3) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = [\nabla \times \nabla\varphi] = [\nabla \times \nabla]\varphi = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi =$ $= \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi + \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi$. Пользуясь тем, что смешанные производные дважды непрерывно дифференцируемой функции не зависят от порядка дифференцирования, получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \overline{0}.$$

4) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = (\nabla, [\nabla \times \vec{a}]) = (\nabla, \nabla, \vec{a}) = 0$.

Здесь мы опять воспользовались тем, что компоненты вектора ∇ можно переставлять местами, если эти компоненты применяются к дважды непрерывно дифференцируемой функции, в силу чего с оператором ∇ можно работать как с обычным вектором и, в частности, $[\nabla \times \nabla] = \overline{0}$.

5) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = (\nabla, \nabla)\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi$.

§ 5. Формула Остроградского–Гаусса

Определение. Множество называется *элементарным*, если оно элементарно относительно каждой координатной оси (см. определение в § 3 главы 14).

Теорема 1. Пусть векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ непрерывно дифференцируемо в замыкании элементарной области $G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$, граница которой ∂G^+ является кусочно-гладкой поверхностью, ориентированной полем внешних нормалей. Тогда справедлива *формула Остроградского–Гаусса*:

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G^+} (\vec{a}(x,y,z), d\vec{S}). \qquad (1)$$

Доказательство. Формулу Остроградского–Гаусса, опуская аргументы, можно переписать в виде

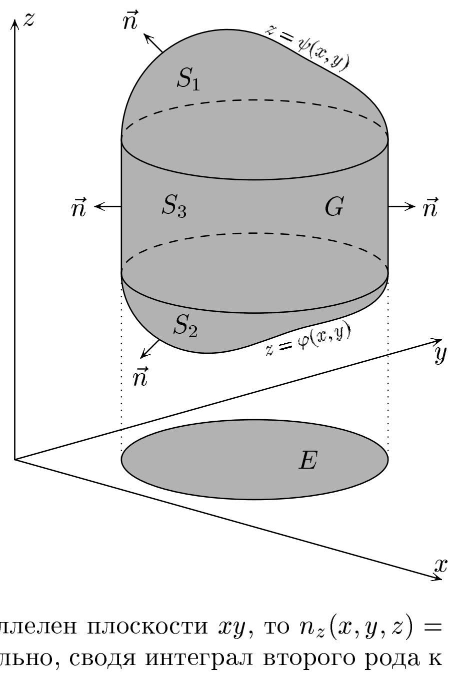
$$
\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \\
= \iint\limits_{\partial G^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{2}
$$

Докажем равенство

$$
\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G^+} R(x,y,z)\,dx\,dy. \tag{3}
$$

В силу элементарности области G относительно оси z существуют измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ и функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, непрерывные на замыкании множества E и такие, что $\varphi(x,y) < \psi(x,y)$ $\forall(x,y) \in E$ и

$$
G = \{(x,y,z) \;:\; (x,y) \in E,\ \varphi(x,y) < z < \psi(x,y)\}.
$$



Поэтому поверхность "криволинейного цилиндра" G состоит из трех частей: "верхнего основания"

$$
S_1 = \{(x,y,\psi(x,y)) \colon\ (x,y) \in \overline{E}\},
$$

"нижнего основания"

$$
S_2 = \{(x,y,\varphi(x,y)) \colon\ (x,y) \in \overline{E}\}
$$

и "боковой поверхности"

$$
S_3 = \{(x,y,z) \;:\; (x,y) \in \partial E,\\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}.
$$

Поскольку вектор нормали $\vec{n}(x,y,z) = \begin{pmatrix} n_x(x,y,z) \\ n_y(x,y,z) \\ n_z(x,y,z) \end{pmatrix}$ к "боковой поверхности" S_3 параллелен плоскости xy, то $n_z(x,y,z) = 0$ при $(x,y,z) \in S_3$, следовательно, сводя интеграл второго рода к интегралу первого рода, получаем

$$\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\,n_z(x,y,z)\,dS = 0.$$

Пользуясь определением 2 для поверхностных интегралов второго рода по верхней стороне поверхности S_1 и нижней стороне поверхности S_2, получаем

$$\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{E} R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\,dx\,dy = -\iint\limits_{E} R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\partial G^+} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\,dx\,dy +$$

$$+\iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{E} \Big(R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\Big)\,dx\,dy.$$

Пользуясь формулой Ньютона–Лейбница, получаем

$$\iint\limits_{\partial G^+} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{E} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz.$$

Отсюда и из теоремы о сведении кратного интеграла к повторному следует формула (3).

