Следствие. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\pi, \pi)$, то коэффициенты Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

стремятся к нулю при $k \to \infty$.

§ 3. Сходимость ряда Фурье в точке

Заметим, что поскольку функции $\sin kx$ и $\cos kx$ 2π-периодичны, то сумма ряда Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ (в случае сходимости ряда) является 2π-периодической функцией. Поэтому периодичность функции $f(x)$ с периодом 2π является необходимым условием сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ к самой функции $f(x)$.

При вычислении интегралов от периодических функций полезно иметь в виду, что интеграл по отрезку, длина которого равна периоду функции, не зависит от расположения этого отрезка.

Лемма 1. Если функция φ периодична с периодом T и интегрируема (в собственном или несобственном смысле) на отрезке длиной T, то интеграл $\int\limits_{d}^{d+T} \varphi(x) \, dx$ не зависит от d.

Доказательство. Поскольку любой отрезок можно покрыть конечным числом отрезков длиной T, то в силу аддитивности интеграла функция φ интегрируема на любом отрезке. Используя периодичность функции φ, получаем

$$\int\limits_{d}^{d+T} \varphi(x) \, dx = \int\limits_{d}^{T} \varphi(x) \, dx + \int\limits_{T}^{d+T} \varphi(x) \, dx =$$

$$= \int\limits_{d}^{T} \varphi(x) \, dx + \int\limits_{0}^{d} \varphi(x) \, dx = \int\limits_{0}^{T} \varphi(x) \, dx. \qquad \square$$

Обратимся к вопросу о сходимости ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье означает сходимость последовательности его частичных сумм

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) . \qquad (1)$$

Лемма 2. Пусть функция $f(x)$ является 2π-периодичной и абсолютно интегрируемой на интервале $(-\pi, \pi)$. Тогда для частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ справедлива формула

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, D_n(t)\, dt,$$

где функция $D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt$ называется *ядром Дирихле* порядка n.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}$. В силу леммы 1 коэффициенты Фурье функции f можно записать в виде

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(u) \cos ku\, du, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(u) \sin ku\, du, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

Следовательно,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku \cos kx + \sin ku \sin kx \right) du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(u-x) \right) du = \frac{1}{\pi} \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)\, D_n(u-x)\, du.$$

Делая замену переменной интегрирования $u \to t = u - x$, получим $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, dt$. Пользуясь четностью ядра Дирихле, имеем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} f(x+t)\,D_n(t)\,dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi} f(x-t)\,D_n(-t)\,dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} (f(x+t)+f(x-t))\,D_n(t)\,dt. \qquad \square$$

Свойства ядра Дирихле.

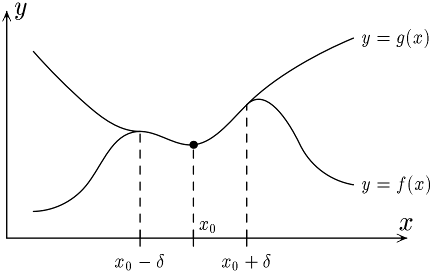
$$(1) \qquad \int\limits_0^\pi D_n(t)\,dt = \tfrac{\pi}{2};$$

$$(2) \qquad D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Доказательство. 1) $\int\limits_0^\pi D_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_0^\pi \cos kt\,dt = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

2) $2\sin\frac{t}{2}\,D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\,\cos kt = \sin\frac{t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t.$ $\square$

Теорема 1. (Принцип локализации.) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ – 2π-периодичны и абсолютно интегрируемы на $(-\pi,\pi)$. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.



Тогда в точке x_0 ряды Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно, а если сходятся – то к одинаковым значениям.

Доказательство. Обозначим через $S_n^f(x)$, $S_n^g(x)$ частичные суммы рядов Фурье функций f и g. В силу леммы 2

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Big(f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)\Big)\, D_n(t)\, dt.$$

По условию теоремы $f(x_0+t) + f(x_0-t) = g(x_0+t) + g(x_0-t)$ при $t \in (0,\delta)$, поэтому

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \Big(f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)\Big)\, D_n(t)\, dt.$$

Пользуясь свойством (2) ядра Дирихле, получаем

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi h(t)\, \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt, \tag{2}$$

где

$$h(t) = \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Из непрерывности функции $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ на отрезке $[\delta,\pi]$ и из абсолютной интегрируемости функции $f(x_0+t)+f(x_0-t)-g(x_0+t)-g(x_0-t)$ по лемме 1 § 1 следует абсолютная интегрируемость функции $h(t)$ на интервале (δ,π). В силу теоремы Римана и формулы (2) получаем $S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Теорема 2. (Признак Ди́ни.) Пусть функция $f(x)$ – 2π-периодична и абсолютно интегрируема на $(-\pi,\pi)$. Пусть в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Пусть существует число $\delta \in (0,\pi)$ такое, что функция

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + f(x_0-t) - f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}$$

абсолютно интегрируема на интервале $(0,\delta)$. Тогда ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к числу $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Доказательство. Из абсолютной интегрируемости функции f на $(-\pi,\pi)$ и непрерывности функции $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ на отрезке $[\delta,\pi]$ по лемме 1 § 1 следует абсолютная интегрируемость функции φ на интервале (δ,π). Отсюда и из условий теоремы получаем, что функция φ абсолютно интегрируема на интервале $(0,\pi)$. В силу теоремы Римана

$$\int\limits_0^\pi \varphi(t)\,\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\;dt \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Из леммы 2 следует, что

$$S_n(x_0) = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Bigg(f(x_0+t) - f(x_0+0) +$$

$$+ f(x_0-t) - f(x_0-0)\Bigg)\,D_n(t)\,dt + \tfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)\,dt.$$

