§ 3. Степенные ряды

Определение. Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ и комплексное число w_0. Комплексный функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(w-w_0)^k$ с комплексной переменной w называется *степенным рядом.*

Введение комплексной переменной $z = w - w_0$ сводит ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(w - w_0)^k$ к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Имея в виду эту замену переменной, в дальнейшем будем рассматривать степенные ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

Определение. *Радиусом сходимости* степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ называется $R \in [0, +\infty) \bigcup \{+\infty\}$, определяемое по формуле Коши–Адамара:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} \tag{1}$$

(при этом будем полагать, что $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Круг на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом R называется *кругом сходимости* степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Если $R = +\infty$, то кругом сходимости считается вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

Теорема 1. (О круге сходимости степенного ряда.) Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

1) абсолютно сходится внутри круга сходимости (т. е. на множестве $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$),

2) расходится вне круга сходимости (т. е. на множестве $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$),

3) на границе круга сходимости (т. е. на множестве $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$) может сходиться, а может и расходиться. (Здесь R – радиус сходимости степенного ряда).

Доказательство. Зафиксируем произвольное комплексное число $z \neq 0$ и исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ с помощью обобщенного признака Коши. Определим

$$q = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{|z|}{R}$$

(где при $R = 0$, $|z| > 0$ следует положить $q = +\infty$).

1) При $z = 0$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ состоит из нулей, а значит, сходится. Если $0 < |z| < R$, то $q < 1$ и в силу обобщенного признака Коши ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ сходится, т. е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится абсолютно.

2) Если $|z| > R$, то $q > 1$ и в силу обобщенного признака Коши члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не стремятся к нулю, следовательно, не стремятся к нулю и члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, а значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ расходится. (Заметим, что из расходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, и поэтому важно, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ не только расходится, но и его члены не стремятся к нулю).

3) Рассмотрим, например, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1}$.

По формуле Коши–Адамара для радиуса сходимости R
$\frac{1}{R} = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{-\ln(k+1)/k} = e^0 = 1.$

При $z = 1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ и, как показано в § 2 главы 9, расходится. При $z = -1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ Этот ряд сходится в силу признака Лейбница (теорема 4 § 3 главы 9).

■

Замечание. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ можно находить по формуле Коши–Адамара (1). В частности, если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$, то $\frac{1}{R} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$. Следующая лемма показывает, что радиус сходимости степенного ряда можно определять из формулы

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}. \tag{2}$$

Последняя формула удобнее в тех случаях, когда коэффициенты c_k выражаются через факториал.

Лемма 1. Пусть для степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$. Тогда для радиуса сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ справедлива формула (2).

Доказательство. Определим $R_1 \in [0, +\infty) \bigcup \{+\infty\}$ из условия $\frac{1}{R_1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$ и исследуем сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ с помощью признака Даламбера в предельной форме (следствие из теоремы 4 § 2 главы 9). Определим

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}\, z^{k+1}|}{|c_k\, z^k|} = \frac{|z|}{R_1}.$$

Согласно признаку Даламбера, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ сходится при $q < 1$, т. е. при $|z| < R_1$, и расходится при $q > 1$, т. е. при $|z| > R_1$.

Пусть R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. В силу теоремы 1 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Следовательно, $R_1 = R$ и $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}$.

■

Теорема 2. (О равномерной сходимости степенного ряда.) Пусть $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Тогда для любого числа $r \in (0, R)$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится равномерно в круге $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$.

Доказательство. Заметим, что $\forall z \in Z\ \forall k \in \mathbb{N}\quad |c_k z^k| \le |c_k|\, r^k$. Поскольку $|r| = r < R$, то в силу теоремы 1 числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k r^k|$ сходится. Отсюда и из признака Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного ряда (теорема 1 § 2) следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ на множестве Z.

■

Замечание. В самом круге сходимости, т. е. на множестве $Z = z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < R$ степенной ряд может сходиться неравномерно. Например, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ имеет радус сходимости $R = 1$, но на множестве $Z = z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1$ этот ряд сходится неравномрно, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Действительно, $\sup\limits_{z \in Z} |z^k| = 1 \not\to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, $z^k \underset{Z}{\not\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$.

Теорема 3. Радиусы сходимости степенных рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^{k-1}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$, полученных формальным почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$, совпадают с радиусом сходимости исходного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$.

Доказательство. Покажем сначала, что радиус сходимости R_1 ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, k\, z^k$ равен радиусу сходимости R исходного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$. В силу формулы Коши–Адамара

$$\frac{1}{R_1} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|\, k} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\ln k/k} = e^0 = 1$.)

Следовательно, $R_1 = R$.

Покажем теперь, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, k\, z^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^k$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^{k-1}$ сходятся или расходятся одновременно. При $z = 0$ эти ряды, очевидно, сходятся. Пусть $z \neq 0$. Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\, k\, z^k$, $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\, k\, z^{k-1}$. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{z} = \frac{S}{z} \in \mathbb{C}$. Обратно, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \widetilde{S} \in \mathbb{C}$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = z\,\widetilde{S}$.

