график возможного движения, а окольный путь - график невозможного движения.
15.*Действием по Гамильтону* называется интеграл такого вида

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(s,q,\dot{q})ds$$

16.*Варьированием* функции $\varPhi(x,\alpha)$ называется выражение

$$\delta\varPhi = \frac{\partial \varPhi}{\partial \alpha}\delta\alpha$$

Принцип Гамильтона
Путь $\tilde{q}(t)$ является прямым в том и только в том случае, если при любом варьировании $q(t,\alpha)$, удовлетворяющим $q(t_0,\alpha) = q^0, q(t_1,\alpha) = q^1$, для вариации действия по Гамильтону на этом пути выполняется

$$\delta W|_{\alpha=0} = 0$$

17. Две точки точки (t_0,q^0), (t_f,q^f) расширенного координатного пространства, расположенные на решении q(t) = q$(t,t_0,q^0,\dot{q}^0)$ называются *сопряжёнными кинетическими фокусами*, если справедливо равенство

$$det\left\|\frac{\partial q_i(t_f,t_0,q^0,\dot{q}^0)}{\partial \dot{q}_k^0}\right\| = 0$$

Иначе говоря, *сопряжёнными кинетическими фокусами* называются точки нарушения единственности протекания путей в расширенном координатном пространстве.

18.**Теорема Бобылёва**

Действие по Гамильтону минимально, если на прямом пути из (q_0,t_0) в (q_1,t_1) отсутствуют кинетические фокусы.

Интегральные инварианты

19. Трубка прямых путей
20. Инвариант Пуанкаре-Картана
21. Универсальный инвариант Пуанкаре
22. Теорема Ли Хуачжуна
23. Фазовый объем
24. Теорема Лиувилля
25. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

19. Рассмотрим $C_0 : t^0(\alpha),q^0(\alpha),p^0(\alpha)$.Предположим $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и

$$t^0(0) = t^0(1),\ q^0(0) = q^0(1),\ p^0(0) = p^0(1)$$

Тогда C_0 - замкнутый контур из начальных данных для уравнений Гамильтона, которые и определяют прямой путь. Совокупность прямых путей q(t,α),p(t,α), проходящих через точки контура C_0, носит название *трубки прямых путей*

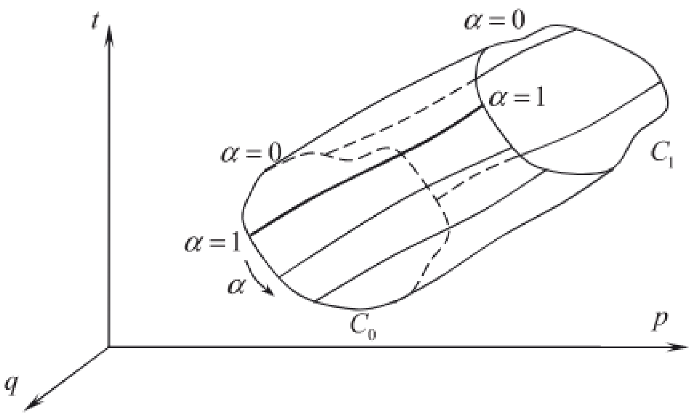

Рис. 3: Иллюстрация к определению понятия «трубка прямых путей»

20.Введём новый контур $C_1 : t^1(\alpha),q^1(\alpha),p^1(\alpha)$ на рисунке 3. Контуры называются *согласованными*, если при каждом значении α соответствующие точки контуров C_0,C_1 расположены на одном и том же прямом пути.

Инвариантом Пуанкаре-Картана называется выражение

$$J_{\text{ПК}} = \oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t$$

Мыслить его нужно так: по любым двум согласованным контурам C_0, C_1, охватывающим трубку прямых путей, порождённых функцией H, входящей в $J_{\text{ПК}}$, интеграл $J_{\text{ПК}}$ принимает одно и то же значение.

21.*Универсальным инвариантом Пуанкаре* называется объект

$$J_{\Pi} = \oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i$$

22.**Теорема Ли Хуачжуна** Если

$$J' = \oint_C \sum_{i=1}^{n} (A_i(t,q,p)\delta q_i + B_i(t,q,p)\delta p_i)$$

есть универсальный интегральный инвариант, то $J' = DJ_{\Pi}$, то есть

$$\oint_C \sum_{i=1}^{n} (A_i(t,q,p)\delta q_i + B_i(t,q,p)\delta p_i) = D \oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i$$

здесь D - постоянная, J_{Π} - инвариант Пуанкаре.
Можно иначе записать эту теорему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_i}{\partial q_k} = \dfrac{\partial A_k}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial B_i}{\partial p_k} = \dfrac{\partial B_k}{\partial p_i} \\ \dfrac{\partial A_i}{\partial p_k} = \dfrac{\partial B_k}{\partial q_i} + D\delta_{ik} \end{cases}$$

δ_{ik} - символ Кронекера
23. *Фазовым объемом* называется абсолютный интегральный инвариант 2n порядка

$$J_{2n} = \int \cdots \int \delta q_1 \delta p_1 \ldots \delta q_n \delta p_n$$

24.Теорема Луивилля Пусть правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \varphi_i(t,x), \ i = 1 \ldots n$$

удовлетворяют условию

$$div \ \varphi(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(t,x)}{\partial x_i} = 0$$

Тогда на решениях системы сохраняется величина фазового объема.

