§ 2. Линейные однородные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0, \tag{1}$$

где $x \in R^1_x$ и $a_1, \ldots, a_n$ — заданные действительные или комплексные числа, называют линейным однородным дифференциальным уравнением порядка n с постоянными коэффициентами. Числа $a_1, \ldots, a_n$ называют коэффициентами уравнения (1).

С помощью дифференциального многочлена

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

уравнение (1) коротко записывается в виде

$$L(D)y(x) = 0. \tag{2}$$

1. Общее решение

Утверждение следующей леммы обычно называют принципом суперпозиции для уравнения (1).

Лемма 1. *Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ — какие-либо решения уравнения* (1) *и C_1, C_2 — произвольные комплексные числа, то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением уравнения* (1).

○ Воспользуемся формой (2) записи уравнения (1). В силу линейности многочлена $L(D)$ (см. лемму 1 § 1) имеем

$$L(D)y = L(D)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(D) y_1 + C_2 L(D) y_2 = 0,$$

так как $L(D)y_1 = L(D)y_2 = 0$ по условию леммы. ●

В дальнейшем нам понадобится один вспомогательный результат о функциях вида

$$\varphi(x) = P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x) e^{\lambda_m x}, \tag{3}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — попарно различные комплексные числа, а $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ — многочлены с комплексными коэффициентами.

Лемма 2. *Если в* (3) *$\varphi(x) = 0$ для всех $x \in R^1_x$, то все коэффициенты во всех многочленах $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ суть нули.*

○ Применим индукцию по m. При $m = 1$ утверждение леммы 2 очевидно. Пусть утверждение леммы 2 справедливо, если в формуле (3) заменить m на $(m-1)$. При $m > 1$ рассмотрим функцию

$$\psi(x) = e^{-\lambda_1 x} \cdot \varphi(x) = P_1(x) + \sum_{k=2}^{m} P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0.$$

Продифференцируем $\psi(x)$ $(N+1)$ раз, где N — степень многочлена $P_1(x)$. В силу того, что $P_1^{(N+1)}(x) = 0$, получим

$$\sum_{k=2}^{m}\left[P_k(x)e^{(\lambda_k-\lambda_1)x}\right]^{(N+1)} = 0$$

или

$$\sum_{k=2}^{m} Q_k(x)e^{(\lambda_k-\lambda_1)x} = 0,$$

где $Q_k(x)$ — многочлены той же степени, что и $P_k(x)$, так как $\lambda_k - \lambda_1 \neq 0$ при всех $k = \overline{2,m}$. Из предположения индукции $Q_k(x) \equiv 0$, $\forall k = \overline{2,m}$. Следовательно, $P_k(x) \equiv 0$, $\forall k = \overline{2,m}$. Тогда и $P_1(x) \equiv 0$. Это значит, что все коэффициенты многочленов $P_1(x), \dots, P_m(x)$ в (3) нулевые. ●

Рассмотрим характеристический многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Уравнение $L(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением для (1).

Напомним, что число λ_0 называется корнем кратности $k (k \in N, 1 \leq k \leq n)$ уравнения $L(\lambda) = 0$, если

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot L_1(\lambda),$$

где $L_1(\lambda)$ — многочлен степени $(n-k)$ и $L_1(\lambda_0) \neq 0$. Из формулы Тейлора для $L(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ сразу следует, что λ_0 — корень кратности k для $L(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$L(\lambda_0) = L'(\lambda_0) = \dots = L^{k-1}(\lambda_0) = 0, \qquad L^{(k)}(\lambda_0) \neq 0.$$

Лемма 3. *Если λ_0 — корень кратности k характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, то каждая из функций*

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$$

является решением уравнения (1).

○ а) $\lambda_0 = 0$. Тогда $L(\lambda) = \lambda^k(\lambda^{n-k} + a_1\lambda^{n-k-1} + \dots + a_{n-k})$, где $a_{n-k} \neq 0$, и, следовательно,

$$L(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-k}D^k.$$

Нетрудно проверить, что функции $1, x, \dots, x^{k-1}$ являются решениями $L(D)y = 0$.

