$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin \lambda u}{u}\, du \overset{t=\lambda u}{=} \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{13}$$

Из формул (11) – (13) следует соотношение (9). Соотношение (10) доказывается аналогично. Из равенств (8) – (10) следует требуемое равенство (7). □

## § 6. Преобразование Фурье

**Определение.** Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Интегралом в смысле главного значения* v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ называется предел интегралов $\int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx$ при $A \to +\infty$:

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx.$$

Заметим, что если существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, то интеграл в смысле главного значения v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ существует и равен интегралу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$. Из существования интеграла v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ не следует существование интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$. Например, v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dx = 0$, но несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dx$ расходится.

Если функция $f(x)$ нечетна и абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то для любого числа $A > 0$ имеем $\int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx = 0$, следовательно, v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$.

**Определение.** Пусть комплекснозначная функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Преобразованием Фурье* функции $f(x)$ называется функция $F[f](y)$, определяемая формулой

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx. \tag{1}$$

Обратным преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция $F^{-1}[f](y)$, определяемая формулой

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx. \tag{2}$$

Если в точке $y \in \mathbb{R}$ не существует интеграл в смысле главного значения, записанный в формуле (1) или (2), то в этой точке $F[f](y)$ или $F^{-1}[f](y)$ соответственно не существует.

Заметим, что если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то, поскольку $|f(x)\, e^{\pm ixy}| = |f(x)|$, несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{\pm ixy}\, dx$ сходятся по признаку Вейерштрасса. В этом случае интегралы в смысле главного значения в формулах (1), (2) существуют и совпадают с обычными несобственными интегралами.

**Теорема 1.** Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции есть функция непрерывная.

**Доказательство.** Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{gathered} F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \cos xy\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \sin xy\, dx \right). \end{gathered} \tag{3}$$

Покажем непрерывность функции $g(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \cos xy\, dx$.

Поскольку интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то

$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0 :\ \forall y \in \mathbb{R} \hookrightarrow$

$$\hookrightarrow\ \left| g(y) - \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,\cos xy\,dx \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{-A} f(x)\,\cos xy\,dx + \int\limits_{A}^{+\infty} f(x)\,\cos xy\,dx \right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{-A} |f(x)|\,dx + \int\limits_{A}^{+\infty} |f(x)|\,dx \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Из формулы $\cos t_1 - \cos t_2 = -2\sin\frac{t_1-t_2}{2}\,\sin\frac{t_1+t_2}{2}$ следует, что $|\cos t_1 - \cos t_2| \le 2\sin\frac{|t_1-t_2|}{2} \le |t_1 - t_2|$, поэтому

$$|g(y_1) - g(y_2)| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \left| \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,(\cos xy_1 - \cos xy_2)\,dx \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{-A}^{A} |f(x)|\,|xy_2 - xy_1|\,dx \le \frac{\varepsilon}{2} + A\,|y_2 - y_1| \int\limits_{-A}^{A} |f(x)|\,dx.$$

Определив число $\delta > 0$ так, что $A\delta \int\limits_{-A}^{A} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$, получим, что для любых $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $|y_2 - y_1| < \delta$, справедливо неравенство $|g(y_2) - g(y_1)| < \varepsilon$. Следовательно, функция $g(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\cos xy\,dx$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Непрерывность функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\sin xy\,dx$ доказывается аналогично. В силу формулы (3) получаем непрерывность преобразования Фурье функции $f(x)$. $\square$

**Теорема 2.** Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = F\Big[F^{-1}[f]\Big](x) = I_f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Поскольку функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то $F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ity}\,dt$, следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{y\,\sin xy}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\ e^{-|x|}\,\mathrm{sign}\,x.$$

**Теорема 4.** (Преобразование Фурье производной.) Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$, а ее производная $f'(x)$ абсолютно интегрируема и кусочно-непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда

$$F[f'](y) = iy\,F[f](y).$$

**Доказательство.** Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Поскольку $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\,dt$, то из абсолютной интегрируемости функции $f'(x)$ на $\mathbb{R}$ следует существование конечного предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int\limits_0^{+\infty} f'(t)\,dt$.

Если $A \neq 0$, то по определению предела $\exists x_0 :\ \forall x > x_0 \hookrightarrow\ |f(x)| > |A|/2$. Это противоречит сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Следовательно, $A = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

В силу абсолютной интегрируемости функции $f'(x)$ на $\mathbb{R}$ имеем

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,e^{-ixy}\,dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, получаем

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left( f(x)\,e^{-ixy}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(-iy)\,e^{-ixy}\,dx \right) = iy\,F[f](y). \qquad \square$$

**Теорема 5.** (Производная преобразования Фурье.) Пусть функции $f(x)$ и $x\,f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразование Фурье функции $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функцией и

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = F[-ix\,f](y).$$

**Доказательство.** Применяя теорему 1 § 5 к функциям $f(x)$, $\varphi(x,y) = -ix\,e^{-ixy}$ и промежуткам $(a,b) = (-\infty,+\infty)$, $[c,d] = [0,t]$, где $t$ – любое число, получаем равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t f(x)(-ix)e^{-ixy}dy\right)dx = \int_0^t\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy}dx\right)dy. \tag{5}$$

Поскольку $\int\limits_0^t(-ix)e^{-ixy}dy = \int\limits_0^t\left(\frac{d}{dy}e^{-ixy}\right)dy = e^{-ixt} - 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy}dx = F[-ix\,f](y)$, то равенство (5) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(e^{-ixt} - 1\right)dx = \int_0^t F[-ix\,f](y)\,dy,$$

то есть

$$F[f](t) - F[f](0) = \int_0^t F[-ix\,f](y)\,dy. \tag{6}$$

В силу теоремы 1 данного параграфа функция $F[-ix\,f](y)$ непрерывна. Поэтому в правой части равенства (6) стоит непрерывно дифференцируемая функция. Следовательно, функция, стоящая в левой части равенства (6), также непрерывно дифференцируема. Дифференцируя равенство (6) в точке $t = y$, получаем доказываемое равенство. $\square$

**Пример 3.** Вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}$.

**Решение.** В силу теоремы о производной преобразования Фурье получаем

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = F[-ix\,f](y) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-x^2/2}\,e^{-ixy}\,dx =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x+iy)\,e^{-x^2/2}\,e^{-ixy}\,dx - \frac{y}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\,dx =$$