Пользуясь свойствами ядра Дирихле $\int\limits_0^\pi D_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$ и $D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$, получаем

$$S_n(x_0) - \tfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$

$$= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \tfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{t}{2}}\,\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\;dt =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(t)\,\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\;dt \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Следовательно, $S_n(x_0) \to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ при $n\to\infty$. □

Теорема 3. (О сходимости ряда Фурье в точке.) Пусть функция $f(x)$ 2π-периодична и абсолютно интегрируема на $(-\pi,\pi)$. Пусть в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ и конечные односторонние производные

$$f'_+(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{t\to -0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0-0)}{t}.$$

Тогда ряд Фурье функции f в точке x_0 сходится к числу $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, в частности, в случае непрерывности функции f в точке x_0 – к значению $f(x_0)$.

Доказательство. Поскольку

$$\lim_{t\to +0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + f(x_0-t) - f(x_0-0)}{t} = f'_+(x_0) - f'_-(x_0),$$

то для функции $\varphi(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}$ существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t) = \lim\limits_{t\to+0}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \times$ $\times \lim\limits_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t} = 2(f'_+(x_0) - f'_-(x_0))$. Следовательно, функция $\varphi(t)$ ограничена на некотором интервале $(0,\delta)$, где $\delta \in (0,\pi)$. Отсюда и из абсолютной интегрируемости функции f на $(-\pi,\pi)$ следует абсолютная интегрируемость функции φ на $(0,\delta)$. По признаку Дини получаем требуемое утверждение. $\square$

Заметим, что если функция f определена и дифференцируема на интервале (x_0, x_1) и в точке x_0 существуют конечные пределы справа функции f и ее производной, то в точке x_0 правая производная функции f существует и равна правому пределу производной: $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$, где по определению $f'_+(x_0) = \lim\limits_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$, $f'(x_0+0) = \lim\limits_{t\to+0} f'(x_0+t)$. Этот факт следует из теоремы Лагранжа о среднем (глава 3, § 4). Аналогично, если существует $f'(x_0-0) \in \mathbb{R}$, то существует $f'_-(x_0)$ и $f'_-(x_0) = f'(x_0-0)$.

Напомним, что функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a,b]$, если существует разбиение $\{x_i\}_{i=0}^{I}$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = b$ отрезка $[a,b]$ такое, что в любой точке отрезка $[a,b]$, кроме точек x_i, функция f определена и непрерывна, а в точках x_i существуют конечные односторонние пределы $f(x_i+0)$, $i = 0,\ldots,I-1$ и $f(x_i-0)$, $i=1,\ldots,I$. При этом в самих точках x_i функция f может быть неопределена.

Например, если функция f и ее производная f' кусочно-непрерывны на отрезке $[a,b]$, то в точках разрыва функции f ее производная не существует, но существуют односторонние производные, равные односторонним пределам производной.

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $x \in (-\pi, \pi)$ к значению $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$, а в точках $\pm\pi$ – к числу $\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$.

Доказательство. Если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то изменим значение функции f в точке π так, чтобы $f(-\pi) = f(\pi)$. При этом коэффициенты Фурье $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$ не изменятся, а значит, не изменится и ряд Фурье. Продолжим функцию f 2π-периодически на всю числовую ось. Из теоремы 3 следует, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $x_0 \in (-\pi, \pi)$ к значению $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$, а в точках $\pm\pi$ – к числу $\frac{1}{2}(f(\pi+0)+f(\pi-0)) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$. $\square$

Замечание. Существуют непрерывные и 2π-периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках.

Задача. Пусть $\quad Q(x,m) = \sum\limits_{k=m}^{2m-1} \dfrac{\cos kx}{2m-k} + \sum\limits_{k=2m+1}^{3m} \dfrac{\cos kx}{2m-k}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Q(x, 2^{n^2}).$$

Доказать, что функция f непрерывна и 2π-периодична, но ее ряд Фурье не сходится в точке $x=0$.

Ряд Фурье по тригонометрической системе можно записывать в комплексной форме. Используя формулы Эйлера $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, получаем следующее выражение для частичной суммы (1) ряда Фурье функции f:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\, e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}\, e^{-ikx} \right).$$

Вводя обозначения

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad (3)$$

получаем следующее выражение для частичной суммы ряда Фурье:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Поэтому *ряд Фурье* по стандартной тригонометрической системе *в комплексной форме* имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{4}$$

Из равенств (3) и ранее полученных выражений для коэффициентов Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin kx\, dx$$

получаем следующее выражение для коэффициентов Фурье в комплексной форме:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку сходимость ряда Фурье, т. е. сходимость частичных сумм $S_n(x)$, не зависит от их формы записи, то теоремы о сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе справедливы и для ряда (4).

§ 4. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье

Теорема 1. (О почленном дифференцировании ряда Фурье.) Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и выполняется равенство $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ряд Фурье функции $f'(x)$ получается формальным почленным дифференцированием ряда Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Обозначим через a'_k, b'_k коэффициенты Фурье функции $f'(x)$. Интегрируя по частям и учитывая условие $f(-\pi) = f(\pi)$ и четность косинуса, получим

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin kx\, dx = -\frac{1}{\pi k} f(x)\, \cos kx \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} +$$