по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\,g'(\zeta)\,d\zeta = [f(\zeta)g(\zeta)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta. \qquad (21)$$

Доказательство. Интегрируя тождество $fg' = (fg)' - gf'$ и пользуясь формулой

$$\int_{z_0}^{z_1} (fg)'\,d\zeta = f(z_1)\,g(z_1) - f(z_0)\,g(z_0) = [f(\zeta)\,g(\zeta)]\Big|_{z_0}^{z_1},$$

получаем равенство (21).

Отметим, что интегралы от дифференцируемых элементарных функций комплексного переменного в односвязной области вычисляются с помощью тех же методов и формул, что и в случае действительных функций. Так, например,

$$\int_{z_1}^{z_2} e^{\zeta}d\zeta = e^{z_2} - e^{z_1}; \quad \int_{z_1}^{z_2} \zeta^n d\zeta = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1} \qquad (n \geqslant 0 \text{ — целое}).$$

Пример 1. Функция $f(z) = 1/z$ дифференцируема в неодносвязной области D: $0 < |z| < \infty$. Пусть $\tilde{D}$ — односвязная область и пусть $\tilde{D} \subset D$. Тогда функция

$$F(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \tilde{D},$$

где интеграл берется по любой кривой, лежащей в области $\tilde{D}$, является в силу теоремы 6 первообразной для функции $f(z)$ и $F'(z) = 1/z$. Однако, функция

$$\Phi(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in D,$$

неоднозначна в области D, так как $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \neq 0$. □

§ 10. Интегральная формула Коши

Из интегральной теоремы Коши вытекает одна из важнейших формул теории функций комплексного переменного — интегральная формула Коши.

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D и пусть простая замкнутая кривая γ лежит в D и ориентирована положительно. Тогда для любой точки z,* *лежащей внутри* γ, *справедлива формула*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{1}$$

Формула (1) называется *интегральной формулой Коши.*

Доказательство. Функция $f(\zeta)/(\zeta-z)$ дифференцируема по ζ в области D с выколотой точкой z. Выберем ρ так, чтобы круг $|\zeta-z|<\rho$ вместе с его границей C_ρ: $|\zeta-z|=\rho$ лежал внутри γ. Тогда, используя следствие 2 из интегральной теоремы Коши (§ 9, формула (13)), получаем (рис. 45)

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)+f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=J_1+f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

где $J_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta$. Так как $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=1$ (§ 5, пример 3), то

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=J_1+f(z), \tag{2}$$

и поэтому для доказательства формулы (1) достаточно установить, что $J_1=0$.

В силу непрерывности функции $f(\zeta)$ в точке z для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что неравенство $|f(\zeta)-f(z_1)|<\varepsilon$ выполняется при $|\zeta-z|<\delta$. Следовательно,

$$|J_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{C_\rho}\frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|}\,|d\zeta|<$$

$$<\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{\rho}\int_{C_\rho}|d\zeta|=\varepsilon,$$

если $\rho\leqslant\delta$. Учитывая, что J_1 не зависит от ρ, получаем $J_1=0$, т. е. $J=f(z)$. Формула (1) доказана.

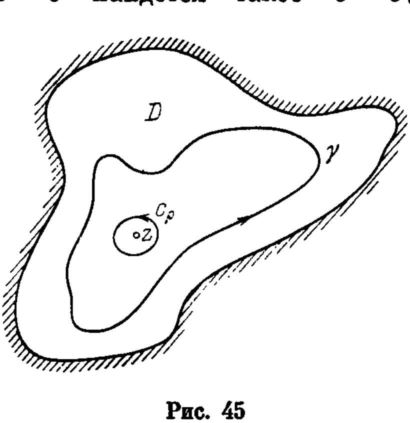

Рис. 45

Замечание 1. Пусть D — ограниченная односвязная область с кусочно гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и непрерывна вплоть до ее границы. Тогда для любой точки z, лежащей внутри D, имеет место формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3}$$

Формула (3) доказывается так же, как и формула (1); при этом используется теорема 4 § 9. Эта формула остается в силе и в том случае, когда D — многосвязная область. Доказательство формулы (3) для случая многосвязной области аналогично доказательству формулы (12) § 9.

