Пусть
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \mathbb{R}.$$
Тогда существует
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство следствия 2 аналогично доказательству следствия 1.

Аналогично можно сформулировать теорему для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to b-0$ и при $x \to -\infty$.

**Теорема 3.** а) $\forall \alpha > 0 \quad \ln x = o(x^\alpha)$ при $x \to +\infty$;
б) $\forall \alpha > 0 \quad x^\alpha = o(e^x)$ при $x \to +\infty$.

**Доказательство.** а) В силу следствия 2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$

б) Определим $y(x) = e^x$, $\beta = 1/\alpha$, тогда в силу пункта (а) $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{(\ln y)}{y^\beta} = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln y(x))^\alpha}{y(x)} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y^\beta}\right)^\alpha = 0.$

■

## § 8. Исследование функций с помощью производных

**Теорема 1.** Пусть функция $f$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Тогда

1) $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ является неубывающей на $[a,b]$;

2) $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ является невозрастающей на $[a,b]$;

3) если $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) > 0$, то $f$ строго возрастает на $[a,b]$;

4) если $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) < 0$, то $f$ строго убывает на $[a,b]$.

**Доказательство.** 1. а) Пусть $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \geq 0$. Покажем, что функция $f$ является неубывающей на $[a,b]$. Пусть заданы произвольные $x_1, x_2 \in [a,b]$: $x_1 < x_2$. Требуется доказать, что $f(x_2) \geq f(x_1)$. По теореме Лагранжа о среднем $\exists \xi \in (x_1, x_2)$: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$. Так как $f'(\xi) \geq 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$.

1. б) Пусть функция $f$ является неубывающей на $[a,b]$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и покажем, что $f'(x_0) \geq 0$. Так как $f$ является неубывающей на $[a,b]$, то для любой точки $x \in [a,b]$ такой, что $x \neq x_0$, справедливо неравенство $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. В силу теоремы о предельном переходе в неравенствах получаем $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

Пункт 2 доказывается аналогично. Доказательство пунктов 3, 4 аналогично доказательству пункта 1 а).

■

**Замечание.** Из строгого возрастания дифференцируемой функции $f$ не следует неравенство $f'(x) > 0$. Например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает, но $f'(0) = 0$.

**Теорема 2.** (Первое достаточное условие экстремума.) Пусть функция $f$ дифференцируема в некоторой $U_\delta(x_0)$. Тогда

1) если $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f'(x) < 0$ (т. е. производная меняет знак с плюса на минус), то $x_0$ – точка строгого локального максимума $f$;

2) если $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f'(x) > 0$ (т. е. производная меняет знак с минуса на плюс), то $x_0$ – точка строгого локального минимума $f$.

**Доказательство.** 1) По теореме 1 функция $f$ строго убывает на $[x_0-\delta/2, x_0]$ и строго возрастает на $[x_0, x_0+\delta/2]$. Следовательно, $x_0$ – точка строгого локального минимума $f$. Доказательство пункта 2 – аналогично.

■

Аналогично можно сформулировать достаточные условия нестрогого экстремума.

**Теорема 3.** (Второе достаточное условие экстремума.) Пусть в некоторой окрестности точки $x_0$ определена функция $f$ такая, что $\exists f^{(n)}(x_0)$, пусть $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$ $\quad f^{(k)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда

1) если $n$ – четно, то при $f^{(n)}(x_0) > 0 \quad x_0$ является точкой строгого локального минимума функции $f$, при $f^{(n)}(x_0) < 0 \quad x_0$ является точкой строгого локального максимума функции $f$;

2) если $n$ – нечетно, то $x_0$ не является точкой (нестрогого) локального экстремума функции $f$.

**Доказательство.** В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$. Следовательно, $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(1)$ при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$. Определим $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(x_0)\right|$. По определению предела $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} \in U_\varepsilon\left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\right)$.