б) $\lambda_0 \neq 0$. Сделаем замену $y = e^{\lambda_0 x} \cdot z$. По формуле сдвига (см. лемму 2, § 1)

$$L(D)y = e^{\lambda_0 x}L(D + \lambda_0)z = 0.$$

Характеристический многочлен $L(\lambda + \lambda_0)$ имеет корень $\lambda = 0$ кратности k. В силу п. а) уравнение $L(D + \lambda_0)z = 0$ имеет решения $1, x, \dots, x^{k-1}$. Из замены получаем утверждение леммы. ●

Лемма 3 описывает те функции, которые могут быть решениями уравнения (1). Следующая теорема является центральной в этом параграфе. Она дает формулу всех комплекснозначных решений линейного однородного уравнения (1).

Теорема. *Пусть характеристическое уравнение* $L(\lambda) = 0$ *имеет корни* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ $(m \in N, 1 \le m \le n)$ *соответственно кратности* $k_1, \dots, k_m$ $(k_1 + \dots + k_m = n)$. *Тогда:*

а) *любая функция вида*

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_m(x)e^{\lambda_m x}, \tag{4}$$

где $P_j(x) = C_0^j + C_1^j x + \dots + C_{k_j-1}^j x^{k_j-1}$ *— многочлен степени* $(k_j - 1)$, *коэффициентами которого служат произвольные комплексные постоянные* $C_0^j, \dots, C_{k_j-1}^j$, *является решением уравнения* (1);

б) *если* $y(x)$ *— какое-либо решение уравнения* (1), *то найдется единственный набор коэффициентов многочленов* $P_1(x), \dots, P_m(x)$, *при котором это решение* $y(x)$ *задается формулой* (4).

○ П. а) теоремы немедленно следует из леммы 3 и принципа суперпозиции для уравнения (1) (см. лемму 1).

П. б) докажем методом математической индукции по n. Пусть $y(x)$ — какое-либо решение (1). При $n = 1$ уравнение (1) имеет вид $y' + a_1 y = 0$ и по лемме 3 § 1 все его решения имеют вид $y = Ce^{-a_1 x}$. Ясно, что при некотором единственном значении C эта формула содержит и наше решение. Пусть теперь $n > 1$ и пусть всякое решение $y(x)$ линейного однородного уравнения порядка $(n-1)$ с постоянными коэффициентами единственным образом записывается в форме (4) с заменой n на $(n-1)$. В силу условий теоремы

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}.$$

Значит,

$$L(D) = (D - \lambda_1)^{k_1}(D - \lambda_2)^{k_2} \dots (D - \lambda_m)^{k_m}.$$

Введем дифференциальный многочлен степени $(n-1)$

$$M(D) = (D - \lambda_1)^{k_1-1}(D - \lambda_2)^{k_2} \dots (D - \lambda_m)^{k_m},$$

где при $k_1 = 1$ первый сомножитель отсутствует. Тогда $L(D) = M(D)(D - \lambda_1)$. Положим $(D - \lambda_1)y = z$. В таком случае уравнение (2) эквивалентно системе

$$\begin{cases} (D - \lambda_1)y = z, \\ M(D)z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Каждое решение второго уравнения системы (5) в силу предположения индукции имеет вид

$$z(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + Q_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + Q_m(x)e^{\lambda_m x}, \quad 1 \le m \le n,$$

где $Q_1(x)$ — многочлен степени $(k_1 - 2)$ в случае $k_1 > 1$ и $Q_1(x) \equiv 0$ в случае $k_1 = 1$, а $Q_j(x)$ — многочлены степени $(k_j - 1)$ при всех $j = \overline{2,m}$. По лемме 3 § 1 решение первого уравнения системы (5) имеет вид

$$y = e^{\lambda_1 x}\left(C + \int e^{-\lambda_1 x} z(x)dx\right), \tag{6}$$

где C — комплексная постоянная.