С помощью формулы (3) значение функции $f(z)$ внутри области выражается через ее значения на границе этой области.

Отметим частный случай формулы (3). Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и пусть γ и γ_1 — простые замкнутые кривые (γ_1 лежит внутри γ), образующие границу области $D_1 \subset D$ (см. рис. 44). Тогда для любой точки $z \in D_1$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{4}$$

В формуле (4) кривые γ и γ_1 ориентированы положительно.

Замечание 2. Если в правой части формулы (3) z принадлежит внешности кривой Γ, т. е. z лежит вне $\overline{D}$, то подынтегральная функция дифференцируема по ζ всюду в D и по теореме Коши интеграл равен нулю. Таким образом

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \text{ вне } \overline{D}. \end{cases}$$

Теорема о среднем. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в круге K: $|z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $\overline{K}$. Тогда значение этой функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности, т. е.*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть в формуле (3) Γ есть окружность радиуса R с центром в точке z_0. Тогда

$$\zeta = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad d\zeta = iRe^{i\varphi} d\varphi,$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + Re^{i\varphi}\right) iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Формула (5) доказана.

Теорема о среднем для гармонических функций. *Пусть функция*

$$u(z)=u(x, y), \quad z=x+iy,$$

гармоническая в круге K: $|z-z_0|<R$, непрерывна в замкнутом круге $\overline{K}$. Тогда

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi. \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $f(z)$ — регулярная в круге K функция такая, что $\operatorname{Re} f(z)=u(z)$.

По теореме о среднем

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi, \quad 0<\rho<R. \qquad (7)$$

Отделяя в формуле (7) действительные части, имеем

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi,$$

откуда, переходя к пределу при $\rho\to R$, получаем формулу (6).

§ 11. Степенные ряды

1. Область сходимости степенного ряда. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad (1)$$

где a, c_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — заданные комплексные числа, z — комплексное переменное. При $a=0$ ряд (1) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \qquad (2)$$

Очевидно, все свойства степенны́х рядов вида (2) справедливы и для рядов вида (1).

Областью сходимости степенно́го ряда (2) называется множество всех точек z, в которых ряд (2) сходится. Точка $z=0$ всегда принадлежит области сходимости степенно́го ряда (2). Существуют степенны́е ряды, которые сходятся только при $z=0$ (пример 3).

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=0} (-1)^n z^n$ сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$. $\square$

Пример 2. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$ сходится во всей комплексной плоскости, так как для любого z можно указать такое n_0, что при $n>n_0$ имеет место неравенство $|z/n|<1/2$, т. е. $|z^n/n^n|<1/2^n$, откуда вытекает сходимость ряда в точке z. $\square$

Пример 3. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ сходится лишь при $z=0$, так как если $z\neq 0$, то при $n>1/|z|$ имеем $|nz|>1$ и $|nz|^n>1$ (не выполняется необходимое условие сходимости ряда). $\square$

Теорема 1 (теорема Абеля). *Если степенной ряд (2) сходится в точке $z_0\neq 0$, то он абсолютно сходится в круге K_0: $|z|<|z_0|$, а в любом меньшем круге K_1: $|z|\leqslant R_1<|z_0|$ этот ряд сходится равномерно.*

Доказательство. В силу сходимости ряда (2) в точке z_0 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n=0$ и, следовательно, существует такая постоянная $M>0$, что для всех n имеет место неравенство $|c_n z_0^n|<M$. Пусть z — произвольная точка круга K_0. Тогда

$$|c_n z^n|=|c_n z_0^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n<Mq^n, \tag{3}$$

где $q=|z/z_0|<1$, и из (3) вытекает абсолютная сходимость ряда (2) в круге K_0.

Если $z\in K_1$, то $|c_n z^n|\leqslant M|z/z_0|^n\leqslant Mq_1^n$, где $q_1=R_1/|z_0|<1$ не зависит от z, и по признаку Вейерштрасса ряд (2) сходится равномерно в круге K_1.

