Глава V

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 28. Теоремы о вычетах

1. Вычет в конечной точке. Пусть функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки a $(a \neq \infty)$, т. е. в кольце K: $0 < |z-a| < \rho_0$. Тогда точка a является для функции либо изолированной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности, а функция $f(z)$ представляется в кольце K сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Определение 1. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке a (обозначается $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z)$) называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности точки a, т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{1}$$

По формуле (7) § 17

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} f(\zeta)\, d\zeta,$$

где окружность γ_ρ: $|z-a| = \rho$ $(0 < \rho < \rho_0)$ ориентирована положительно. Отсюда получаем

$$\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=a} f(z). \tag{2}$$

Таким образом, если $z = a$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то интеграл от функции $f(z)$ по границе достаточно малой окрестности точки a равен вычету в этой точке, умноженному на $2\pi i$. Очевидно, $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z) = 0$, если a — точка регулярности функции $f(z)$.

Во всех примерах этой главы контур интегрирования ориентирован положительно (если не оговорено противное).

Пример 1. Найдем вычет функции $e^{1/z}$ в точке $z=0$. Так как $e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\ldots$, то $c_{-1}=1$ и $\operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z}=1$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{|z|=1} e^{1/z}dz=2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z}=2\pi i. \quad \square$$

Пример 2. Пусть $f(z)=\frac{\sin z}{z^6}$. Тогда $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{5!}$, так как $f(z)=\frac{1}{z^6}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right)$ и $c_{-1}=\frac{1}{5!}$. Отсюда находим

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^6}\,dz=\frac{2\pi i}{5!}. \quad \square$$

Пример 3. Если $f(z)=z\cos\frac{1}{z+1}$, то $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=-\frac{1}{2}$, так как $f(z)=[(z+1)-1]\left[1-\frac{1}{2(z+1)^2}+\ldots\right]$ и $c_{-1}=-\frac{1}{2}$. $\square$

2. Вычисление вычета в полюсе $z=a$ $(a\neq\infty)$.

1. Случай простого полюса. Если точка a — простой полюс функции $f(z)$, то ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки a имеет вид

$$f(z)=c_{-1}(z-a)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

откуда находим $c_{-1}=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$, и поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{3}$$

В частности, если $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — регулярные в точке a функции, причем $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$, то точка a является простым полюсом функции $f(z)$, и по формуле (3) находим $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim\limits_{z\to a}\frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim\limits_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=$ $=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$, т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{4}$$

2. Случай кратного полюса. Если точка a — полюс порядка m для функции $f(z)$, то ряд Лорана в окрестности точки a имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots \tag{5}$$

Умножая обе части (5) на $(z-a)^m$, получаем

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \ldots \tag{6}$$

Дифференцируя равенство (6) $m-1$ раз и переходя к пределу при $z \to a$, находим $(m-1)!\, c_{-1} = \lim\limits_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z)\right]$, откуда получаем формулу для вычисления вычета в полюсе m-го порядка:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z)\right]. \tag{7}$$

В частности, если $f(z) = h(z)/(z-a)^m$, где функция $h(z)$ регулярна в точке a, $h(a) \neq 0$, то из (7) вытекает следующая формула:

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{h(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a). \tag{8}$$

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, имеющую полюс первого порядка в точке $z=1$ и полюс второго порядка в точке $z=2$. По формуле (3) имеем

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \left[\frac{z}{(z-2)^2}\right]_{z=1} = 1,$$

по формуле (8) получаем $\operatorname*{res}\limits_{z=2} f(z) = \left(\dfrac{z}{z-1}\right)'_{z=2} = -1$. □

Пример 5. Для функции $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ точки $z = k\pi$ (k — целое) являются простыми полюсами, и по формуле (4) находим

$$\operatorname*{res}_{z=k\pi} \operatorname{ctg} z = \left[\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right]_{z=k\pi} = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что главная часть ряда Лорана для функции $\operatorname{ctg} z$ в окрестности точки $k\pi$ равна $1/(z-k\pi)$. □

