Пример. Методом исключения решить линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$$

Δ Продифференцируем первое уравнение и подставим выражение для $\dot{y}$ из второго уравнения. Имеем

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 3\dot{y} + \cos t = 4\dot{x} - 3(2x - y - 2\cos t) + \cos t = \\ = 4\dot{x} - 6x + 3y + 7\cos t.$$

Подставив сюда выражение для $3y$ из первого уравнения, получаем уравнение для $x(t)$:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin t + 7\cos t.$$

Общим решением этого уравнения является

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Из первого уравнения системы находим, что

$$y(t) = C_1e^t + \frac{2}{3}C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t.$$

Вектор-функция с компонентами $x(t)$, $y(t)$ дает все решения исходной системы уравнений. ▲

§ 2. Общее решение нормальной линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим нормальную линейную однородную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

где $t \in R^1_t$, A — квадратная комплексная матрица порядка n, $x(t)$ — неизвестная вектор-функция с n компонентами.

Следующее предложение носит название принципа суперпозиции для линейных однородных систем.

Лемма 1. *Если $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ — решения системы (1), а C_1, C_2 — произвольные комплексные числа, то вектор-функция $x(t) = C_1x^{(1)}(t) + C_2x^{(2)}(t)$ также решение системы (1).*

○ Имеем в силу условий леммы, что

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = C_1\dot{x}^{(1)}(t) + C_2\dot{x}^{(2)}(t) - A\left[C_1x^{(1)}(t) + C_2x^{(2)}(t)\right] = \\ = C_1\left[\dot{x}^{(1)} - Ax^{(1)}\right] + C_2\left[\dot{x}^{(2)} - Ax^{(2)}\right] = 0.$$

●

Будем считать в дальнейшем, что матрица A является матрицей некоторого линейного преобразования $\mathcal{A}$ в комплексном унитарном n-мерном пространстве R^n столбцов с n компонентами в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. При заданном базисе можно отождествить преобразование $\mathcal{A}$ и его матрицу A.

Очевидно, что система (1) имеет тривиальное решение $x = 0$. Будем искать нетривиальные решения (1) в виде $x(t) = e^{\lambda t}h$, где $h \neq 0$ — числовой n-мерный вектор. Подставляя $x(t)$ в систему (1), получим $\lambda e^{\lambda t}h = Ae^{\lambda t}h$ или $Ah = \lambda h$.

Напомним, что собственный вектор h преобразования A для собственного значения λ определяется условием

$$Ah = \lambda h, \qquad h \neq 0,$$

и что все собственные значения λ преобразования A являются корнями уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где E — единичная матрица порядка n. Таким образом, установлено следующее утверждение.

Лемма 2. *Для того, чтобы вектор-функция $x(t) = e^{\lambda t}h$ была нетривиальным решением линейной однородной системы* (1), *необходимо и достаточно, чтобы λ было собственным значением, а h — соответствующим ему собственным вектором преобразования A.*

Теперь можно установить следующий результат.

Теорема 1. *Пусть существует базис $\mathcal{R}^n$ из собственных векторов $h_1, \ldots, h_n$ линейного преобразования A и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие им собственные значения (среди них могут быть одинаковые)*

Тогда:

а) *вектор-функция $x(t)$ вида*

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t}h_1 + \cdots + C_ne^{\lambda_n t}h_n, \tag{2}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные комплексные постоянные, является решением системы (1);

б) *если $x(t)$ — какое-либо решение системы* (1), *то найдутся такие значения постоянных $C_1, \ldots, C_n$, при которых $x(t)$ задается формулой* (2).