Пусть R — точная верхняя грань расстояний от точки $z=0$ до точек z, в которых ряд (2) сходится. Тогда при $|z|>R$ этот ряд расходится. Из теоремы Абеля вытекает

Следствие 1. *Ряд (2) сходится в круге K: $|z|<R$, а в любом меньшем круге $|z|\leqslant R_1<R$ этот ряд сходится равномерно.*

Круг K называется *кругом сходимости*, а его радиус R — *радиусом сходимости* ряда (2). В точках окружности $|z|=R$ ряд (2) может как сходиться, так и расходиться. Если ряд (2) сходится только при $z=0$, то его радиус сходимости $R=0$, а если он сходится во всей комплексной плоскости, то $R=\infty$.

Радиус сходимости ряда (2) определяется формулой Коши — Адамара

$$R=1/l,\ l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}. \tag{4}$$

Доказательство формулы (4) см. в [1].

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}, \tag{5}$$

составленный из производных членов ряда (2). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то из (4) вытекает

Следствие 2. *Радиус сходимости ряда* (5) *равен радиусу сходимости ряда* (2).

2. Почленное дифференцирование степенного ряда.

Теорема 2. *Пусть радиус сходимости степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{6}$$

равен R ($R \neq 0$). *Тогда этот ряд можно почленно дифференцировать в круге* $|z| < R$ *любое число раз. Получаемые при дифференцировании ряды имеют тот же радиус сходимости, что и ряд* (6).

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}, \tag{7}$$

составленный из производных членов ряда (6). В силу следствия 2 ряд (7) сходится равномерно в круге K_1: $|z| \leqslant R_1 < R$ и его сумма $S(z)$ непрерывна в K_1. Покажем, что функция $f(z)$ дифференцируема в круге K_1 и

$$S(z) = f'(z). \tag{8}$$

Пусть γ — произвольная кривая, лежащая в круге K_1 и соединяющая точки 0 и z. Тогда (§ 9)

$$\int_0^z \zeta^k d\zeta = \frac{z^{k+1}}{k+1}.$$

Следовательно,

$$\int_0^z nc_n \zeta^{n-1} d\zeta = c_n z^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Интегрируя почленно по кривой γ (п. 2 § 5) равномерно сходящийся ряд (7) и учитывая, что интеграл $\int_0^z S(\zeta)\, d\zeta$ не зависит от пути интегрирования, получаем

$$\int_0^z S(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z nc_n \zeta^{n-1} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \tag{10}$$

Из (10) и (6) находим

$$\int_0^z S(\zeta)\,d\zeta = f(z) - c_0. \tag{11}$$

В силу следствия 3 § 9 функция $\int_0^z S(\zeta)\,d\zeta$ является первообразной для функции $S(z)$ и, следовательно, $S(z) = f'(z)$. Таким образом, функция $f(z)$ дифференцируема в круге K_1 и имеет место равенство (8), т. е. ряд (6) можно почленно дифференцировать в круге K_1. Но радиус R_1 круга K_1 можно взять сколь угодно близким к R, и поэтому ряд (6) можно почленно дифференцировать в круге K.

Операцию почленного дифференцирования, очевидно, можно применить к ряду (6) любое число раз. Теорема доказана.

Следствие 3. *Коэффициенты c_n степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{12}$$

сходящегося в круге K: $|z-a| < R$ $(R \neq 0)$, определяются формулами

$$c_0 = f(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Доказательство. Применяя теорему 2 к степенному ряду (12), получаем

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(z-a) + \ldots \tag{14}$$

для всех $z \in K$. Полагая в (14) и (12) $z = a$, приходим к формулам (13).

Из формул (13) вытекает единственность разложения функции в степенной ряд.

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$. Таким образом, всякий степенной ряд (12) в его круге сходимости есть ряд Тейлора суммы этого ряда.