3. Вычет в бесконечно удаленной точке. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $\rho_0 < |z| < \infty$, т. е. в проколотой окрестности точки $z=\infty$. Тогда точка $z=\infty$ является для функции $f(z)$ либо изолированной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности, а функция $f(z)$ представляется в области $\rho_0 < |z| < \infty$ сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots \tag{9}$$

Определение 2. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке $z=\infty$ (обозначается $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$) называется число $-c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент при $1/z$ ряда Лорана для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, т. е.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{10}$$

По формуле (7) § 17 $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho} f(z)\,dz$, где окружность $|z| = \rho$ $(\rho > \rho_0)$ ориентирована против часовой стрелки. Отсюда в силу (10) находим

$$\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z), \tag{11}$$

где γ_ρ — окружность $|z| = \rho$, ориентированная по часовой стрелке.

Замечание 1. Формулы (2) и (11) можно объединить в одну. В самом деле, если функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности U конечной или бесконечно удаленной точки a, то интеграл от $f(z)$ по границе γ_ρ этой окрестности равен вычету в точке a, умноженному на $2\pi i$ (при обходе γ_ρ окрестность U в формулах (2) и (11) остается слева).

Пусть точка $z = \infty$ является нулем порядка k функции $f(z)$. Тогда в окрестности бесконечно удаленной точки функция $f(z)$ представляется рядом Лорана $f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \frac{c_{-(k+1)}}{z^{k+1}} + \ldots$, где $c_{-k} \neq 0$, и при $z \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k} \qquad (A = c_{-k} \neq 0).$$

Если $k=1$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_1 = -A$, а если $k \geqslant 2$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Таким образом,

$$f(z) \sim \frac{A}{z}\ (z \to \infty) \qquad \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -A, \tag{12}$$

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k}\ (z \to \infty,\ k \geqslant 2) \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{13}$$

Пример 6. Для функции $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots$ коэффициент $c_{-1} = 1$ и, следовательно, $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z} = -1$. Заметим, что эта функция регулярна в точке $z = \infty$, тем не менее вычет в этой точке не равен нулю. □

Пример 7. Для функции $f(z) = \frac{1}{z+2}\cos\frac{1}{z}$ точка $z = \infty$ является нулем первого порядка: $f(z) \sim 1/z$ $(z \to \infty)$. По формуле (12) находим, что $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$. □

Пример 8. Для функции $f(z)=\frac{z}{z^3+1}\sin\frac{1}{z}$ точка $z=\infty$ является нулем третьего порядка: $f(z)\sim 1/z^3$ $(z\to\infty)$. По формуле (13) получаем $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$. □

Пример 9. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь аналитической функции $\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^\alpha$ в плоскости с разрезом $[-1, 1]$, принимающая значение 1 в точке $z=0$ верхнего берега разреза (пример 17 § 24). Тогда ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид $f(z)=e^{-i\alpha\pi}\left(1-\frac{2\alpha}{z}+\ldots\right)$, откуда получаем $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=2\alpha e^{-i\alpha\pi}$. □

4. Основная теорема теории вычетов.

Теорема 1 (основная теорема теории вычетов). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и пусть γ — простая замкнутая кривая, лежащая в области D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда*

$$\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{14}$$

где кривая γ ориентирована положительно.

Доказательство. Пусть γ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z_k, ориентированная против часовой стрелки. В силу следствия 2 § 9 имеем

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz,$$

откуда, используя (2), получаем формулу (14).

Следствие. *Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая вычет в точке $z=\infty$, равна нулю, т. е.*

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0. \tag{15}$$

Здесь z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ — все конечные особые точки функции $f(z)$, а точка $z=\infty$ является либо особой точкой, либо точкой регулярности функции $f(z)$.

Доказательство. Пусть γ — ориентированная в положительном направлении окружность $|z|=R$, где R выбрано так, что все точки z_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ лежат внутри γ. По теореме 1

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{16}$$

С другой стороны, из формулы (11) следует, что

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \tag{17}$$

Из равенств (16) и (17) вытекает формула (15).

