§ 19. Целые и мероморфные функции

Определение 1. Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, регулярная во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется *целой.*

По теореме 2 § 9 целая функция f представима в виде сходящегося во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| < +\infty, \tag{1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta. \tag{2}$$

Очевидно, что ряд (1) одновременно является рядом Лорана функции f с центром в точке ∞.

Теорема 1. *Пусть для целой функции f существуют числа $A > 0$, $R_1 > 0$ и целое $m \geqslant 0$, при которых справедливо неравенство*

$$|f(z)| \leqslant A|z|^m, \quad \forall\, z : |z| > R_1. \tag{3}$$

Тогда функция f является многочленом степени не выше, чем m.

Доказательство. По формуле (2) для коэффициентов c_n при $r > R_1$ получаем оценку

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}}\, |d\zeta| \leqslant \frac{Ar^m}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = Ar^{m-n}. \tag{4}$$

Так как неравенство (4) справедливо для любых $r > R_1$, то при $n > m$ из оценки (4) следует, что $|c_n|$ меньше сколь угодно малого числа Ar^{m-n} (при $r \to \infty$), т. е. $c_n = 0$ при $n > m$. Следовательно, из ряда (1) получаем, что функция f есть многочлен степени не выше, чем m. ■

Следствие 1 (теорема Лиувилля). *Если целая функция f ограничена в некоторой окрестности бесконечности, то она постоянна.*

С помощью теоремы Лиувилля докажем основную теорему алгебры.

Теорема 2. *Всякий многочлен*

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n,$$

где $c_n \neq 0$, $n \geqslant 1$, имеет по крайней мере один нуль в плоскости $\mathbb{C}$.

Доказательство. Допустим противное, т. е. что многочлен P_n не равняется нулю ни при каком $z \in \mathbb{C}$. Тогда определим функцию $g(z) \overset{\triangle}{=} \frac{1}{P_n(z)}$, которая в силу допущения будет целой. При $z \to \infty$ имеем $P_n(z) \to \infty$, т. е. $g(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Следовательно, функция g ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{B}_{R_1}(\infty)$. Тогда по теореме Лиувилля функция $g(z) \equiv \mathrm{const}$, что противоречит определению функции g. ■

Анализируя поведение произвольной целой функции f на бесконечности, получаем три возможности:

1) ∞ — устранимая особая точка, т. е. функция f ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{B}_{R_1}(\infty)$, откуда по теореме Лиувилля следует, что $m = 0$ и $f(z) \equiv \mathrm{const}$;

2) ∞ — полюс, т. е. существует $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Это значит, что главная часть разложения функции f в ряд Лорана по степеням z в

сходящийся в круге $|z-2|<2$. Аналогично преобразуем первое слагаемое в (17) и при $|z-2|>1$ получим сходящийся ряд

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{(z-2)}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{z-2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{z-2}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}. \tag{19}$$

В итоге из рядов (18) и (19) получаем представление функции f в виде ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}(z-2)^n,\ \forall z: 1<|z-2|<2,$$

который в силу теоремы 2 (единственности ряда Лорана) является искомым рядом Лорана данной функции f.

Следствие 3 (неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана). *Пусть функция f регулярна в кольце $\rho<|z-a|<R$ и на каждой окружности $\gamma_r=\{z \mid |z-a|=r\}$, где $r\in(\rho,R)$, справедлива оценка $|f(z)|\leqslant A_r$ $\forall z\in\gamma_r$. Тогда для коэффициентов* (4) *ряда Лорана* (1) *справедлива оценка*

$$|c_n|\leqslant\frac{A_r}{r^n},\qquad \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{20}$$

Доказательство. Из формулы (4) сразу следует

$$|c_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{A_r}{2\pi r^{n+1}}\int_{\gamma_r}|d\zeta|=\frac{A_r}{r^n},$$

что и требовалось доказать. ■