Самосопряженные преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов

Определение 1. Линейное преобразование φ: E→E евклидова пространства E называется самосопряженным, если для любых x,y из E верно равенство (φ(x),y) = (x, φ(y)).

Свойства самосопряженных преобразований.

Пусть φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E. Тогда:
Утв.1. Если U – подпространство в E, инвариантное относительно φ (короче, φ - инвариантное подпространство) (т.е. $\forall x \in U \Rightarrow \varphi(x) \in U$), то ортогональное дополнение $U^{\perp}$ также φ -инвариантно.
Доказательство. Для любых векторов $x \in U, y \in U^{\perp}$, $(x, \varphi(y)) = (\varphi(x), y) = 0$, так как $\varphi(x) \in U$, следовательно, $\varphi(y) \in U^{\perp}$. □
Замечание. Ограничение самосопряженного преобразования на инвариантное подпространство является самосопряженным, если на подпространстве рассматривать скалярное произведение, заданное во всем пространстве.
Утв.2. Собственные векторы φ, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.
Доказательство. Если $\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1$, $\varphi(x_2) = \lambda_2 x_2$, $x_1 \neq 0 \neq x_2$, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то
$(\varphi(x_1), y) = \lambda_1(x_1, x_2) \;\; = (x_1, \varphi(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \;\; \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$ □ .
Утв. 3. В ортонормированном базисе (о.н.б.) матрица A самосопряженного преобразования φ является симметрической: $A^T = A$.

Доказательство. Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в V, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x, $X^T = (x_1, \ldots, x_n)$ – строка его координат, то $(x, y) = X^T \cdot Y$.
Тогда

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi(x), y) = (AX)^T \cdot Y = (X^T A^T)Y = X^T A^T Y \\ \\ (x, \varphi(y)) = X^T AY \end{array}\right\} \quad \text{так что} \quad X^T A^T Y = X^T AY, \forall X, Y \in R^n .$$

Так как для любых i,j от 1 до n $E_i^T A E_j = a_{ij}$ (где E_i – i-й столбец единичной матрицы), то $a^T{}_{ij} = a_{ij}$, то есть $A^T = A$. □

В доказательстве свойства собственных значений понадобится
Лемма. Любое линейного преобразование конечномерного действительного линейного пространства обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством U. (Одномерное порождено собственным вектором, а двумерное соответствует комплексному (не вещественному) характеристическому корню.)

Теорема 1. Все характеристические корни (корни характеристического уравнения) самосопряженного преобразования (или симметрической матрицы) действительные.

Доказательство проводится индукцией по n=dim E.

Случай n =1 очевиден. При n = 2 в ортонормированном базисе $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$. Дискриминант этого уравнения $D = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}{}^2 \geq 0$, следовательно, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$.

При n > 2 сделаем индуктивное предположение о том, что у любой симметрической матрицы порядка <n все характеристические корни действительные. Допустим, что хотя бы один характеристический корень матрицы A мнимый. Согласно лемме, существует двумерное инвариантное подпространство U. По утверждению 1, $U^{\perp}$ также инвариантно.

В ортонормированном базисе, составленном из базисов подпространств U и $U^{\perp}$, матрица преобразования имеет блочный вид $A' = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$, где A_1 - симметрическая матрица 2 порядка , A_2 – симметрическая матрица порядка n-2, $\det(A-\lambda E) = \det \begin{Vmatrix} A_1-\lambda E & 0 \\ 0 & A_2-\lambda E \end{Vmatrix} = |A_1-\lambda E| \cdot |A_2-\lambda E|$. По предположению индукции, уравнение $|A_2-\lambda E|$=0 имеет все действительные корни, следовательно (с учетом случая 2), уравнение $|A-\lambda E| = 0$ – тоже –противоречие, следовательно, теорема 1 верна для всех n. □

Теорема2. Для любого самосопряженного преобразования существует ортонормированный базис из его собственных векторов. Матрица преобразования в этом базисе диагональна: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, где $\lambda_1,...,\lambda_n$ - собственные значения матрицы этого преобразования.

Доказательство теоремы 2 – индукция по n.

При n = 1 доказывать нечего. При n > 1 пусть λ_1 – какой-либо характеристический корень (действительный, по теореме 1), h_1 соответствующий собственный вектор (можно сразу взять $|h_1| = 1$) и $U = \langle h_1 \rangle$ – одномерное инвариантное подпространство. Согласно утв.1, $U^{\perp}$ инвариантно размерности n–1, и для ограничения преобразования на $U^{\perp}$, по предположению индукции, существует ортонормированный базис $h_2,...,h_n$ из собственных векторов. Тогда $h_1; h_2,...,h_n$ – искомый базис.

□**Пример**. В некотором о.н.б. в R^3 линейное преобразование φ задано матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти для φ ортонормированный базис из собственных векторов и записать в нем матрицу преобразования.

□

$$|A-\lambda E| = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

Собственные векторы: $\lambda_{1,2} = 1$, $A-E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Система уравнений для собственных векторов: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, так что имеются два линейно независимых собственных вектора . Можно взять $h_1 = (1,1,0)^T$. Второй линейно независимый собственный вектор ищем ортогональный к h_1, т.е. как решение системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad = 0 \end{cases}$. Например, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_2 - x_1 = -2$, т.е. $h_2 = (1,-1,-2)^T$.

Собственный вектор для $\lambda_3 = 4$, по утв. 2, ортогонален к h_1, h_2, так что в трехмерном пространстве он единственный с точностью до множителя вектор из $<h_1, h_2>^{\perp}$. Читая уравнение $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ как скалярное произведение $((x_1, x_2, x_3),(1,-1,1)) = 0$, без вычислений находим $h_3 = (1,-1,1)^T$. (Разумеется, можно было решить характеристическую систему уравнений для $\lambda_3 = 4$ и получить то же самое.)

Окончательно, нормируя, получаем

$h_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), h_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), h_3' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. В этом базисе $A' = diag(1,1,4)$.□

Можно упомянуть 2 типичных примера самосопряженных преобразований.
Пусть E – n-мерное евклидово пространство, U – подпространство в E, 0 ≠ U ≠ V, тогда любой вектор $x \in E$ единственным образом представляется в виде $x = y + z, y \in U, z \in U^{\perp}$.

Пример 1. Ортогональное проектирование V на U: $P(x) := y$. Проверка самосопряженности: $x_{1,2} = y_{1,2} + z_{1,2}, y_{1,2} \in U, z_{1,2} \in U^{\perp} \Rightarrow (P(x_1), x_2) = (y_1, y_2) = (x_1, P(x_2))$. Ядром преобразования является U.

Собственные векторы: $y \in U - \{0\}, \lambda_1 = 1; z \in U^{\perp} - \{0\}, \lambda_2 = 0$. В о.н.б., составленном из базисов подпространств U, $U^{\perp}$, матрица преобразования равна $diag(\underbrace{1,...,1}_{m}, \underbrace{0,...,0}_{n-m})$, если $\dim U = m$.

Пример 2. Ортогональная симметрия (или зеркальное отражение) S пространства E относительно U: S(x) = y – z. Проверить самосопряженность можно аналогично.
Собственные векторы: $y \in U - \{0\}, \lambda_1 = 1; z \in U^{\perp} - \{0\}, \lambda_2 = -1$. В о.н.б., составленном из базисов подпространств U, $U^{\perp}$, матрица оператора равна $diag(\underbrace{1,...,1}_{m}, \underbrace{-1,...,-1}_{n-m})$.