Обобщением теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек, и непрерывна вплоть до границы Γ этой области. Пусть Γ состоит из конечного числа ограниченных кусочно гладких кривых. Тогда*

а) *если область D не содержит точку $z=\infty$, то*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z); \tag{18}$$

б) *если точка $z=\infty$ принадлежит области D, то*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right). \tag{19}$$

Здесь $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все конечные особые точки функции $f(z)$, лежащие в области D.

Доказательство. а) Пусть D — ограниченная область. Рассмотрим многосвязную область $\tilde{D}$, полученную из области D выбрасыванием кругов K_j достаточно малого радиуса с центрами в точках z_j $(j=1, 2, \ldots, n)$. В силу теоремы 4 § 9 интеграл от $f(z)$ по границе $\tilde{\Gamma}$ области $\tilde{D}$ равен нулю, т. е.

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0, \tag{20}$$

где граница γ_j круга K_j ориентирована по часовой стрелке. Так как

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z)$$

(формула (2)), то из (20) вытекает формула (18).

б) Пусть K — круг $|z|<R$, содержащий внутри себя границу области D и все конечные особые точки функции $f(z)$ (рис. 68). Рассмотрим область $\tilde{G}$, полученную из области $G = D \cap K$ выбрасыванием кругов K_j, указанных выше. Граница $\tilde{\Gamma}$

области $\widetilde{G}$ состоит из границы Γ области D, окружностей γ_j и окружности γ_R: $|z|=R$. Имеем

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\gamma_j} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0, \tag{21}$$

где кривая γ_R ориентирована положительно. Так как

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z),$$

то из равенства (21) следует формула (19). Теорема доказана.

Теорема о вычетах является одной из самых важных теорем теории функций комплексного переменного. С помощью этой теоремы можно эффективно вычислять многие определенные интегралы.

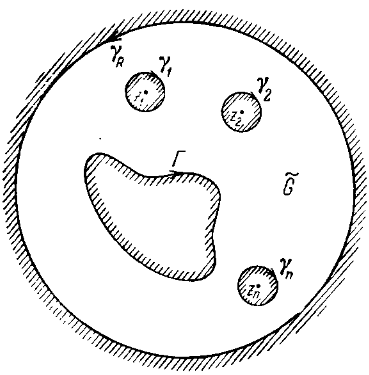

Рис. 68.

5. Вычисление интегралов по замкнутому контуру. Рассмотрим несколько примеров на вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов. Во всех этих примерах обход контура интегрирования γ совершается в положительном направлении (при обходе кривой γ ее внутренность остается слева).

Пример 10. Пусть $f(z)=(\cos z)/z^3$. Тогда по формуле (14)

$$\int\limits_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z).$$

Так как в круге $|z|<2$ функция $f(z)$ имеет одну особую точку $z=0$ (полюс) и $f(z)=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{4!}z+\ldots$, то $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=c_{-1}=$ $=-1/2$. Следовательно, $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3}\,dz=-\pi i.$ $\square$

Пример 11. Пусть $f(z)=1/(e^z+1)$. Тогда $I=\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} f(z)\,dz=$ $=2\pi i \operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z)$, так как функция $f(z)$ имеет внутри круга $|z-2i|<2$ одну особую точку, а именно, полюс первого порядка $z=\pi i$. По формуле (4) находим

$$\operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{1}{(e^z+1)'_{z=\pi i}} = -1$$

и, следовательно, $I=-2\pi i$. $\square$

Пример 12. Если $f(z)=(2z-1)\cos\frac{z}{z-1}$, то $I=\int\limits_{|z|=2} f(z)dz=$
$=2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)$, так как функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<2$, кроме точки $z=1$, которая является существенно особой. Имеем

$$\cos\frac{z}{z-1}=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\cos 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}-\sin 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}=$$
$$=\cos 1\left(1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\ldots\right)-\sin 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!\,(z-1)^3}+\ldots\right),$$
$$2z-1=2(z-1)+1,$$

откуда находим коэффициент c_{-1} при $(z-1)^{-1}$ ряда Лорана для функции $f(z)$:

$$c_{-1}=-(\cos 1+\sin 1).$$

Следовательно, $I=-2\pi i(\cos 1+\sin 1)$. □

Пример 13. Вычислим интеграл $I=\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\,dz$.

