Глава 6

Линейные дифференциальные уравнения порядка n с переменными коэффициентами

§ 1. Общие свойства

Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $x \in [\alpha, \beta]$, $a_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, — заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$, называемые коэффициентами уравнения (1), и $f(x)$ — заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, называемая правой частью уравнения (1).

Если $f(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, то уравнение (1) называется линейным однородным уравнением. В противном случае уравнение (1) называется линейным неоднородным уравнением.

В этой главе коэффициенты $a_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, и правая часть $f(x)$ уравнения (1) могут принимать комплексные значения.

Комплекснозначная функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (1) на $[\alpha, \beta]$, если $\varphi(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и обращает (1) в тождество на всем $[\alpha, \beta]$.

Непосредственно проверяется следующее утверждение, называемое принципом суперпозиции для уравнения (1).

Лемма 1. *Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_i(x)$ — решение уравнения* (1) *при $f(x) \equiv f_i(x)$ на $[\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, то функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения* (1).

Следствие. *Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения линейного однородного уравнения и c_1, c_2 — произвольные числа, то линейная комбинация $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ также является решением линейного однородного уравнения.*

Лемма 1 и ее следствие характерны именно для линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений и облегчают их изучение.

Решение уравнения (1) всегда можно свести к решению линейной системы дифференциальных уравнений порядка n следующего вида:

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x), \tag{2}$$

где

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Уравнение* (1) *эквивалентно системе* (2).

○ Пусть $y = \varphi(x)$ — решение (1). Положим $y_1(x) = \varphi(x)$, $y_2(x) = \varphi'(x), \dots, y_n(x) = \varphi^{(n-1)}(x)$. Тогда вектор-функция с компонентами $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)$ удовлетворяет системе (2). Наоборот, если вектор-функция с компонентами $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)$ — решение системы (1), то, исключив из (2) переменные $y_2, \dots, y_n$ получаем, что $y_1 = \varphi(x)$ — решение уравнения (1). ●

Лемма 2 позволяет перенести все результаты для линейных систем из главы 5 на случай уравнений (1).

Рассмотрим для уравнения (1) начальные условия

$$y(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y'(x_0) = y_2^{(0)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_n^{(0)}, \tag{3}$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ — заданные числа.

Теорема. *Пусть все функции $a_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, и $f(x)$ — непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда при произвольных начальных значениях $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ решение задачи Коши* (1), (3) *существует и единственно на всем $[\alpha, \beta]$.*

○ Сделав замену

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y'(x), \quad \dots, \quad y_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

сведем уравнение (1) к системе (2). При этом начальные условия примут вид

$$y(x_0) = y^{(0)}, \tag{4}$$

где $y^{(0)}$ — вектор с компонентами $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$. В силу леммы 2 задача Коши (1), (3) эквивалентна задаче Коши (2), (4). В силу условий теоремы $A(x)$ и $f(x)$ — непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, для задачи Коши (2), (4) выполнены все условия теоремы из § 1 главы 5. Согласно этой теореме решение задачи Коши (2), (4) существует и единственно на $[\alpha, \beta]$. Значит, и решение задачи Коши (1), (3) существует и единственно на $[\alpha, \beta]$. ●

Следствие. *Задача Коши*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0;$$
$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0, \tag{5}$$

где $a_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, *непрерывны на* $[\alpha,\beta]$ *и* $x_0 \in [\alpha,\beta]$, *имеет единственное решение* $y(x) \equiv 0$ *на* $[\alpha,\beta]$.

○ Действительно, $y(x) \equiv 0$ — решение задачи Коши (5) и оно единственно в силу доказанной теоремы. ●

Заметим, что в главе 4 было доказано, что в некоторой окрестности x_0 существует и единственно решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{6}$$

при начальных условиях (3), если только выполнены некоторые требования на функцию $f(x)$ и начальные данные. Уравнение (1) — частный случай уравнения (6) и при условиях теоремы выполнены все требования, наложенные на уравнение (6) в главе 4. Следовательно, из результатов главы 4 получаем локальное существование решения задачи Коши (1), (3) в некоторой окрестности x_0. Доказанная теорема уточняет этот результат и дает более сильное утверждение. Она гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (1), (3) глобально, т.е. на всем том $[\alpha,\beta]$, где определено уравнение (1), причем при произвольных начальных значениях $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$.