25.Обратные теоремы интегральных инвариантов

1. Пусть трубка прямых путей образована решениями некоторой системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{q}_i = Q_i(t,q,p) \\ \dot{p}_i = P_i(t,q,p) \end{cases}$$

Пусть на изохронных (t = const) контурах имеет место инвариантность $J_{\text{П}}$, тогда эта система дифференциальных уравнений Гамильтонова, то есть

$$\exists H : Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\, P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

2. Пусть трубка прямых путей образована решениями системы

$$\begin{cases} \dot{q}_i = Q_i(t,q,p) \\ \dot{p}_i = P_i(t,q,p) \end{cases}$$

Пусть по любым двум согласованным контурам C_0 и C_1, охватывающим трубку прямых путей, интеграл Пуанкаре-Картана

$$J_{\text{ПК}} = \oint_C \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - \varPhi \delta t$$

принимает одно и то же значение. Тогда справедливы соотношения

$$Q_i = \frac{\partial \varPhi}{\partial p_i},\, P_i = -\frac{\partial \varPhi}{\partial q_i}$$

Канонические преобразования

26. Ковариантность уравнений
27. Канонические преобразования
28. Критерий каноничности
29. Валентность и производящая функция
30. Преобразование гамильтониана
31. Свободные канонические преобразования
32. Критерий каноничности для свободного преобразования

26. Поведение голономной системы при любом выборе обобщённых координат может быть описано уравнениями Лагранжа - в этом смысл ковариантности уравнений Лагранжа. Уравнения Гамильтона в общем случае нековариантны.

27. Неособенное преобразование переменных

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t,q,p)\ \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t,q,p)\ \ det\begin{vmatrix} \left\|\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_k}\right\| & \left\|\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_k}\right\| \\ \left\|\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_k}\right\| & \left\|\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_k}\right\| \end{vmatrix} \neq 0$$

называется *каноническим преобразованием*, если замена переменных в любой гамильтоновой системе приводит опять к гамильтоновой системе.

28. Критерий каноничности

Преобразование каноническое $\Leftrightarrow$ существует $c \neq 0$ и функция F, что в силу преобразования справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - c\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = -\delta F = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\delta q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i$$

29. Из **критерия каноничности** c - *валентность*, F - *производящая функция*. При c = 1 преобразование называется *унивалентным*

30.Гамильтониан в новых переменных может иметь более простую структуру Привлекая функцию S (смотреть №32), гамильтониан запишется в виде

$$\tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p}(t,q,\tilde{q})) = \frac{\partial S}{\partial t} + cH(t,q,p(t,q,\tilde{q}))$$

31.Набор независимых переменных t,q,$\tilde{q}$ называется *свободным*.
Неособенное преобразование называется *свободным*, если для него

$$det\left\|\frac{\partial \tilde{q}_i(t,q,p)}{\partial p_k}\right\| \neq 0$$

32.Критерий каноничности для свободного преобразования Свободное преобразование каноническое $\Leftrightarrow$ существует $c \neq 0$ и функция F, что в силу преобразования справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \delta \tilde{q}_i - c \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} \delta \tilde{q}_i$$

Где $S(t,q,\tilde{q}) = F(t,q,p(t,q,\tilde{q}))$
Отсюда получаются структурные формулы канонического преобразовния

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q_i} = c p_i(t,q,\tilde{q}) \\ \dfrac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i(t,q,\tilde{q}) \end{cases}$$

Уравнения Гамильтона-Якоби

33. *Уравнением Гамильтона-Якоби* называется объект

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

34. *Полным интегралом* называется решение

$$S(t,q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

которое удовлетворяет условию

$$det\left\|\frac{\partial^2 S(t,q,\alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right\| \neq 0$$

35.

1. *Главная функция Гамильтона* с переменной $p^0 = p^0(t,q,q^0)$

$$W(t,q^0,p^0) = \int_{t_0}^{t} L(s,q(s,q^0,p^0),\dot{q}(s,q,p^0))ds$$

2. *Полуглавная функция Гамильтона*

$$V(t,q,p^0) = W(t,q^0(t,q,p^0),p^0) + \sum_{i=1}^{n} p_i^0 q_i^0(t,q,p^0)$$

36. Если переменные разделяются в гамильтониане, то полный интеграл можно представить в виде аддитивной комбинации:

$$S(t,q,\alpha) = S_0(t,\alpha) + \sum_{i=1}^{n} S_i(q_i,\alpha)$$

Здесь $p_i = p_i(q_i,\alpha)$

37. Уравнения фазовых траекторий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \\ \dfrac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \end{cases}$$