Способ 1. Функция $f(z)=\frac{1}{z-2}e^{1/(z-1)}$ имеет в круге $|z|<$ <4 две особые точки: $z=1$ и $z=2$. Следовательно,

$$I=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z)+\operatorname*{res}_{z=2} f(z)\right).$$

Так как

$$e^{1/(z-1)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,(z-1)^n},\quad \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,$$

то $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1-e$. Далее,

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z)=\left(e^{1/(z-1)}\right)_{z=2}=e.$$

Таким образом, $I=2\pi i$. □

Способ 2. $I=-2\pi i\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$. Точка $z=\infty$ является для $f(z)$ нулем первого порядка:

$$\frac{1}{z-2}\sim\frac{1}{z},\quad e^{1/(z-1)}\sim 1,\quad f(z)\sim\frac{1}{z}\qquad (z\to\infty).$$

По формуле (12) получаем $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-1$ и, следовательно, $I=$ $=2\pi i$. □

Пример 14. Пусть $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$ — многочлен степени $n\geqslant 2$ и пусть γ — окружность, внутри которой лежат все нули этого многочлена. Покажем, что функция

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{z\zeta}}{P(\zeta)}\,d\zeta \tag{22}$$

удовлетворяет уравнению

$$P\left(\frac{d}{dz}\right)w(z)\equiv w^{(n)}(z)+a_1w^{(n-1)}(z)+\ldots+a_{n-1}w'(z)+a_nw(z)=0 \tag{23}$$

и следующим начальным условиям:

$$w(0)=0,\ w'(0)=0,\ \ldots,\ w^{(n-2)}(0)=0,\quad w^{(n-1)}(0)=1. \tag{24}$$

Из (22) находим $w^{(k)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\zeta^k e^{z\zeta}}{P(\zeta)}\,d\zeta$ и, следовательно,

$$P\left(\frac{d}{dz}\right)w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}e^{z\zeta}d\zeta=0.$$

Формула (23) доказана.

Проверим выполнение условий (24). Имеем

$$w^{(k)}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\zeta^k}{P(\zeta)}\,d\zeta=-\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}\frac{\zeta^k}{P(\zeta)}. \tag{25}$$

Если $k<n$, то функция $\zeta^k/P(\zeta)$ имеет в точке $\zeta=\infty$ нуль порядка $n-k$ и, следовательно, при $k\leqslant n-2$ получаем $\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}\zeta^k/P(\zeta)=0$. Таким образом, $w^{(k)}(0)=0$ при $k=0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ n-2$. Пусть $k=n-1$; тогда $\zeta^{n-1}/P(\zeta)\sim 1/\zeta$ $(\zeta\to\infty)$, так что $\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}\left(\zeta^{n-1}/P(\zeta)\right)=-1$ и из (25) следует, что $w^{(n-1)}(0)=1$. $\square$

6. Интегралы от многозначных функций. Рассмотрим несколько примеров на вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных аналитических функций. В примерах 15—18 нужно вычислить интегралы от всех ветвей многозначных аналитических функций, стоящих под знаком интеграла.

Пример 15. Вычислим интеграл $\int\limits_{|z-1|=1/2}\frac{\sqrt{z}}{z-1}\,dz$. Функция $\sqrt{z}$ распадается в круге K: $|z-1|<1/2$ на две регулярные ветви $g_1(z)$ и $g_2(z)\equiv -g_1(z)$ и, следовательно, подынтегральная функция распадается на две регулярные ветви $f_1(z)=g_1(z)/(z-1)$ и $f_2(z)=g_2(z)/(z-1)$. Пусть $g_1(z)$ — та ветвь корня, для которой $g_1(1)=1$; тогда $g_2(1)=-1$. Каждая из функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ регулярна в круге K, кроме точки $z=1$, которая является их