При условиях доказанной теоремы можно установить корректность задачи Коши (1), (3). Если рассмотреть задачу Коши для линейного уравнения порядка n с параметром λ

$$y^{(n)} + a_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x,\lambda)y = f(x,\lambda),$$
$$y|_{x=x_0} = y_1^{(0)},\ y'|_{x=x_0} = y_2^{(0)}, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_n^{(0)}, \tag{7}$$

где $a_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, и $f(x,\lambda)$ — непрерывны при $x \in [\alpha,\beta]$, $|\lambda - \lambda_0| \leqslant r$, то ее решение $y = \varphi(x,\lambda)$ является непрерывной функцией при всех $x \in [\alpha,\beta]$, $|\lambda-\lambda_0| \leqslant r$. Если же $a_j(x,\lambda)$, $f(x,\lambda)$ — непрерывно дифференцируемы по λ, то и решение $y = \varphi(x,\lambda)$ — непрерывно дифференцируемо по λ при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant r$. Все эти результаты получаются сведением уравнения (7) к линейной системе.

В случае, когда не все функции $a_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, $f(x)$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$, может не существовать решение задачи Коши (1), (3). В таком случае расширяют понятие решения задачи Коши (1), (3), и тогда можно установить существование и единственность такого решения задачи Коши (1), (3) при условиях, что $a_j(x)$, $j = \overline{1,n}$ и $f(x)$ измеримы и локально суммируемы на некотором промежутке $\mathcal{I}$ числовой оси R_x^1 (см. [31]). Если ввести понятие обобщенной задачи Коши (1), (2) (см. [13]), то и эти условия можно существенно ослабить.

§ 2. Линейные однородные уравнения порядка n

Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка n

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0, \tag{1}$$

где $a_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, заданные непрерывные функции на $[\alpha,\beta]$.

Определение. Решения $y_1(x),\dots,y_k(x)$ уравнения (1) называются линейно зависимыми на $[\alpha,\beta]$, если существуют числа $c_1,\dots,c_k$, одновременно не равные нулю и такие, что

$$c_1y_1(x)+\dots+c_ky_k(x)\equiv 0,\quad \forall x\in[\alpha,\beta].$$

В противном случае решения $y_1(x),\dots,y_k(x)$ называются линейно независимыми на $[\alpha,\beta]$.

Рассмотрим линейную однородную систему, которая эквивалентна уравнению (1) (см. § 1):

$$y'(x)=A(x)y(x),$$

$$y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ \vdots\\ y_n(x)\end{pmatrix},\quad A(x)=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\ 0&0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&\dots&1\\ -a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\dots&-a_1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Лемма 1. *Решения $y_1(x),\dots,y_k(x)$ уравнения (1) линейно зависимы на $[\alpha,\beta]$ тогда и только тогда, когда соответствующие им решения $\mathrm{y}_1(x),\dots,\mathrm{y}_k(x)$ системы (2) линейно зависимы на $[\alpha,\beta]$ (здесь $\mathrm{y}_j(x)$ — вектор-функция с компонентами $y_j(x),y_j'(x),\dots,y_j^{(n-1)}(x)$, $j=\overline{1,k}$).*

○ Пусть решения $y_1(x),\dots,y_k(x)$ уравнения (1) линейно зависимы на $[\alpha,\beta]$. Тогда найдутся такие числа $c_1,\dots,c_k$, $|c_1|+\dots+|c_k|>0$, что

$$c_1y_1(x)+\dots+c_ky_k\equiv 0,\quad \forall x\in[\alpha,\beta].$$

Дифференцируя последовательно это тождество $(n-1)$ раз, получаем тождество на $[\alpha,\beta]$ для решений системы (2):

$$c_1\mathrm{y}_1(x)+\dots+c_k\mathrm{y}_k(x)\equiv 0,$$

т. е. решения $\mathrm{y}_1(x),\dots,\mathrm{y}_k(x)$ системы (2) линейно зависимы на $[\alpha,\beta]$. Обратно, если выполнено последнее тождество на $[\alpha,\beta]$ с некоторыми, одновременно не равными нулю, числами $c_1,\dots,c_k$, то первая компонента этого векторного тождества означает линейную зависимость решений $y_1(x),\dots,y_k(x)$ уравнения (1). ●

Следствие. *Решения $y_1(x),\dots,y_k(x)$ уравнения (1) линейно независимы на $[\alpha,\beta]$ тогда и только тогда, когда решения $\mathrm{y}_1(x),\dots,\mathrm{y}_k(x)$ системы (2) линейно независимы на $[\alpha,\beta]$.*

Определение. Совокупность произвольных n линейно независимых решений $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ уравнения (1) называется фундаментальной системой решений уравнения (1).