Аналогично, пользуясь элементарностью области G относительно осей x и y, можно получить равенства

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G^+} P(x,y,z)\,dy\,dz, \qquad (4)$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G^+} Q(x,y,z)\,dz\,dx. \tag{5}$$

Складывая равенства (3) – (5), получаем формулу Остроградского–Гаусса (2). $\square$

Теорема 2. Пусть

1) область G можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся элементарных областей G_i $(i = 1, \ldots, I)$ и кусочно-гладких поверхностей S_j $(j = 1, \ldots, J)$, лежащих на границах областей G_i;

2) граница ∂G^+ области G является кусочно-гладкой поверхностью, ориентированной полем внешних нормалей;

3) векторное поле $\vec{a}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемо в замыкании области G.

Тогда справедлива формула Остроградского–Гаусса (1).

Доказательство. В силу теоремы 1 для каждой элементарной области G_i справедлива формула Остроградского–Гаусса

$$\iiint\limits_{G_i} \operatorname{div} \vec{a}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G_i^+} (\vec{a}(x,y,z), d\vec{S}), \quad i \in \{1, \ldots, I\}.$$

Поскольку элементарные области G_i измеримы, то $\mu(\partial G_i) = 0$. Отсюда и из условия $G \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{I} G_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} \partial G_i$ следует, что $\mu\left(G \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{I} G_i\right) = 0$ и в силу аддитивности кратного интеграла

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{a}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \sum_{i=1}^{I} \iiint\limits_{G_i} \operatorname{div} \vec{a}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{I} \iint\limits_{\partial G_i^+} (\vec{a}(x,y,z), d\vec{S}). \tag{6}$$

Через $S_{i\ell}^+$ обозначим общую границу соседних элементарных областей G_i и G_ℓ, ориентированную полем нормалей, внешних по отношению к области G_i. Тогда ориентации поверхностей $S_{i\ell}^+$ и $S_{\ell i}^+$ взаимно противоположны и, следовательно,

$$\iint\limits_{\partial S_{i\ell}^{+}} (\vec{a}(x,y,z), d\vec{S}) = -\iint\limits_{\partial S_{\ell i}^{+}} (\vec{a}(x,y,z), d\vec{S}).$$

Поэтому при суммировании интегралов по поверхностям $\partial G^{+}{}_i$ интегралы по общим границам соседних областей взаимно уничтожаются и остается интеграл по границе области G. Таким образом, из формулы (6) следует формула Остроградского–Гаусса для области G. $\square$

Отметим без доказательства, что формула Остроградского–Гаусса справедлива и для области G, которую нельзя представить как объединение конечного числа элементарных областей и частей их границ, т. е. вместо условия (1) теоремы 2 достаточно требовать измеримость области G.

Теорема 3. (Геометрическое определение дивергенции.) Пусть векторное поле $\vec{a}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемо в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть $\vec{r}_0 \in \Omega$, S_δ^{+} – сфера радиуса δ с центром в точке $\vec{r}_0$, ориентированная полем внешних нормалей, а $V_\delta = \mu(U_\delta(\vec{r}_0)) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$ – объем шара $U_\delta(\vec{r}_0)$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}_0) = \lim_{\delta\to+0} \frac{1}{V_\delta} \iint\limits_{S_\delta^{+}} (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{S}).$$