О П. а) утверждения теоремы 1 непосредственно следует из лемм 1 и 2. Докажем п. б). Пусть $x(t)$ — какое-либо решение (1). Так как $h_1, \ldots, h_n$ — базис R^n, то для $\forall t \in R^1_t$

$$x(t) = \zeta_1(t)h_1 + \cdots + \zeta_n(t)h_n.$$

Подставим $x(t)$ в систему (1). Имеем

$$\dot\zeta_1(t)h_1 + \cdots + \dot\zeta_n(t)h_n = \zeta_1(t)Ah_1 + \cdots + \zeta_n(t)Ah_n =$$
$$= \lambda_1\zeta_1(t)h_1 + \cdots + \lambda_n\zeta_n(t)h_n.$$

Так как $h_1, \dots, h_n$ — линейно независимые векторы, то отсюда

$$\dot{\zeta}_1(t) = \lambda_1 \zeta_1(t), \dots, \dot{\zeta}(t) = \lambda_n \zeta_n(t).$$

Из этих уравнений находим, что $\zeta_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \zeta_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}$. Подстановка найденных $\zeta_1(t), \dots, \zeta_n(t)$ в формулу для $x(t)$ дает (2). ●

Замечание. Для каждого решения $x(t)$ в теореме 1 можно установить единственность набора $C_1, \dots, C_n$ в (2).

При условиях теоремы 1 вектор-функцию $x(t)$ вида (2) будем называть общим комплексным решением линейной однородной системы (1). Как известно из курса алгебры, базис пространства R^n из собственных векторов преобразования A существует, например, тогда, когда все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ преобразования A попарно различны или когда преобразование A является нормальным (независимо от кратности λ), в частности, симметрическим.

Пример 1. Найти общее комплексное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + 2z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = y - z. \end{cases}$$

Δ Напишем матрицу A системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы A из уравнения

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Найдем какие-либо собственные векторы h_1, h_2, h_3 соответственно для λ_1, λ_2, λ_3. Имеем

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как λ_1, λ_2, λ_3 — попарно различны, то h_1, h_2, h_3 образуют базис в комплексном линейном пространстве R^3. По теореме 1 вектор-функция

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + C_3 e^{(-1-i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix},$$

Определение. Пусть λ_0 — собственное значение преобразования A и пусть векторы $h_1, h_2, \ldots, h_k$ таковы, что

$$\begin{aligned} &Ah_1 = \lambda_0 h_1, \quad h_1 \neq 0, \\ &Ah_2 = \lambda_0 h_2 + h_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Ah_k = \lambda_0 h_k + h_{k-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда h_1 — собственный вектор преобразования A, а векторы $h_2, \ldots, h_k$ называют присоединенными векторами к вектору h_1. Система векторов $h_1, \ldots, h_k$ называется жордановой цепочкой для собственного значения λ_0, а число k называется длиной жордановой цепочки.

Если собственное значение λ_0 — простое и h_1 — соответствующий ему собственный вектор, то присоединенных векторов к h_1 в этом случае не существует. Если же λ_0 — кратное собственное значение, то для него может существовать несколько жордановых цепочек, содержащие линейно независимые собственные векторы преобразования.

Теорема Жордана. *Каково бы ни было линейное преобразование A в комплексном пространстве R^n, всегда существует базис R^n, составленный из жордановых цепочек для всех собственных значений*

Эта теорема доказывается в курсе алгебры. Мы же только отметим, что в базисе, составленном из жордановых цепочек (в дальнейшем такой базис будет коротко называться жордановым базисом R^n), число различных жордановых цепочек равно числу линейно независимых векторов преобразования A. Кроме того, в жордановом базисе сумма длин всех жордановых цепочек для каждого кратного собственного значения λ равна кратности λ. В общем случае жорданов базис R^n является комплексным даже для действительного преобразования A. В частности, жорданов базис может быть базисом только из собственных векторов A. Заметим также, что жорданов базис R^n строится не единственным образом.

Используем теперь жорданов базис R^n для получения формулы всех комплекснозначных решений линейной однородной системы (1) в случае произвольной квадратной матрицы A.