Учитывая, что при целом $l \geq 0$ первообразная

$$\int x^l e^{\lambda x} dx = \begin{cases} (b_0 x^l + \cdots + b_l)e^{\lambda x}, & \lambda \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \\ \frac{x^{l+1}}{l+1}, & \lambda = 0, \end{cases}$$

и что $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0$, $\forall j = \overline{2,m}$, из вида $z(x)$ находим, что

$$\int e^{-\lambda_1 x} z(x)dx = \begin{cases} P_1(x) + P_2(x)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \cdots + P_m(x)e^{(\lambda_m - \lambda_1)x}, & k_1 > 1, \\ P_2(x)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \cdots + P_m(x)e^{(\lambda_m - \lambda_1)x}, & k_1 = 1. \end{cases}$$

Подставляя это выражение в (6), получаем, что рассматриваемое решение $y(x)$ уравнения (1) имеет вид (4).

Рассуждением от противного установим единственность записи (4) для каждого решения уравнения (1). Если существует решение $y(x)$ уравнения (1), для которого

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} P_k(x)e^{\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{P}_k(x)e^{\lambda_k x},$$

то отсюда

$$\sum_{k=1}^{m} \left[P_k(x) - \tilde{P}_k(x)\right] e^{\lambda_k x} \equiv 0.$$

Из леммы 2 тогда получаем, что $P_k(x) \equiv \tilde{P}_k(x)$, $\forall k = \overline{1,m}$. ●

Замечания. 1) Поскольку $k_1 + \cdots + k_m = n$, то формула (4) содержит n произвольных постоянных.

2) Если все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения $L(\lambda) = 0$ попарно различны, то формула решений (1) особенно простая:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

3) Рассмотрим систему n функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, записанную в виде следующей таблицы

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & e^{\lambda_m x}, \\ xe^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \ldots, & xe^{\lambda_m x}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{k_1 - 1}e^{\lambda_1 x}, & x^{k_2 - 1}e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{k_m - 1}e^{\lambda_m x}. \end{array} \tag{7}$$

Теорема утверждает, что каждое решение $y(x)$ уравнения (1) выражается единственным образом как некоторая линейная комбинация $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$:

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x).$$

Нетрудно теперь видеть, что множество всех решений линейного однородного уравнения (1) образует линейное комплексное n-мерное векторное пространство, а функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуют базис этого пространства.

Исходя из всего сказанного, естественно дать следующее определение.

Определение. Функция вида (4) называется общим решением линейного однородного уравнения (1).

Общее решение (1) обладает следующими свойствами:

а) при каждом наборе постоянных функция (4) является решением уравнения (1),

б) каждое решение уравнения (1) единственным образом представимо функцией вида (4).

Решить уравнение (1) означает найти его общее решение.

На практике процесс нахождения общего решения сводится к нахождению корней характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ и использованию формулы (4).

Пример 1. Решить уравнения

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$,

б) $y'' + 2y' + y = 0$,

в) $y'' + \omega^2 y = 0, \quad \omega > 0$.

Δ В случае а) характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Тогда по формуле (4)

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные, является общим решением.

В случае б) характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = -1$. Тогда по формуле (4)

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

является общим решением.

Наконец, в случае в) характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$. Из (4) следует, что

$$y(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные, является общим решением. ▲

где A и φ — произвольные постоянные. При n — целом $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — многочлен степени n, называемый многочленом Чебышева.

Уравнение (8) можно иногда привести к уравнению с постоянными коэффициентами и с помощью замены неизвестной функции. Так, например, уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, \quad x > 0,$$

при помощи замены $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ приводится к уравнению $z'' + z = 0$. Следовательно, все решения уравнения Бесселя записываются в виде

$$y = \frac{A}{\sqrt{x}} \sin(x + \varphi),$$

где A и φ — произвольные постоянные.

Уравнение (8) можно также пытаться привести к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью одновременной замены и аргумента, и неизвестной функции.