Доказательство. Из непрерывной дифференцируемости поля $\vec{a}(\vec{r})$ следует непрерывность функции $\operatorname{div} \vec{a}(\vec{r})$, поэтому

$$\varepsilon(\delta) = \sup_{\vec{r}\in U_\delta(\vec{r}_0)} |\operatorname{div} a(\vec{r}) - \operatorname{div} a(\vec{r}_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Следовательно,

$$\left| \iiint\limits_{U_\delta(\vec{r}_0)} \operatorname{div} \vec{a}(\vec{r})\, dx\, dy\, dz - V_\delta \ \operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}_0) \right| =$$

$$= \left| \iiint\limits_{U_\delta(\vec{r}_0)} (\operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}) - \operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}_0))\, dx\, dy\, dz \right| \le \iiint\limits_{U_\delta(\vec{r}_0)} \varepsilon(\delta)\, dx\, dy\, dz = V_\delta\, \varepsilon(\delta).$$

Из теоремы Остроградского–Гаусса получаем, что

$$\iiint\limits_{U_\delta(\vec{r}_0)} \operatorname{div} \vec{a}(\vec{r})\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{S_\delta^+} (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{S}).$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{V_\delta} \iint\limits_{S_\delta^+} (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{S}) - \operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}_0) \right| \le \varepsilon(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \qquad \square$$

Замечание. Поскольку поток $\iint\limits_{S_\delta^+} (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{S})$ не зависит от системы координат, то в силу теоремы 3 дивергенция векторного поля не зависит от системы координат.

Определение. Будем говорить, что поверхность S *ограничивает* область $G \subset \mathbb{R}^3$, если
1) $S = \partial G$ и
2) G – ограниченное множество.

Определение. Поверхность называется *замкнутой*, если она ограничивает некоторую область.

Определение. Непрерывное векторное поле $\vec{a}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ называется *соленоидальным* в области Ω, если поток поля $\vec{a}$ через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность S, лежащую в области Ω, равен нулю:

$$\iint\limits_{S} (\vec{a}(x, y, z), d\vec{S}) = 0 \qquad \forall \quad \text{замкн., кус.-глад.} \quad S \subset \Omega.$$

Определение. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется *объемно односвязной*, если для любой замкнутой поверхности $S \subset \Omega$ область G, ограниченная поверхностью S, содержится в Ω.

Образно говоря, объемная односвязность области Ω означает, что область Ω не имеет "внутренних полостей".

Теорема 4. Пусть векторное поле $\vec{a}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемо в области Ω. Тогда условие

$$\operatorname{div} \vec{a}(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in \Omega \tag{7}$$

является необходимым, а в случае объемной односвязности области Ω – и достаточным условием соленоидальности поля $\vec{a}$.

Доказательство. 1) Необходимость условия (7) для соленоидальности поля $\vec{a}$ следует непосредственно из теоремы 3.

2) Пусть выполнено условие (7) и область Ω объемно односвязна. Пусть замкнутая кусочно-гладкая поверхность S ограничивает область G. Тогда в силу объемной односвязности области Ω $\quad G \subset \subset \Omega$, поэтому $\operatorname{div} \vec{a}(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in G$. Отсюда и из формулы Остроградского–Гаусса следует, что поток поля $\vec{a}$ через поверхность S равен нулю. $\square$

Замечание. Из условия (7) для объемно неодносвязной области Ω не следует соленоидальность поля $\vec{a}$. Пусть, например, $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ – электрическое поле точечного заряда, $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < |\vec{r}| < 3\}$, $S = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\vec{r}| = 2\}$. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{a} = \left(\nabla, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right) = \frac{1}{|\vec{r}|^3}(\nabla, \vec{r}) + \left(\vec{r}, \nabla \frac{1}{|\vec{r}|^3}\right) =$$

$$= \frac{3}{|\vec{r}|^3} - \left(\vec{r}, \frac{3\nabla|\vec{r}|}{|\vec{r}|^4}\right) = \frac{3}{|\vec{r}|^3} - 3\left(\vec{r}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^5}\right) = 0,$$

т. е. условие (7) выполнено. Однако

$$\iint\limits_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_S \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) dS =$$

$$= \iint\limits_S \frac{dS}{|\vec{r}|^2} = \frac{2^2\, 4\pi}{2^2} = 4\pi \neq 0.$$

§ 6. Формула Стокса

Определение. Криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_\Gamma (\vec{a}(x,y,z), d\vec{r})$ от векторного поля $\vec{a}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ по замкнутой кривой Γ называется *циркуляцией*.