Из леммы 1 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ уравнения* (1) *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (1) *в том и только в том случае, когда вектор-функции $\Phi_j(x)$ с компонентами $\varphi_j(x), \varphi_j'(x), \ldots, \varphi_j^{(n-1)}(x)$, $j = \overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений линейной однородной системы* (2).

С помощью леммы 2 все утверждения о фундаментальных системах решений линейной однородной системы переносятся на фундаментальные системы решений линейных однородных уравнений порядка n.

Теорема 1. *Для уравнения* (1) *существует бесконечное множество фундаментальных систем решений.*

○ Уравнение (1) эквивалентно системе (2), для которой справедлив аналог теоремы 1 (см. § 2 главы 5). В силу леммы 2 тогда справедлива и теорема 1. ●

Теорема 2. *Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения* (1), *то каждое решение $y(x)$ уравнения* (1) *представимо единственным образом в виде*

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — постоянные.

○ По лемме 2 вектор-функции $\Phi_j(x)$ с компонентами $\varphi_j(x), \varphi_j'(x), \ldots, \varphi_j^{(n-1)}(x)$, $j = \overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений системы (2), эквивалентной уравнению (1). По теореме 3 § 2 главы 5 любое решение $y(x)$ системы (2) единственным образом представимо в виде

$$y(x) = c_1\Phi_1(x) + \cdots + c_n\Phi_n(x).$$

Первая строка этого векторного равенства и дает утверждение теоремы 2. ●

Из принципа суперпозиции для уравнения (1) и теоремы 2 следует, что множество всех решений уравнения (1) образует n-мерное линейное пространство, а фундаментальная система решений уравнения (1) служит базисом этого пространства.

Определение. Функция вида

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x),$$

где $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений (1), а $c_1, \dots, c_n$ — произвольные параметры, называется общим решением линейного однородного уравнения (1).

Из теоремы существования и единственности решения уравнения (1) при начальных условиях

$$y(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y'(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^{(0)}, \tag{3}$$

и из теоремы 2 получаем, что каждое решение задачи Коши (1), (3) однозначно определяется из формулы общего решения (1).

Пример 1. Пусть все коэффициенты в (1) постоянны и пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

имеет n попарно различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда общее решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

имеет вид

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x},$$

где $c_1, \dots, c_n$ — произвольные постоянные. Эта формула уже известна из главы 2. В силу теоремы 2 доказательство этой формулы сводится к проверке линейной независимости системы решений $e^{\lambda_j x}$, $j = \overline{1, n}$. Это легко делается по определению линейной независимости.

Итак, нахождение общего решения уравнения (1) сводится к нахождению фундаментальной системы решений (1). В общем случае ее найти весьма трудно, а то и невозможно. Обратная же задача о нахождении уравнения (1) по заданной его фундаментальной системе решений на $[\alpha, \beta]$ однозначно решается без особого труда, о чем речь будет несколько позже.

Определение. Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (1) называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

и обозначается $W(x)$ или $W[y_1(x), \dots, y_n(x)]$.

Теорема 3. *Решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (1) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $W(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Решения $y_1(x), \dots, y_n(x)$ урав-*

нения (1) линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$.

○ Сведем уравнение (1) к эквивалентной системе (2). Тогда столбцы $W(x)$ — решения системы (2) и, значит, $W(x)$ является определителем Вронского и для решений (2). Но для него утверждения теоремы 3 уже были установлены в § 2 главы 5. ●

На практике теорема 3 удобна для проверки линейной зависимости решений уравнения (1). Заметим, что, вообще говоря, теорема 3 неверна в случае произвольной системы $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$. Например, при $x \in [-1, 1]$ функции

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0], \\ x^2, & x \in [0, 1], \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0], \\ 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

линейно независимы, но $W(x) \equiv 0$.