Преобразуем, например, уравнение Стокса

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}, \quad x \in (a, b),$$

с помощью замены переменных $\frac{x-a}{b-x} = e^t$, $\frac{y}{x-b} = u$, $u = u(t)$. Последовательно находим, что

$$x = \frac{a + be^t}{1 + e^t}, \quad y = \frac{(a-b)u}{1+e^t}, \quad y' = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = u - u'(1 + e^{-t}),$$
$$y'' = \frac{u'' - u'}{a - b} \cdot \frac{(1 + e^{-t})(1 + e^t)^2}{e^t}.$$

После подстановки выражений для x, y, y'' в уравнение Стокса получаем уравнение с постоянными коэффициентами

$$u'' - u' = \frac{Au}{(b-a)^2}.$$

§ 3. Линейные неоднородные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

Эти уравнения имеют вид

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n y(x) = f(x), \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — заданные комплексные или действительные числа, а правая часть $f(x)$ уравнения (1) — заданная непрерывная функция на некотором промежутке X оси R^1_x.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$z^{(n)}(x) + a_1 z^{(n-1)}(x) + \dots + a_n z(x) = 0. \tag{2}$$

Прежде всего покажем, что если известно какое-либо решение $y_0(x)$ линейного неоднородного уравнения (1), то замена $y(x) = z(x) + y_0(x)$ приводит уравнение (1) к линейному однородному уравнению (2). Действительно, воспользовавшись представлением левой части (1) через дифференциальный многочлен

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n, \tag{3}$$

получаем, что

$$L(D)y = L(D)(z + y_0) = L(D)z + L(D)y_0 = L(D)z + f(x) = f(x).$$

Отсюда следует $L(D)z = 0$, т.е. $z(x)$ — решение (2).

Это простое замечание позволяет написать формулу всех решений линейного неоднородного уравнения (1), если найти каким-то образом его решение $y_0(x)$, так как формула общего решения (2) была уже получена в § 2. Именно, если $z_1(x), \dots, z_n(x)$ — базис решений (2), то формула $y = C_1 z_1(x) + \dots + C_n z_n(x) + y_0(x)$ дает все решения (1). Ее называют формулой общего решения (1).

Следующее утверждение носит название принципа суперпозиции для линейного неоднородного уравнения (1).

Лемма. *Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и пусть $y_1(x)$ — какое-либо решение уравнения* (1) *при $f(x) \equiv f_1(x)$ и $y_2(x)$ — какое-либо решение уравнения* (1) *при $f(x) \equiv f_2(x)$.*

Тогда $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения (1).

○ Имеем

$$L(D)y = L(D)(y_1 + y_2) = L(D)y_1 + L(D)y_2 = f_1(x) + f_2(x) = f(x). \qquad \bullet$$

Определение. Квазимногочленом называется функция $f(x) = e^{\mu x} \cdot P_m(x)$, где μ — заданное комплексное число, $P_m(x)$ — заданный многочлен степени m с комплексными коэффициентами.

Из предыдущего параграфа следует, что всякое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами представляет собой конечную сумму квазимногочленов.

Покажем, в каком виде нужно искать частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами (1) с квазимногочленом в правой части. Найдя это частное решение и базис пространства решений (2), немедленно получаем общее решение (1).

Рассмотрим уравнение

$$L(D)y(x) = e^{\mu x} \cdot P_m(x), \tag{4}$$

где μ — заданное комплексное число, а $P_m(x)$ — заданный многочлен степени m.

Определение. Если число μ является корнем характеристического уравнения

$$L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

то говорят, что в уравнении (4) имеет место резонансный случай. Если же μ не является корнем $L(\lambda) = 0$, то говорят, что в уравнении (4) имеет место нерезонансный случай.

Теорема. *Для уравнения* (4) *существует и единственно решение вида*

$$y(x) = x^k \cdot Q_m(x)e^{\mu x},$$

где $Q_m(x)$ — многочлен одинаковой с $P_m(x)$ степени m, а число k равно кратности корня μ характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ в резонансном случае и $k = 0$ в нерезонансном случае.