Пусть λ — собственное значение A и пусть $h_1, \ldots, h_k$ — некоторая жорданова цепочка для λ. Покажем, что каждой жордановой цепочке длины k соответствует k решений системы (1) вида

$$\begin{aligned} &x_1(t) = e^{\lambda t} h_1 \equiv e^{\lambda t} \cdot P_1(t), \\ &x_2(t) = e^{\lambda t} \left(\tfrac{t}{1!} h_1 + h_2\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_2(t), \\ &x_3(t) = e^{\lambda t} \left(\tfrac{t^2}{2!} h_1 + \tfrac{t}{1!} h_2 + h_3\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_3(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_k(t) = e^{\lambda t} \left(\tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} h_1 + \cdots + \tfrac{t}{1!} h_{k-1} + h_k\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_k(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Лемма 3. *Каждая из вектор-функций $x_r(t) = e^{\lambda t} \cdot P_r(t)$, $r = \overline{1, k}$, является решением системы* (1).

○ При $k = 1$ утверждение леммы 3 доказано в лемме 2. Пусть $k \geq 2$. Тогда $\dot{P}_r(t) = P_{r-1}(t)$, а из определения жордановой цепочки (3) следует, что $AP_r(t) = \lambda P_r(t) + P_{r-1}(t)$. Подставляя $x_r(t)$ в систему (1), получаем, что

$$\dot{x}_r - Ax_r = \lambda e^{\lambda t} P_r + e^{\lambda t} \dot{P}_r - e^{\lambda t} AP_r =$$
$$= \lambda e^{\lambda t} P_r + e^{\lambda t} P_{r-1} - e^{\lambda t}(\lambda P_r + P_{r-1}) = 0.$$

Здесь был использован тот факт, что формула производной произведения скалярной функции и вектор-функции аналогична формуле производной произведения двух скалярных функций. ●

Теперь установим формулу любого решения системы (1).

Теорема 2. *Пусть жорданов базис R^n состоит из S жордановых цепочек $h_1^{(j)}, \ldots, h_{k_j}^{(j)}$ длин k_j $(k_1 + \cdots + k_S = n)$ для собственных значений λ_j (среди λ_j могут быть одинаковые) преобразования A, $j = \overline{1, S}$. Тогда:*

а) *вектор-функция $x(t)$ вида*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{S} e^{\lambda_j t} \left[C_1^{(j)} P_1^{(j)}(t) + \cdots + C_{k_j}^{(j)} P_{k_j}^{(j)}(t) \right], \tag{5}$$

где $P_1^{(j)}(t), \ldots, P_{k_j}^{(j)}(t)$ — многочлены вида (4) и $C_1^{(j)}, \ldots, C_{k_j}^{(j)}$, $j = \overline{1, S}$, — произвольные комплексные постоянные, является решением системы (1);

б) *если $x(t)$ — какое-либо решение системы* (1), *то найдется такой набор значений постоянных $C_1^{(j)}, \ldots, C_{k_j}^{(j)}$, $j = \overline{1, S}$, при котором $x(t)$ задается формулой* (5).

○ П. а) теоремы 2 немедленно следует из леммы 3 и принципа суперпозиции для системы (1) (см. лемму 1).

Докажем п. б). Пусть $x(t)$ — какое-либо решение системы (1). Покажем, что оно имеет вид (5). При каждом $t \in R_t^1$ решение $x(t)$ можно разложить по жорданову базису R^n. Пусть

$$x(t) = \sum_{j=1}^{S} \left[\zeta_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + \cdots + \zeta_{k_j}^{(j)}(t) h_{k_j}^{(j)} \right].$$

Подставим $x(t)$ в систему (1) и воспользуемся определением жордановой цепочки (3). Имеем:

$$\sum_{j=1}^{S}\left[\dot\zeta_1^{(j)}(t)h_1^{(j)}+\cdots+\dot\zeta_{k_j}^{(j)}(t)h_{k_j}^{(j)}\right]=$$
$$=\sum_{j=1}^{S}\left[\zeta_1^{(j)}(t)Ah_1^{(j)}+\cdots+\zeta_{k_j}^{(j)}(t)Ah_{k_j}^{(j)}\right]=$$
$$=\sum_{j=1}^{S}\left[\zeta_1^{(j)}(t)\lambda_j h_1^{(j)}+\zeta_2^{(j)}(t)\left(\lambda_j h_2^{(j)}+h_1^{(j)}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\zeta_{k_j}^{(j)}(t)\left(\lambda_j h_{k_j}^{(j)}+h_{k_j-1}^{(j)}\right)\right].$$