Теперь по заданной фундаментальной системе $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ уравнения (1) построим само уравнение (1). Искомым уравнением будет уравнение вида

$$W^{-1}[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \cdot W[y(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4), очевидно, имеет вид (1), так как $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ и его решениями служат $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, поскольку при их подстановке в (4) получается определитель с двумя одинаковыми столбцами. Уравнение (4) однозначно определяется системой $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ в силу того, что эквивалентная ему линейная система (2) однозначно (см. § 2 главы 5) определяется своей фундаментальной матрицей.

Теорема 4. *Пусть $W(x)$ — определитель Вронского решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (1) и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ справедлива формула Лиувилля — Остроградского*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\zeta) d\zeta}.$$

○ Уравнение (1) эквивалентно линейной системе (2). Для них определитель Вронского $W(x)$ один и тот же, и для системы (2) формула Лиувилля — Остроградского доказана. Остается заметить, что для системы (2) $\operatorname{sp} A(\zeta) = -a_1(\zeta)$. ●

Замечание. В случае, когда $n = 2$ и известно частное решение $y_1(x) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ уравнения (1), то формула Лиувилля — Остроградского позволяет найти решение (1) в квадратурах. В самом деле, из формулы Лиувилля — Остроградского для решений $y_1(x)$ и $y(x)$ имеем, что

$$y_1 y' - y y_1' = c_1 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\zeta) d\zeta},$$

где c_1 — постоянная. Разделив это равенство на $y_1^2(x)$, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^2(x)} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta}.$$

Отсюда получаем, что

$$y(x) = c_1 y_1(x) \cdot \int\limits_{x_0}^{x} e^{-\int\limits_{x_0}^{\tau} a_1(\zeta)d\zeta} \frac{d\tau}{y_1^2(\tau)} + c_2 y_1(x).$$

Пример 2. Решить уравнение $(x > 0)$

$$2xy'' - (x+4)y' + \left(1 + \frac{4}{x}\right) y = 0.$$

Δ Очевидно, что $y = x$ — решение этого уравнения. Воспользовавшись формулой Лиувилля — Остроградского, получаем, что

$$xy' - y = ce^{\int\limits_{1}^{x} \frac{\zeta+4}{2\zeta} d\zeta} = \tilde{c}x^2 e^{\frac{x}{2}}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \tilde{c}e^{\frac{x}{2}}.$$

Значит,

$$y = x\left(c_2 + c_1 e^{\frac{x}{2}}\right) = c_1 x e^{\frac{x}{2}} + c_2 x. \qquad \blacktriangle$$

Линейное однородное уравнение (1) является однородным относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$ (см. § 4 главы 1) и поэтому его порядок можно понизить на единицу с помощью замены неизвестной функции вида $y' = y \cdot z(x)$. Однако во многих случаях эта подстановка дает для $z(x)$ нелинейное уравнение и поэтому нецелесообразна. Покажем, что, если известно частное решение $y_1(x) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ уравнения (1), то существует замена, понижающая порядок уравнения (1) на единицу, и при этом получается линейное однородное уравнение порядка $(n-1)$. В самом деле, вводя замену переменных $y = y_1(x) \cdot z(x)$, вычислив производные от y по формуле Лейбница

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} y_1^{(i)}(x) \cdot z^{(k-i)}(x), \quad k = \overline{1, n},$$

и подставив в уравнение (1), получаем уравнение

$$y_1 z^{(n)} + (ny_1' + a_1 y_1) z^{(n-1)} + \cdots + (y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n y_1) z = 0.$$

Так как $y_1(x)$ — решение (1), то коэффициент при z равен нулю и замена $z' = u$ после деления на $y_1(x)$ дает уравнение

$$u^{(n-1)} + b_1(x)u^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}(x)u = 0. \tag{5}$$

Итак, замена $u(x) = z'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{y(x)}{y_1(x)}\right]$ приводит уравнение (1) к уравнению (5).