○ Если $\mu \neq 0$, то заменой $y = e^{\mu x} \cdot z$ в уравнении (3) всегда можно избавиться от $e^{\mu x}$ в правой части. В самом деле, используя формулу сдвига, после замены имеем, что

$$L(D)y = L(D)(e^{\mu x}z) = e^{\mu x}L(D+\mu)z = e^{\mu x} \cdot P_m(x).$$

Отсюда $L(D+\mu)z = P_m(x)$.

Таким образом, доказательство теоремы осталось провести для уравнения вида

$$L(D)y = P_m(x). \tag{5}$$

а) Нерезонансный случай: $L(0) \neq 0$. Пусть

$$P_m(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \dots + p_m,$$
$$Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \dots + q_m.$$

Подставляя $P_m(x)$, $Q_m(x)$ в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем линейную алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $q_0, q_1, \dots, q_m$:

$$\begin{cases} a_nq_0 = p_0, \\ a_nq_1 + a_{n-1} \cdot mq_0 = p_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nq_m + \dots = p_m. \end{cases}$$

Матрица этой линейной системы треугольная с числами $a_n = L(0) \neq 0$ по диагонали, поэтому все коэффициенты $Q_m(x)$ определяются однозначно.

б) Резонансный случай:

$$L(\lambda) = \lambda^k\left(\lambda^{n-k} + a_1\lambda^{n-k-1} + \dots + a_{n-k}\right), \quad 1 \le k \le n, \quad a_{n-k} \neq 0, \quad k \neq n.$$

Следовательно,

$$L(D) = \begin{cases} D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-k}D^k, & k < n, \\ D^n, & k = n. \end{cases}$$

В случае $k < n$ замена $D^k y = z$ в уравнении (4) приводит к уравнению

$$L_1(D)z \equiv (D^{n-k} + \dots + a_{n-k})z = P_m(x).$$

Поскольку $L_1(0) = a_{n-k} \neq 0$, то для этого уравнения имеет место нерезонансный случай. Следовательно, существует единственное решение этого уравнения $z = R_m(x)$, где $R_m(x)$ — некоторый многочлен степени m.

Рассмотрим уравнение

$$D^k y = \begin{cases} R_m(x), & k < n, \\ P_m(x), & k = n. \end{cases}$$

Взяв нулевые начальные условия для этого уравнения

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(k-1)}(0) = 0,$$

получаем единственное решение вида

$$y(x) = x^k \cdot Q_m(x).$$ ●

Замечания. 1) Практически указанное в теореме решение всегда ищут методом неопределенных коэффициентов, т.е. полагают

$$y(x) = x^k(q_0 x^m + \dots + q_m)e^{\mu x}$$

и неизвестные коэффициенты $q_0, \dots, q_m$ находят подстановкой $y(x)$ в уравнение (4). В силу доказанной теоремы получающаяся линейная система для $q_0, \dots, q_m$ однозначно разрешима.

2) Предположим, что все коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ в уравнении (1) действительны и

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right],$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами и степень одного из них m, а другого не больше m, α и β — действительные числа. Из доказанной теоремы следует, что решение уравнения (1) в этом случае нужно искать в виде

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}\left[C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right],$$

где $C(x)$ и $D(x)$ — многочлены степени m с неопределенными коэффициентами, а k равно кратности корня $\alpha + i\beta$ уравнения $L(\lambda) = 0$, если число $\alpha + i\beta$ — корень $L(\lambda) = 0$, и $k = 0$, если число $\alpha + i\beta$ не является корнем $L(\lambda) = 0$.

Это правило получается в силу того, что по формулам Эйлера $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}E(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}F(x),$$

где $E(x)$ и $F(x)$ — многочлены. Из принципа суперпозиции и доказанной теоремы следует, что решение (1) можно искать в таком виде, если $\alpha \pm i\beta$ — не корни $L(\lambda) = 0$. Если же $\alpha \pm i\beta$ — корни $L(\lambda) = 0$ кратности