Поэтому существование $d^{k+1}f(x_0)$ эквивалентно существованию $f^{(k+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$ и в случае существования $f^{(k+1)}(x_0) \in \mathbb{R}$ справедлива формула $d^{k+1}f(x_0) = = f^{(k+1)}(x_0)\,(dx)^{k+1}$. Следовательно, утверждение теоремы справедливо при $n = k+1$. По индукции получаем, что теорема справедлива при любом $n \in \mathbb{N}$.

■

Замечание. (Неинвариантность формы дифференциалов выше 1-го порядка.)

Пусть заданы дважды дифференцируемые функции $y(x)$ и $z(y)$. Найдем второй дифференциал сложной функции $z = \varphi(x) = z(y(x))$.

В силу инвариантности формы первого дифференциала $d\varphi(x) = z'(y(x))\,dy(x)$.

По правилу вычисления дифференциала произведения $d^2\varphi(x) = d(z'(y(x))) \cdot dy(x) + z'(y(x)) \cdot d(dy(x)) = = z''(y(x))\,(dy(x))^2 + z'(y(x))\,d^2y(x)$.

Итак, для сложной функции $z = z(y(x))$: $d^2z = = z''(y)(dy)^2 + z'(y)d^2y$, в то время, как для простой функции $z = z(y)$: $d^2z = z''(y)(dy)^2$. Таким образом, формулы для вторых дифференциалов простой и сложной функции не совпадают. То же относится к дифференциалам порядков $n > 2$.

§ 4. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Определение. Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой локального минимума* функции f, если

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \bigcap X \quad f(x_0) \le f(x).$$

2. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой локального максимума* функции f, если

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(x_0) \bigcap X \quad f(x_0) \geq f(x).$$

3. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой локального экстремума* функции f, если x_0 является точкой локального минимума или максимума f.

Точки локального экстремума, которые мы сейчас определили называются также точками *нестрогого* локального экстремума. Определим точки строгого локального экстремума.

4. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой строгого локального минимума* функции f, если

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \bigcap X \quad f(x_0) < f(x).$$

5. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой строгого локального максимума* функции f, если

$$\exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \bigcap X \quad f(x_0) > f(x).$$

6. Точки строгого локального минимума и строгого локального максимума называются *точками строгого локального экстремума.*

Непосредственно из определения следует, что точка строгого локального экстремума является точкой нестрогого локального экстремума. Обратное неверно. Например, для функции, равной константе, все точки множества определения являются точками нестрогого экстремума, а строгих экстремумов нет.

Теорема 1. (Теорема Ферма.) Пусть функция f определена на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ – точка (нестрогого) локального экстремума функции f. Тогда если f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности x_0 – точка локального минимума f.
Определим $\delta_0 = \min\{b - x_0, x_0 - a\}$. Тогда $\exists \delta \in (0, \delta_0)$: $\forall x \in U_\delta(x_0) \quad f(x_0) \leq f(x)$. Поэтому при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, следовательно, по теореме о предельном переходе в неравенствах правая производная неотрицательна: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} \frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0} \geq 0$.
Аналогично, $f'_-(x_0) \leq 0$. Если $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ и, следовательно, $f'(x_0) = 0$.

■

Замечание. В точке локального экстремума производная может

а) не существовать, как, например, для $f(x) = |x|$ не существует $f'(0)$ или

б) быть бесконечной, как, например, для $f(x) = \sqrt{|x|}$ $f'(0) = \infty$.

Теорема 2. (Теорема Ролля.) Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) и пусть $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса (теорема 2 § 6 главы 2) $\exists m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $\exists M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Если $m = M$, то $f(x) = \text{const}$ на $[a, b]$. Взяв произвольную точку $\xi \in (a, b)$, получим требуемое утверждение.

Если $m \neq M$, то либо $m < f(a)$, либо $f(a) < M$. Рассмотрим, например, случай $m < f(a)$. По определению минимума $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = m < f(a) = f(b)$. Следовательно, $\xi \in (a, b)$ и по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$.

■

Теорема 3. (Теорема Коши о среднем.) Пусть функции f и g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на

(a, b). Пусть $g(b) \neq g(a)$ и $\forall x \in (a, b) \quad g'(x) \neq 0$. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : \qquad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - kg(x)$, где коэффициент k определим из условия $\varphi(a) = \varphi(b)$: $\quad f(b) - kg(b) = f(a) - kg(a)$, т. е. $k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

По теореме Ролля $\exists \xi \in (a, b) : \varphi(\xi) = 0$, т. е. $f'(\xi) - kg'(\xi) = 0$, следовательно, $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

■

Замечание. Условие $g(b) \neq g(a)$ теоремы Коши о среднем следует из условия $\forall x \in (a, b) \quad g'(x) \neq 0$ и теоремы Ролля.

Теорема 4. (Теорема Лагранжа о среднем.) Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$, для которой справедлива формула конечных приращений Лагранжа: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Доказательство состоит в применении теоремы Коши о среднем для функций $f(x)$ и $g(x) = x$.

Задача. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с непрерывной производной такая, что

$\forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in (0, \delta) : \quad f(x_1) \geq x_1, \quad f(x_2) \leq -x_2$?

Задача. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x_0, x_1]$ и дифференцируема на интервале (x_0, x_1).

а) Доказать, что из существования в точке x_0 предела справа производной функции $f \quad f'(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$ следует существование в точке x_0 правой производной функции $f \quad f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ и равенство $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$.