Используя полученный результат, можно показать, что порядок уравнения (1) можно понизить на m единиц, если известно m линейно независимых решений $y_1(x), \dots, y_m(x)$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, уравнения (1). В случае, когда известно $(n-1)$ линейно независимых частных решений (1), приходим в результате понижения к линейному уравнению первого порядка, интегрируемому в квадратурах. В этом случае общее решение (1) может быть получено в квадратурах.

Например, в случае уравнения примера 2 замена $y = xz$ приводит к уравнению

$$2z'' - z' = 0.$$

Его общим решением является

$$z = c_1 + c_2 e^{\frac{x}{2}}$$

и, значит, общее решение уравнения примера 2 задается формулой

$$y = xz = c_1 x + c_2 x e^{\frac{x}{2}},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

§ 3. Линейные неоднородные уравнения порядка n

Пусть задано линейное неоднородное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $a_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее линейное однородное уравнение порядка n

$$z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = 0. \tag{2}$$

Если известно какое-либо частное решение (1), то его интегрирование сводится к интегрированию уравнения (2).

Теорема 1. *Пусть $y_0(x)$ — какое-либо решение (1) и $y(x) = z(x) + y_0(x)$. Тогда $y(x)$ является решением уравнения (1) только в том случае, когда $z(x)$ — решение уравнения (2).*

○ Обозначив через $Ly(x)$ левую часть (1) и через $Lz(x)$ левую часть (2), из равенства $y(x) = z(x) + y_0(x)$ получаем, что

$$Ly(x) = Lz(x) + Ly_0(x) = Lz(x) + f(x),$$

так как $y_0(x)$ — решение (1). Если $y(x)$ — решение (1), то $Ly(x) = f(x)$ и отсюда $Lz(x) = 0$, т.е. $z(x)$ — решение (2). Наоборот, если $z(x)$ — решение (2), то $Lz(x) = 0$ и тогда $Ly(x) = f(x)$ т.е. $y(x)$ — решение (1). ●

Из этой теоремы сразу следует, что, если известна фундаментальная система решений $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ уравнения (2), то функция

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + y_0(x),$$

где $c_1, \cdots, c_n$ — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (1), т.е. содержит все решения уравнения (1).

Итак, в том случае, когда известна фундаментальная система решений уравнения (2), решение уравнения (1) сводится к нахождению какого-либо частного решения (1). Покажем, как можно в этом случае при $n \geq 2$ найти то решение уравнения (1), которое удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad x_0 \in [\alpha, \beta]. \tag{3}$$

Пусть $K(x)$ — решение линейного однородного уравнения (2) порядка $n \geq 2$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-2)}(x_0) = 0, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 1, \tag{4}$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

Построим $K(x)$. Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений (2), то по теореме 2 § 2

$$K(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x).$$

Подставив $K(x)$ в начальные условия (4), получим, что

$$c_j = W^{-1}(x_0) \cdot W_{nj}(x_0), \quad j = \overline{1, n},$$

где $W(x_0)$ — определитель Вронского системы $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)$, а $W_{nj}(x_0)$ — алгебраическое дополнение элемента $\varphi_j(x_0)$ в $W(x_0)$, $j = \overline{1, n}$. Таким образом,

$$K(x) = W^{-1}(x_0) \cdot \sum_{j=1}^{n} W_{nj}(x_0) \cdot \varphi_j(x). \tag{5}$$

Теорема 2. *Функция*

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} K(x + x_0 - \zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad x_0 < x \in [\alpha, \beta], \tag{6}$$

является частным решением линейного неоднородного уравнения (1), *удовлетворяющим нулевым начальным условиям* (3).

○ Поскольку $K(x+x_0-\zeta)$ и все $\frac{\partial^j K(x+x_0-\zeta)}{\partial x^j}$, $j=\overline{1,n}$, как видно из (5), являются непрерывными функциями x, $x_0 \in [\alpha,\beta]$, то $y_0(x)$ можно по правилу Лейбница n раз непрерывно дифференцировать. Тогда, учитывая начальные условия (4) для $K(x)$, имеем, что

$$y_0^{(j)}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial^j K(x+x_0-\zeta)}{\partial x^j} f(\zeta)d\zeta, \quad j=\overline{1,n-1},$$

$$y_0^{(n)}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial^n K(x+x_0-\zeta)}{\partial x^n} f(\zeta)d\zeta + f(x).$$

Отсюда ясно, что $y_0(x)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям (3). Подставляя выражения для $y_0(x)$ и ее производных в (1), убеждаемся в том, что $y_0(x)$ — решение (1). ●

Формула (6) для $y_0(x)$ называется формулой Коши частного решения (1), а метод ее получения называется методом Коши. Метод Коши позволяет найти общее решение (1) в квадратурах.

