если

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Теорема 1. (Теорема Кантора.) Последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.

Доказательство. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – последовательность вложенных отрезков. Из включения (1) следует, что

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Рассмотрим множество левых концов отрезков $[a_n, b_n]$: $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и множество правых концов этих отрезков: $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Покажем, что $a \le b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$. Пусть $a \in A$, $b \in B$. Тогда $\exists k \in \mathbb{N} : \quad a = a_k$ и $\exists m \in \mathbb{N} : \quad b = b_m$. Из (2) следует, что при $k \le m$ справедливы неравенства $a_k \le a_m < b_m$, а при $k > m$ – неравенства $a_k < b_k \le b_m$. В любом случае имеем $a_k \le b_m$, т. е. $a \le b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$. В силу аксиомы непрерывности действительных чисел $\exists c \in \mathbb{R} : \quad a \le c \le b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$. Следовательно, $c \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$, т. е. c – общая точка отрезков $[a_n, b_n]$.

∎

Определение. Последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется *стягивающейся*, если $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков имеет единственную общую точку.

Доказательство. По теореме 1 общая точка существует. Пусть x, y – общие точки стягивающейся последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$. Так как $|y-x| \le b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $|y - x| \le 0$, т. е. $|y - x| = 0$, $y = x$.

∎

■

Следствие. Частичный предел сходящейся последовательности единствен и совпадает с ее пределом.

Теорема 2. (Теорема Больцано–Вейерштрасса.) Ограниченная последовательность имеет хотя бы один конечный частичный предел.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. $\exists a_0, b_0 : \forall n \in I\!N \; x_n \in [a_0, b_0]$. Определим $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Если в отрезке $[a_0, c_0]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, то определим $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$. В противном случае в отрезке $[c_0, b_0]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, тогда определим $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$.

Пусть определен отрезок $[a_k, b_k]$, в котором содержатся значения бесконечного набора членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $c_k = (a_k + b_k)/2$. Если в отрезке $[a_k, c_k]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, то определим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$. В противном случае определим $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$. Так как этот процесс не может оборваться, мы получим последовательность вложенных отрезков, которая по теореме Кантора имеет общую точку $x \in [a_k, b_k]$.

Построим последовательность $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Определим $n_1 = 1$. Пусть определено n_{k-1}. Определим n_k из условий:

1) $n_k > n_{k-1}$,

2) $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$

(такое n_k существует, так как в отрезке $[a_k, b_k]$ содержатся значения бесконечного набора членов $\{x_n\}$, а значит, среди них найдется член с номером $> n_{k-1}$).

Так как $|x - x_{n_k}| \le b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$, то $x_{n_k} \to x$ при $k \to \infty$.

■

Теорема 3. Если $\{x_n\}$ неограниченна снизу, то $-\infty$ является ее частичным пределом; если $\{x_n\}$ неограниченна сверху, то $+\infty$ является ее частичным пределом (при этом могут быть и другие частичные пределы).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ неограниченна сверху. Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Определим $n_1 = 1$. Пусть определено n_{k-1}. Определим n_k из условий: $n_k > n_{k-1}$ и $x_{n_k} > k$. Так как множество $\{x_n : n > n_{k-1}\}$ неограниченно, то такое n_k существует. Поскольку $x_{n_k} > k \to +\infty$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. Случай, когда $\{x_n\}$ неограниченна снизу, рассматривается аналогично.

■

Итак, любая подпоследовательность имеет конечный или бесконечный частичный предел.

Определим точные грани подмножества расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение. *Точными гранями множества* $L \subset \overline{\mathbb{R}}$ называются

$$\inf L = \begin{cases} -\infty, & \text{если} \quad -\infty \in L, \\ \inf L_0, & \text{если} \quad -\infty \notin L, \end{cases}$$

$$\sup L = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad +\infty \in L, \\ \sup L_0, & \text{если} \quad +\infty \notin L, \end{cases}$$

где $L_0 = L \bigcap \mathbb{R}$.

Определение. Пусть $L \subset \overline{\mathbb{R}}$ – множество всех конечных и бесконечных (со знаком) частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Тогда *нижним* и *верхним пределами* последовательности $\{x_n\}$ называются соответственно

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf L, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup L.$$

Задача. Доказать, что если $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Задача. Доказать, что верхний и нижний пределы последовательности являются ее частичными пределами.

Задача. Доказать, что $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N : \quad a_n \in U_\varepsilon(A).$$

§ 10. Критерий Коши

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ – *фундаментальна* или *удовлетворяет условию Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n, m > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Лемма 1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходится к числу x. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad |x_n - x| < \varepsilon/2$$

и, следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n, m > N$$

$$|x_n - x_m| \le |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

■

Лемма 2. Фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальна. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N: \quad \forall n, m > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$, следовательно, $\forall n > N \quad |x_{N+1} - x_n| < 1$. Определим $M = \max\{|x_1|, ..., |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \le M$.

■

Теорема 1. (Критерий Коши.)
$\{x_n\}$ – сходится $\iff$ $\{x_n\}$ – фундаментальна.

Доказательство. Если $\{x_n\}$ сходится, то по лемме 1 она фундаментальна. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальна. По лемме 2 $\{x_n\}$ – ограничена, следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}: \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in \mathbb{R}$.

Из фундаментальности $\{x_n\}$ следует

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \quad \forall n, m > N_\varepsilon \quad |x_n - x_m| < \varepsilon/2. \qquad (1)$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, то $\exists K_\varepsilon: \quad \forall k > K_\varepsilon \quad n_k > N_\varepsilon$. Следовательно, применяя (1) для $m = n_k > N_\varepsilon$, получим $\forall n > N_\varepsilon \quad \forall k > K_\varepsilon \quad |x_n - x_{n_k}| < \varepsilon/2$.

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, то $\lim\limits_{k\to\infty} |x_n - x_{n_k}| = |x_n - x|$, для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу теоремы о предельном переходе в неравенствах следует, что $\forall n > N_\varepsilon \quad |x_n - x| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \quad \forall n > N_\varepsilon \quad |x_n - x| < \varepsilon,$$