Теорема 3. *Пусть функциональный ряд* (17), *составленный из регулярных функций* $f_n : G \to \mathbb{C}$, *сходится равномерно строго внутри области* G. *Тогда*

1) сумма $S(z)$ *ряда* (17) *есть тоже регулярная функция на* G *(Первая теорема Вейерштрасса);*

2) ряд (17) *можно почленно дифференцировать любое число раз, т. е. для* $\forall\, k \in \mathbb{N}$ *имеет место формула*

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in G, \tag{18}$$

причем каждый ряд (18) *сходится равномерно строго внутри области* G *(Вторая теорема Вейерштрасса).*

Доказательство. Обозначим через $S_N(z)$ частичную сумму ряда (17), т. е.

$$S_N(z) \triangleq \sum_{n=1}^{N} f_n(z). \tag{19}$$

1. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in G$ и возьмем такие $r > 0$, $r_1 > 0$, чтобы $\overline{B_{r+r_1}(z_0)} \subset G$. Так как для всякого $N \in \mathbb{N}$ функция $S_N(z)$ регулярна в G, то согласно интегральной формуле Коши

$$S_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \forall\, z \in B_r(z_0), \tag{20}$$

где $\gamma_{r+r_1} \triangleq \left\{ \zeta \;\middle|\; |\zeta - z_0| = r + r_1 \right\}$ — окружность, ориентированная положительно.

В силу равномерной сходимости функционального ряда (17) строго внутри G и непрерывности функций $f_n(z)$ из утверждения 5 § 2 следует, что и сумма ряда $S(z)$ также есть непрерывная функция на G. Кроме того, из равномерной сходимости на $\overline{B_{r+r_1}(z_0)}$ ряда (17) следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon), \quad \forall\, N \geqslant N(\varepsilon) : \sup_{\zeta \in \gamma_{r+r_1}} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| < \varepsilon. \tag{21}$$

Для любой точки $z \in B_r(z_0)$ и натурального числа $N \geqslant N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ из (21), получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{|S_N(\zeta) - S(\zeta)|}{|\zeta - z|}\, |d\zeta| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi r_1} \cdot 2\pi (r + r_1) = \varepsilon \cdot \frac{r + r_1}{r_1}. \tag{22}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ из (20) и (22) следует, что

$$\lim_{N\to\infty} S_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z \in B_r(z_0),$$

т. е.

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad \forall\, z \in B_r(z_0). \tag{23}$$

Выражение справа в равенстве (23) является интегралом типа Коши от непрерывной функции $S(\zeta)$ (определение см. в § 8). По его основному свойству (теорема 2 § 8) этот интеграл бесконечно дифференцируем, т. е. сумма ряда $S(z)$ есть регулярная функция в окрестности произвольной точки z_0 из G, откуда следует, что сумма ряда $S(z)$ регулярна во всей области G.

Итак, функции $S_N(z)$ и $S(z)$ регулярны в области G, т. е. в этой области G существуют производные $S_N^{(k)}(z)$ и $S^{(k)}(z)$ при $\forall\, k \in \mathbb{N}$ (см. теорему 3 § 8).

2. Опять фиксируем произвольную точку $z_0 \in G$ и произвольный круг $B_r(z_0)$, $r > 0$, такой, что $\overline{B_r(z_0)} \subset G$. Это значит, что найдется число $r_1 > 0$ такое, что $\overline{B_{r+r_1}(z_0)} \subset G$. По теореме 3 § 8 для любого $k \in \mathbb{N}$ и регулярных функций $S_N(z)$ и $S(z)$ получаем (см. формулу (11) из § 8)

$$S_N^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta, \quad z \in \overline{B_r(z_0)}, \tag{24}$$

$$S^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta, \quad z \in \overline{B_r(z_0)}. \tag{25}$$

Отсюда для всякого $\varepsilon > 0$, выбирая $N(\varepsilon)$ в силу (21), при любом $N \geqslant N(\varepsilon)$ получаем оценку

$$\left|S_N^{(k)}(z) - S^{(k)}(z)\right| = \frac{k!}{2\pi}\left|\int_{\gamma_{r+r_1}} \frac{S_N(\zeta) - S(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!}{2\pi \cdot r_1^{k+1}} \cdot \sup_{\zeta\in\gamma_{r+r_1}} |S_N(\zeta) - S(\zeta)| \cdot 2\pi(r + r_1) < \frac{k!(r + r_1)}{r_1^{k+1}}\varepsilon, \quad \forall\, z \in \overline{B_r(z_0)}.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $S_N^{(k)}(z)$ равномерно на $\overline{B_r(z_0)}$ сходится к функции $S^{(k)}(z)$. В силу произвольности выбора $z_0 \in G$ и круга $B_r(z_0)$ последнее означает, что последовательность $S_N^{(k)}(z)$ сходится к $S^{(k)}(z)$ равномерно строго внутри области G. ∎