Определение 1. Функция (или отображение) вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

где коэффициенты $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$, называется *дробно-линейной функцией (или отображением)*.

Доопределим функцию w из (1) на бесконечности по непрерывности в $\overline{\mathbb{C}}$:

1) если $c = 0$, то полагаем

$$w(\infty) = \infty, \tag{2'}$$

2) если $c \neq 0$, то полагаем

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty. \tag{2}$$

Таким образом, функция (1), (2) отображает $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

В случае, когда $c = 0$, получаем линейную функцию, свойства которой считаем хорошо известными из курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Поэтому, как правило, полагаем, что $c \neq$ $\neq 0$.

Теорема 1. *Дробно-линейная функция* (1), (2) *отображает расширенную комплексную плоскость* $\overline{\mathbb{C}}$ *на всю расширенную комплексную плоскость* $\overline{\mathbb{C}}$ *конформно.*

Доказательство. 1. Докажем однолистность функции (1), (2) на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Из формул (1), (2) элементарными вычислениями можно выразить z через w, в результате чего получаем, что существует обратное отображение вида

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}, \tag{3}$$

$$z(\infty) = -\frac{d}{c}, \quad z\left(\frac{a}{c}\right) = \infty. \tag{4}$$

Таким образом, отображение (1), (2) однолистно отображает плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на всю плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, причем, так как определитель

$$\begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

то обратное отображение (3), (4) также является дробно-линейным.

2. Докажем конформность функции (1), (2) в каждой точке z_0 плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

1. Пусть $z_0 \neq -\frac{d}{c}$, $z_0 \neq \infty$. Тогда

$$w'(z_0) = \frac{a(cz_0+d) - c(b+az_0)}{(cz_0+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2} \neq 0. \tag{5}$$

2. Пусть $z_0 = -\frac{d}{c}$. Так как $\lim\limits_{z \to z_0} w(z) = \infty$, то рассмотрим функцию

$$g(z) \overset{\triangle}{=} \frac{1}{w(z)} = \frac{cz+d}{az+b},$$

$$g'(z_0) = \frac{bc-ad}{(az_0+b)^2} = \frac{c^2}{cb-ad} \neq 0.$$

Это значит, что функция g конформна в точке z_0, откуда по определению 4 § 25 функция $w(z)$ конформна в точке $z_0 = -\dfrac{d}{c}$.

3. Пусть $z_0 = \infty$. Тогда $\lim\limits_{z \to \infty} w(z) = \frac{a}{c}$. Исследуем на конформность функцию

$$g(\zeta) \overset{\triangle}{=} w\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a+b\zeta}{c+d\zeta}$$

в точке $\zeta_0 = 0$. Вычисляя производную в этой точке

$$g'(\zeta_0) = \frac{bc-ad}{(c+d\zeta_0)^2} = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0.$$

получаем, что функция g конформна в нуле. Отсюда по определению 3 § 25 функция $w(z)$ конформна в точке ∞.

Итак, по определениям 1–5 § 25 функция (1), (2) конформно отображает плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на всю плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. ■

является дробно-линейной.

Отметим следующее круговое свойство дробно-линейных отображений.

Теорема 2. *При дробно-линейном отображении* (1), (2) *образом любой окружности или прямой является окружность или прямая.*

Доказательство. Для линейного отображения (т. е. при $c = 0$)

$$w = az + b, \quad a \neq 0, \tag{6}$$

круговое свойство, приведенное в формулировке теоремы, очевидно, справедливо, так как из линейной алгебры известно, что линейное отображение на плоскости $\mathbb{R}^2$ сводится к суперпозиции преобразования подобия, поворота и переноса, при которых окружности переходят в окружности, а прямые в прямые.

В общем случае (при $c \neq 0$) представим отображение (1) в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{-ad+bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d},$$

т. е. функцию (1) представим в виде суперпозиции трех отображений:

$$w = \alpha + \beta t, \qquad t = \frac{1}{\zeta}, \qquad \zeta = cz + d. \tag{7}$$

В формулах (7) два отображения являются линейными, и, как уже отмечали выше, они обладают круговым свойством. Осталось доказать, что отображение $t = \frac{1}{\zeta}$ также обладает круговым свойством.

Зададим произвольную окружность γ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Она задается уравнением 2-го порядка

$$A(\xi^2 + \eta^2) + B\xi + C\eta + D = 0, \tag{8}$$

где A, B, C, D — действительные числа, удовлетворяющие условиям $A \geqslant 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$. В случае, когда $A = 0$, уравнение (8) задает прямую. Так как $\xi^2 + \eta^2 = |\zeta|^2 = \zeta\overline{\zeta}$, $\xi = \frac{1}{2}(\zeta + \overline{\zeta})$, $\eta = \frac{1}{2i}(\zeta - \overline{\zeta})$, то уравнение (8) можно переписать в виде

$$A\zeta\overline{\zeta} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)\zeta + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\overline{\zeta} + D = 0. \tag{9}$$

Отображение $t = \frac{1}{\zeta}$ преобразует окружность (9) в кривую, уравнение которой имеет вид

$$A + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)\overline{t} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)t + Dt\overline{t} = 0. \tag{10}$$

Очевидно, что уравнение (10) в случае, когда $D \neq 0$, также является уравнением окружности, а в случае, когда $D = 0$, является уравнением прямой. ■

Теорема 3. *При всяком дробно-линейном отображении* (1), (2) *пара точек, симметричных относительно некоторой окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой кривой.*

Теорема 4. *Совокупность дробно-линейных отображений образует группу относительно операции суперпозиции, т. е. суперпозиция двух дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением, и обратное к любому дробно-линейному отображению также является дробно-линейным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим два дробно-линейных отображения

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \tag{13}$$

$$w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}. \tag{14}$$

Подставив (13) в (14), после элементарных преобразований получаем их суперпозицию вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{15}$$

где коэффициенты a, b, c, d таковы, что справедливо равенство определителей

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}, \tag{16}$$

т. е. $ad - cb \neq 0$, следовательно, отображение (15) также является дробно-линейным.

Доказательство того, что обратное отображение к дробно-линейному также является дробно-линейным, приведено в доказательстве теоремы 1. ■

Разберем некоторые примеры канонических областей в плоскости $\mathbb{C}$ и их образов, получаемых при дробно-линейных отображениях.