Решения (1) можно получить и другим методом — методом вариации постоянных (методом Лагранжа). Если $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (2), то, как известно, общее решение (2) имеет вид

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1,\dots,c_n$ — произвольные постоянные. Следуя Лагранжу, будем искать общее решение уравнения (1) в том же виде,

$$y = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x), \tag{7}$$

но уже считаем

$$c_1 = c_1(x),\dots,c_n = c_n(x),$$

где $c_1(x),\dots,c_n(x)$, — пока неизвестные непрерывно дифференцируемые функции $x \in [\alpha,\beta]$. Потребуем, чтобы

$$y^{(j)}(x) = c_1(x)\varphi_1^{(j)}(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n^{(j)}(x), \quad j=\overline{1,n-1}.$$

Это дает систему $(n-1)$ уравнений для определения $c_1'(x),\dots,c_n'(x)$:

$$c_1'(x)\varphi_1^{(j)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(j)}(x) = 0, \quad j=\overline{0,n-2}. \tag{8}$$

Еще одно уравнение получаем подстановкой $y^{(j)}(x)$, $j=\overline{0,n}$, в уравнение (1). Если обозначить левую часть уравнения (1) через $Ly(x)$, то подстановка $y(x)$ и ее производных в (1) дает уравнение

$$c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + \\ + c_1(x)L\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)L\varphi_n(x) = f(x).$$

Поскольку $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — решения (2), то $L\varphi_1(x) = \dots = L\varphi_n(x) = 0$ и остается уравнение

$$c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x). \tag{9}$$

Линейная алгебраическая система (8), (9) для $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ позволяет однозначно определить $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$, так как определитель системы (8), (9) представляет собой определитель Вронского $W(x) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, а он отличен от нуля на $[\alpha, \beta]$ в силу того, что $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений (2). Если $W_{nj}(x)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента $\varphi_j^{(n-1)}(x)$ в $W(x)$, $j = \overline{1,n}$, то по формулам Крамера

$$c_1'(x) = W^{-1}(x)W_{n1}(x)f(x), \dots, c_n'(x) = W^{-1}(x)W_{nn}(x)f(x).$$

В силу непрерывности $W^{-1}(x)$, $f(x)$ и $W_{nj}(x)$, $j = \overline{1,n}$, на $[\alpha, \beta]$ отсюда находим, что

$$c_j(x) = d_j + \int W^{-1}(x)W_{nj}(x)f(x)dx, \quad j = \overline{1,n},$$

где $d_1, \dots, d_n$ — произвольные постоянные, а знак интеграла означает фиксированную первообразную.

Подставляя выражения для $c_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, в формулу (7), получаем формулу общего решения (1):

$$y(x) = d_1\varphi_1(x) + \dots + d_n\varphi_n(x) + \int K(x)f(x)dx,$$

где $K(x)$ определяется формулой (5) при $x_0 = x$. Если в качестве первообразной взять интеграл с переменным верхним пределом, то отсюда получаем при $d_1 = \dots = d_n = 0$ частное решение $y_0(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(\zeta)f(\zeta)d\zeta$, удовлетворяющее начальным условиям (3).

Пример 1. Методом Коши решить уравнение

$$(2x+1)y'' - 2y' - (2x+3)y = 9(2x+1)^2 e^{\frac{x}{2}}, \quad x > -\frac{1}{2}.$$

Δ Найдем сначала фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения

$$(2x+1)y'' - 2y' - (2x+3)y = 0.$$

Проверкой убеждаемся, что $y_1 = e^{-x}$ — его частное решение. По формуле Лиувилля–Остроградского

$$y'e^{-x} + e^{-x}y = c_1 e^{\int \frac{2dx}{2x+1}} = c_1(2x+1).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{e^{-x}}\right) = c_1(2x+1)e^{2x}$$