Следовательно, радиус сходимости R_1 ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^k$ равен радиусу сходимости R_2 ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, z^{k-1}$. Итак, $R_2 = R_1 = R$, т. е. при почленном дифференцировании степенного ряда его радиус сходимости не изменяется.

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$ получается при почленном дифференцировании ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$, то радиусы сходимости этих рядов также совпадают.

■

Далее мы будем рассматривать вещественные степенные ряды вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k$. Поскольку вещественный степенной ряд можно рассматривать как комплексный степенной ряд, то радиус сходимости R ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k$ можно определять из формулы Коши–Адамара или из леммы 1. Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется интервалом сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k$.

Теорема 4. Пусть вещественный степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k = f(x)$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Тогда

1) для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ справедлива формула почленного интегрирования степенного ряда:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1};$$

2) в интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ функция f имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((x - x_0)^k\right)^{(n)} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R); \quad (3)$$

3) коэффициенты степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x)$ однозначно определяются по функции $f(x)$ с помощью формулы $\quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Доказательство. 1) Для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ определим число $r \in (0, R)$ из условия $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. В силу теоремы о равномерной сходимости степенного ряда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (t - x_0)^k$ равномерно сходится на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. Отсюда по теореме о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда (теорема 4 § 3 главы 10) следует, что

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_{x_0}^{x} (t - x_0)^k\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}.$$

2) Покажем, что для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ существует конечная производная $f'(x)$, причем $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, k\, (x - x_0)^{k-1}$. Зафиксируем произвольное $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ и определим число $r \in (0, R)$ из условия $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

В силу теоремы 3 радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, k\, (t - x_0)^{k-1}$, полученного почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k$, равен R. Отсюда, из неравенства $r < R$ и теоремы о равномерной сходимости степенного ряда следует, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. Поэтому в силу теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда (теорема 6 § 3 главы 10) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (t-x_0)^k$ можно дифференцировать почленно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. В частности, существует $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, k\, (x-x_0)^{k-1}$. Следовательно, при $n = 1$ справедлива формула (3).

Проводя те же рассуждения для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, k\,(x - x_0)^{k-1} = f'(x)$, получим формулу (3) при $n = 2$ и так далее. По индукции получим, что формула (3) справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$, что доказывает второе утверждение теоремы.

3) Заметим, что

$$((x-x_0)^k)^{(n)} =$$

$$= \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)\,(x-x_0)^{k-n}, & \text{если} \quad k \geq n, \\ 0, & \text{если} \quad k < n, \end{cases}$$

следовательно, в точке $x = x_0$: $((x - x_0)^k)^{(n)} = \begin{cases} n!, & \text{если} \quad k = n, \\ 0, & \text{если} \quad k \neq n. \end{cases}$

Отсюда и из формулы (3) следует, что $f^{(n)}(x_0) = a_n\, n!$, что доказывает утверждение третьего пункта теоремы.

■

§ 4. Ряд Тейлора

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно* *дифференцируемой* в точке x_0, если в этой точке существуют производные любого порядка функции f.

Определение. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение. Функция $f(x)$ называется *аналитической* в точке x_0, если она бесконечно дифференцируема в этой точке и ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Замечание. Из пункта (3) теоремы 4 § 3 следует, что если функция $f(x)$ может быть представлена как сумма степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ с радиусом сходимости $R > 0$, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0. В этом случае функция f является аналитической в точке x_0.

Замечание. Ряд Тейлора в точке x_0 бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ может сходиться в любой окрестности точки x_0 не к функции $f(x)$, а к некоторой другой функции. В этом случае функция $f(x)$ не является аналитической в точке x_0.

Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{если} \quad x=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Заметим, что $\quad \forall k\in I\!N \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^k}e^{-1/x^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{k/2}\,e^{-t}=$ $=0.$

Отсюда следует, что

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0, \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{4}{x^6}-\dfrac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

По индукции легко показать, что

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_{3n}(1/x)\,e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0, \end{cases}$$

где $P_{3n}(t)$ – многочлен степени $3n$ от t.

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0=0$ равны нулю. Поэтому сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 равна нулю и не совпадает с функцией $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки x_0. Таким образом, хотя функция (1) бесконечно дифференцируема, она не является аналитической в точке $x_0=0$.

Напомним, что остаточным членом формулы Тейлора n раз дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$r_n(x)=f(x)-S_n(x), \quad \text{где} \quad S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Замечание. Остаточный член фомулы Тейлора не всегда совпадает с остатком ряда Тейлора. Например, для функции (1) $S_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{R}$, поэтому остаток ряда Тейлора тождественно равен нулю, а остаточный член формулы Тейлора $r_n(x) = f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$.

Непосредственно из определений следует, что функция $f(x)$ является аналитической в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \qquad \lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0. \tag{2}$$

Как показывает пример функции (1), для доказательства аналитичности функции недостаточно показать, что радиус сходимости ряда Тейлора этой функции $R > 0$. Нужно проверить условие (2).

§ 5. Ряды Тейлора для показательной, гиперболических и тригонометрических функций

Определение. Ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ называется *рядом Маклорена* этой функции.

Теорема 1. Ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$ сходится к этой функции на всей числовой прямой:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$