§ 5. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Теорема 1. (Непрерывность интеграла как функции верхнего предела.) Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая по Риману функция $f(x)$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. В силу необходимого условия интегрируемости функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, т. е.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq C.$$

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$. В силу свойства аддитивности интеграла относительно отрезков интегрирования $F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$. По теореме об интегрировании неравенств $|F(x_2) - F(x_1)| \leq \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} C\,dt\right| = C\,|x_2 - x_1|$. Следовательно,

$$\forall x_0 \in [a, b] \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} : \forall x \in [a, b]$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

■

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на $[a, b]$, если $\forall x \in (a, b) \quad F'(x) = f(x)$, а на концах отрезка $[a, b]$ значения функции f равны односторонним производным функции F: $f(a) = F'_+(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$, $\quad f(b) = F'_-(b) = \lim\limits_{x \to b-0} \frac{F(x) - F(b)}{x - b}$.

Теорема 2. Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $x, x_0 \in [a,b]$, $x \neq x_0$.

Тогда $F(x) - F(x_0) = \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt = (x - x_0)\,f(x_0) + \int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt$. Следовательно,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int\limits_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\int\limits_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt.$$

В силу непрерывности функции f на $[a,b]$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall t \in [a,b] \quad |t - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon,$$

поэтому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in [a,b] \quad |x - x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt \leq |x - x_0|\,\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon,$$

т. е. $\forall x_0 \in [a,b] \quad \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, где при $x_0 = a$ имеется в виду предел справа, а при $x_0 = b$ – предел слева. Это означает, что $\forall x_0 \in (a,b) \quad F'(x_0) = f(x_0), \quad F'_+(a) =$

$f(a)$, $\quad F'_-(b) = f(b)$. Таким образом, функция F является первообразной функции f на $[a, b]$.

■

Из теоремы 2 и теоремы главы 4 о структуре множества первообразных получаем

Следствие 1. Любая первообразная непрерывной на $[a, b]$ функции f имеет вид

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C,$$

где $C \in \mathbb{R}$ – произвольная константа.

Следствие 2. (Формула Ньютона–Лейбница.) Если F – первообразная непрерывной на $[a, b]$ функции f, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\Big|_a^b \quad \overset{\text{по опред.}}{=} \quad F(b) - F(a).$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 1 и заметим, что $F(a) = \int\limits_a^a f(t)\,dt + C = C$, $\quad F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt + C =$ $= \int\limits_a^b f(t)\,dt + F(a)$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

■

Теорема 3. (Замена переменной.) Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$, а функция f непрерывна на отрезке $\varphi([a, b])$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$