на кривой Γ^+ можно получить любую точку $\vec{R}_0 = F(\vec{r}_0)$ на кривой $F(\Gamma^+)$, то кривая $F(\Gamma^+)$ ориентирована положительно относительно области $F(G)$. Аналогично в случае отрицательного якобиана, кривая $F(\Gamma^+)$ ориентирована отрицательно относительно области $F(G)$.

Покажем, что других случаев не бывает. Если якобиан $J_F(u,v)$ принимает в области Ω значения различных знаков, то по теореме о промежуточном значении для функции многих переменных, непрерывной на связном множестве, якобиан $J_F(u,v)$ должен обращаться в нуль в некоторой точке области Ω, что противоречит условиям теоремы. $\square$

§ 8. Формула Грина

Напомним определение криволинейного интеграла второго рода, введенного в § 7 главы 7. Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n \ : \ t \in [a,b]\}$ задана непрерывной вектор-функцией $\vec{r}(t)$, имеющей кусочно-непрерывную производную, а вектор-функция $\vec{f}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^n$ непрерывна на множестве Γ. Криволинейный интеграл второго рода функции $\vec{f}(\vec{r})$ по кривой Γ определяется формулой

$$\int\limits_{\Gamma} (\vec{f}(\vec{r}), d\vec{r}) = \int\limits_a^b (\vec{f}(\vec{r}(t)), \vec{r}\,'(t))\, dt. \tag{1}$$

Выражение, записанное в левой части этой формулы является обозначением криволинейного интеграла второго рода, а в правой части данной формулы записан интеграл Римана скалярной функции $\varphi(t) = (\vec{f}(\vec{r}(t)), \vec{r}\,'(t))$ по отрезку $[a,b]$. Здесь через $(\vec{f}(\vec{r}(t)), \vec{r}\,'(t))$ обозначено скалярное произведение векторов $\vec{f}(\vec{r}(t))$ и $\vec{r}\,'(t)$.

Как было доказано ранее, криволинейный интеграл второго рода не зависит от параметризации, а при изменении ориентации кривой меняет знак. Отметим, что из свойства аддитивности интеграла Римана по отрезку и формулы (1) следует свойство аддитивности криволинейного интеграла по кривой:
если кривая Γ составлена из кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, ориентированных в соответствии с ориентацией кривой Γ, то

$$\int\limits_{\Gamma} (\vec{f}(\vec{r}), d\vec{r}) = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Gamma_i} (\vec{f}(\vec{r}), d\vec{r}).$$

Для криволинейного интеграла по плоской кривой $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} : t \in [a,b] \right\}$ от вектор-функции $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ формула (1) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \Big(P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t) \Big)\, dt.$$

В частности, если кривая Γ является графиком функции $y(x)$, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$, то

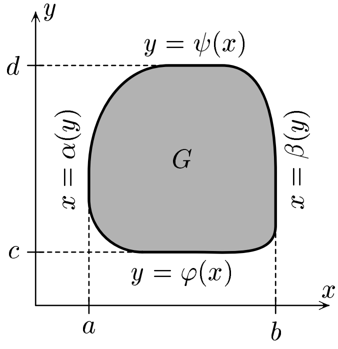
$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\, dx = \int\limits_{a}^{b} P(x, y(x))\, dx. \qquad (2)$$

Заметим, что для существования интеграла $\int\limits_{a}^{b} P(x, y(x))\, dx$ достаточно требовать непрерывность функции $y(x)$ на $[a,b]$ и непрерывность функции $P(x,y)$ на множестве $\Gamma = \{(x, y(x)) : \ x \in [a,b]\}$. Поэтому в случае, когда кривая Γ является графиком непрерывной (а не обязательно непрерывно дифференцируемой) функции, криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\, dx$ будем понимать в смысле формулы (2). Как показано выше, в случае непрерывной дифференцируемости функции $y(x)$ это определение совпадает с общим определением криволинейного интеграла второго рода.

Аналогично, если кривая $\Gamma = \{(x(y), y) : \ y \in [c,d]\}$ является графиком функции $x(y)$, непрерывной на отрезке $[c,d]$, а функция $Q(x,y)$ непрерывна на множестве Γ, то определим

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x,y)\, dy = \int\limits_{c}^{d} Q(x(y), y)\, dy.$$

Определение. Будем говорить, что область $G \subset \mathbb{R}^2$ *элементарна*, если она элементарна относительно каждой из координатных осей, т. е. существуют функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, непрерывные на $[a, b]$, и функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$, непрерывные на $[c, d]$, такие, что



$$\varphi(x) < \psi(x) \quad \forall x \in (a, b),$$

$$\alpha(y) < \beta(y) \quad \forall y \in (c, d)$$

и

$$G = \{(x, y) : \ x \in (a, b), \, \varphi(x) < y < \psi(x)\} =$$
$$= \{(x, y) : \ y \in (c, d), \, \alpha(y) < x < \beta(y)\}.$$

Теорема 1. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^2$ элементарна и ее границей является кусочно-гладкая кривая ∂G^+, ориентированная положительно относительно области G. Пусть в замыкании области G заданы непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Тогда справедлива *формула Грина*:

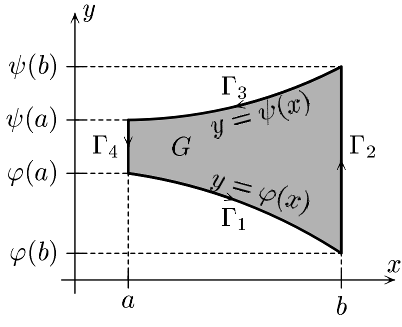
$$\int\limits_{\partial G^+} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx\, dy.$$

Доказательство. Докажем сначала формулу

$$\int\limits_{\partial G^+} P(x, y)\, dx = -\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Разобъем кривую ∂G^+ на кривые

$$\Gamma_1 = \{(x, \varphi(x)) \ : \ x \in [a, b]\},$$
$$\Gamma_2 = \{(b, y) \ : \ y \in [\varphi(b), \psi(b)]\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x, \psi(x)) \ : \ x \in [a, b]\},$$
$$\Gamma_4 = \{(a, y) \ : \ y \in [\varphi(a), \psi(a)]\}.$$



Поскольку координата x на отрезках Γ_2 и Γ_4 не меняется, то криволинейные интегралы $\int P(x,y)\,dx$ по этим кривым равны нулю. Кривая Γ_1 имеет ориентацию, соответствующую ориентации кривой ∂G^+, а кривая Γ_3 – противоположную ориентацию. Следовательно, в силу аддитивности криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\partial G^+} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)\,dx - \int\limits_{\Gamma_3} P(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\psi(x))dx = -\int\limits_a^b \Big(P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\Big)\,dx.$$

Из формулы Ньютона–Лейбница следует, что

$$P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy.$$

Отсюда и из теоремы о сведении кратного интеграла к повторному получаем

$$\int\limits_{\partial G^+} P(x,y)\,dx = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy = -\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Формула

$$\int\limits_{\partial G^+} Q(x,y)\,dy = \iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy \tag{4}$$

доказывается аналогично. Складывая формулы (3) и (4), получаем формулу Грина. $\square$

Теорема 2. Пусть

1) область $G \subset \mathbb{R}^2$ может быть представлена как объединение конечного числа непересекающихся элементарных областей G_i ($i = 1,\ldots,I$) с кусочно-гладкими границами и кривых γ_j ($j = 1,\ldots,J$), лежащих на внутренних (по отношению к области G) границах областей G_i;

2) граница ∂G^+ области G состоит из конечного числа простых замкнутых кусочно-гладких кривых Γ_k^+ $(k = 1, \ldots, K)$, ориентированных положительно относительно области G;

3) пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы на замыкании области G.

Тогда справедлива формула Грина:

$$\int\limits_{\partial G^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,dx\,dy, \quad (5)$$

где

$$\int\limits_{\partial G^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Gamma_k^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

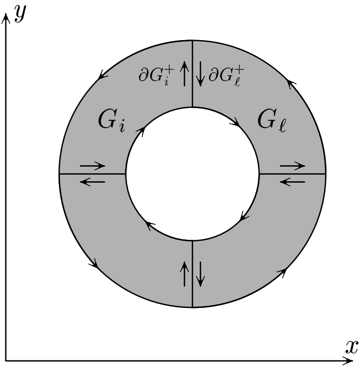
Доказательство. Применяя теорему 1 к элементарным областям G_i, из которых состоит область G, получаем

$$\int\limits_{\partial G_i^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,dx\,dy.$$

Поскольку кусочно-гладкие кривые γ_j, лежащие на внутренних границах областей G_i, имеют меру нуль, то кратный интеграл по внутренним границам областей G_i равен нулю. Следовательно, в силу аддитивности кратного интеграла

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{I} \int\limits_{\partial G_i^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \\ = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,dx\,dy.\end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что если кривая γ_j лежит на границе соседних областей G_i и G_ℓ, то положительная ориентация этой кривой относительно области G_i противоположна положительной ориентации этой же кривой относительно области G_ℓ.



Следовательно, интегралы по кривой γ_j войдут в слагаемые $\int\limits_{\partial G_i^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ и $\int\limits_{\partial G_\ell^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ с разными знаками и при суммировании взаимно уничтожатся. В результате в левой части формулы (6) останутся только интегралы по кривым, лежащим на границе области G, что дает формулу (5). $\square$

Замечание. Формула Грина справедлива и для области, которую нельзя представить как объединение конечного числа элементарных областей и частей их границ, т. е. вместо условия (1) теоремы 2 достаточно требовать измеримость области G. Доказательство соответствующей теоремы довольно трудоемко, и мы его приводить не будем. Тем более что в практических задачах области, не удовлетворяющие условию (1) теоремы 2, обычно не встречаются.

Следствие. (Вычисление площади с помощью криволинейного интеграла.) Пусть область $G \subset \mathbb{R}^2$ ограничена, а ее граница ∂G^+ состоит из конечного числа простых замкнутых кусочно-гладких кривых Γ_k^+ $(k = 1, \ldots, K)$, ориентированных положительно относительно области G. Тогда площадь (мера Жордана) области G равна следующим криволинейным интегралам:

$$\mu(G) = \int\limits_{\partial G^+} x\,dy = -\int\limits_{\partial G^+} y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G^+} x\,dy - y\,dx.$$

Доказательство. Применяя формулу Грина для $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = x$, получим $\int\limits_{\partial G^+} x\,dy = \iint\limits_{G} dx\,dy = \mu(G)$. Равенство $\mu(G)$ остальным криволинейным интегралам доказывается аналогично. $\square$