Из единственности разложения $x(t)$ по жордановому базису отсюда находим S систем вида

$$\begin{cases}\dot\zeta_1^{(j)}=\lambda_j\zeta_1^{(j)}+\zeta_2^{(j)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot\zeta_{k_j-1}^{(j)}=\lambda_j\zeta_{k_j-1}^{(j)}+\zeta_{k_j}^{(j)},\\ \dot\zeta_{k_j}^{(j)}=\lambda_j\zeta_{k_j}^{(j)},\quad j=\overline{1,S}.\end{cases}$$

Решая каждую из этих систем снизу вверх, получаем:

$$\zeta_{k_j}^{(j)}(t)=C_{k_j}^{(j)}e^{\lambda_j t},$$
$$\zeta_{k_j-1}^{(j)}(t)=\left[C_{k_j-1}^{(j)}+C_{k_j}^{(j)}\tfrac{t}{1!}\right]e^{\lambda_j t},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\zeta_1^{(j)}(t)=\left[C_1^{(j)}+C_2^{(j)}\tfrac{t}{1!}+\cdots+C_{k_j}^{(j)}\tfrac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}\right]e^{\lambda_j t}\quad j=\overline{1,S}.$$

Подставляя найденные значения $\zeta_1^{(j)}(t),\dots\zeta_{k_j}^{(j)}(t)$ в разложение $x(t)$ и собирая члены возле каждого $C_1^{(j)},\dots,C_{k_j}^{(j)}$, получим представление x(t) в виде (5). ●

Замечания. 1) Можно доказать, что представление каждого решения линейной однородной системы (1) в виде (5) является единственным. Это делается так же, как и в случае линейных однородных уравнений порядка n (см. теорему § 2 главы 2).

2) Так как $k_1+\cdots+k_S=n$, то формула (5) содержит n произвольных постоянных.

3) Если жорданов базис является базисом из собственных векторов преобразования A, то формула (5) совпадает с формулой решений системы (1) в теореме 1.

Определение. Вектор-функция $z(t)$ вида (5) называется общим (комплекснозначным) решением нормальной линейной однородной системы (1).

Решить систему означает найти ее общее решение.

На практике процесс нахождения общего решения (1) сводится к нахождению собственных значений матрицы A, построению жорданового базиса R^n и использованию формулы (5). Для удобства пользования распишем формулу (5) для системы (1) при $n = 2, 3$, за исключением тех случаев, которые охватываются теоремой 1.

Если при $n = 2$ собственное значение λ двукратное и жорданова цепочка для λ состоит из собственного вектора h_1 и присоединенного к нему вектора h_2, то общее решение системы (1) задается формулой

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t}(t h_1 + h_2).$$

Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Если собственное значение λ_1 простое и ему соответствует собственный вектор h_1, а собственное значение λ_2 двукратное и жорданова цепочка для λ_2 состоит из собственного вектора h_2 и к нему присоединенного вектора h_3, то общее решение системы (1) в этом случае задается формулой

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2 + C_3 e^{\lambda_2 t}(t h_2 + h_3).$$

Пусть теперь λ — трехкратное собственное значение A. Если жорданов базис состоит из двух жордановых серий, одна из которых состоит из собственного вектора h_1, а другая состоит из собственного вектора h_2 и присоединенного к нему вектора h_3, то общее решение (1) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} h_2 + C_3 e^{\lambda t}(t h_2 + h_3).$$

Если же жорданов базис состоит лишь из одной жордановой цепочки h_1, h_2, h_3 где h_1 — собственный вектор, а h_2 и h_3 — присоединенные к нему векторы, то общее решение (1) задается формулой

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t}(t h_1 + h_2) + C_3 e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!} h_1 + t h_2 + h_3\right).$$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -x - y - 2z, \\ \dot{z} = y + z, \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = -1$, $z(0) = 1$.

Δ Выпишем матрицу A системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$