§ 12. Свойства регулярных функций

Определение регулярной функции было дано в § 7 (п. 4). В этом параграфе будет доказана эквивалентность понятий дифференцируемости и регулярности в области и рассмотрены свойства регулярных функций.

1. Регулярность дифференцируемой в области функции.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ дифференцируема в области D, то она регулярна в этой области.*

Доказательство. Пусть $z=a$ — произвольная точка области D. Рассмотрим круг K: $|z-a|<\rho$, $\rho>0$, лежащий в области D вместе со своей границей γ_ρ: $|\zeta-a|=\rho$. Пусть z — произвольная точка круга K. В силу интегральной формулы Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{1}$$

Разложим функцию $\frac{1}{\zeta-z}$ в ряд (геометрическую прогрессию) по степеням $z-a$:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}. \tag{2}$$

Если $\zeta\in\gamma_\rho$, то

$$|\zeta-a|=\rho,\qquad \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{\rho}<1,$$

и, следовательно, ряд (2) сходится равномерно по ζ на окружности γ_ρ (признак Вейерштрасса). Ряд

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n, \tag{3}$$

полученный из ряда (2) умножением на $f(\zeta)$, также сходится равномерно на γ_ρ, так как функция $f(\zeta)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на γ_ρ. Интегрируя почленно по γ_ρ ряд (3), в силу равенства (1) получаем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{4}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{5}$$

Ряд (4) сходится в круге K: $|z-a|<\rho$, а это означает, что функция $f(z)$ регулярна в точке a. Так как a — произвольная точка области D, то функция $f(z)$ регулярна в области D. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и теоремы 4 § 7 вытекает

Следствие 1. *Для того чтобы функция $f(z)$ была регулярна в области D, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в этой области.*

Таким образом, в области D понятия дифференцируемости и регулярности эквивалентны. Отсюда и из свойств дифференцируемых функций (§ 7), в частности, вытекает, что если функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в области D, то их сумма, произведение и частное (при условии $g(z)\neq 0$) также регулярны в области D.

Аналогично, если функция $f(z)$ регулярна в области D, а функция $F(w)$ регулярна в области G и если множество значений функции $w=f(z)$ $(z\in D)$ принадлежит области G, то функция $\Phi(z)=F[f(z)]$ регулярна в D.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Ряд* (4) *заведомо сходится в круге* $|z-a|<R_1$, *где* R_1 — *расстояние от точки* $z=a$ *до границы области* D, *в которой функция* $f(z)$ *дифференцируема.*

Поэтому радиус сходимости степенного ряда (4) не меньше, чем R_1.

Следствие 3. *Если функция* $f(z)$ *регулярна в круге* K: $|z-a|<R$, *то она представляется рядом Тейлора*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

сходящимся во всем круге K.

Следствие 4. *Если функция* $f(z)$ *регулярна в точке* $z=a$, *то она регулярна в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство. Регулярная функция $f(z)$ представляется в некотором круге K: $|z-a|<\rho$ сходящимся рядом (4) и, следовательно, дифференцируема в этом круге (§ 11, теорема 2). Но по теореме 1 функция $f(z)$ регулярна в круге K. Это означает, что если $z_0\in K$, то

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Полученный ряд сходится в некотором круге $|z-z_0|<\rho_1$, $\rho_1\geqslant d$, где d — расстояние от точки z_0 до границы круга K.

Замечание 1. Функция, дифференцируемая в точке $z=a$, не обязана быть регулярной в этой точке, так как регулярная в точке $z=a$ функция дифференцируема не только в самой точке $z=a$, но и в некоторой ее окрестности. Так, функция $f(z)=\bar{z}^2$ дифференцируема только при $z=0$ (§ 7, пример 3, в) и поэтому не является регулярной в точке $z=0$.

2. Бесконечная дифференцируемость регулярной функции.

Теорема 2. *Если функция* $f(z)$ *дифференцируема в области* D, *то она бесконечно дифференцируема в этой области. Имеет место формула*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,\quad z\in D, \tag{6}$$

где γ_ρ — *граница круга* $|\zeta-z|\leqslant\rho$, *лежащего в области* D.