Пусть, например, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда

$$\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} > 0.$$

Поэтому в случае четного $n$ $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ $f(x) - f(x_0) > 0$, следовательно, $x_0$ – точка строгого локального минимума. В случае нечетного $n$: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f(x) - f(x_0) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) - f(x_0) > 0$, следовательно, $x_0$ не является точкой нестрогого экстремума. Случай $f^{(n)}(x_0) < 0$ рассматривается аналогично.

■

Рассмотрим необходимые условия экстремума. Необходимым условием экстремума в терминах первой производной является теорема Ферма (теорема 1 § 4).

**Теорема 4.** (Необходимое условие экстремума в терминах второй производной.) Пусть функция $f$ определена в некоторой $U_\delta(x_0)$ и $\exists f''(x_0)$. Тогда

1) если $x_0$ – точка (нестрогого) локального минимума функции $f$, то $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \geq 0$;

2) если $x_0$ – точка (нестрогого) локального максимума функции $f$, то $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \leq 0$.

**Доказательство.** 1) Пусть $x_0$ – точка локального минимума. В силу теоремы Ферма $f'(x_0) = 0$. Если $f''(x_0) < 0$, то по теореме 3 $x_0$ является точкой строгого локального максимума и, следовательно, не может являться точкой (нестрогого) локального минимума. Полученное противоречие показывает, что $f''(x_0) \geq 0$.

Доказательство пункта 2 – аналогично.

■

**Замечание.** Из условий $\exists f''(x_0)$ и $x_0$ – точка строго локального минимума не следует неравенство $f''(x_0) > 0$. Например, $x_0 = 0$ является точкой строгого минимума функции $f(x) = x^4$, но $f''(0) = 0$.

**Определение.** Функция $f : (a, b) \to I\!R$ называется *выпуклой вниз*, если каждая точка любой хорды к графику функции $f$ лежит не ниже графика $f$. Функция $f : (a, b) \to \to I\!R$ называется *выпуклой вверх*, если каждая точка любой хорды к графику функции $f$ лежит не выше графика $f$.

Каждая точка хорды, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, может быть записана в виде $\Big(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\Big)$, где $t \in [0, 1]$. Поэтому условие выпуклости вниз функции $f$ на $(a, b)$ можно записать в виде

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall x_1, x_2 : \ a < x_1 < x_2 < b,$$

а условие выпуклости вверх функции $f$ на $(a, b)$ – в виде

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \ge tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall x_1, x_2 : \ a < x_1 < x_2 < b.$$

**Теорема 5.** Пусть функция $f$ дважды дифференцируема на $(a, b)$. Тогда

1) функция $f$ выпукла вниз на $(a, b)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \quad f''(x) \ge 0 \quad \forall x \in (a, b)$;

2) функция $f$ выпукла вверх на $(a, b)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \quad f''(x) \le 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

**Доказательство.** 1. а) Пусть функция $f$ выпукла вниз на $(a, b)$. Зафиксируем произвольное $x_0 \in (a, b)$ и покажем, что $f''(x_0) \ge 0$. Определим $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Тогда $\forall u \in (-\delta, \delta)$ справедливы условия $x_0 \pm u \in (a, b)$. Применяя условие выпуклости вниз для $x_1 = x_0 - u$, $x_2 = x_0 + u$, $t = \frac{1}{2}$ и замечая, что $tx_1 + (1-t)x_2 = x_0$, получим

$$f(x_0) \le \frac{1}{2} f(x_0 - u) + \frac{1}{2} f(x_0 + u) \quad \forall u \in (-\delta, \delta). \qquad (1)$$

Раскладывая по формуле Тейлора, имеем
$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)\,u + \frac{1}{2}f''(x_0)\,u^2 + o(u^2)$ при $u \to 0$, следовательно,

$$\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\,u^2 + o(u^2).$$

Отсюда и из формулы (1) имеем

$$\frac{1}{2}f''(x_0)\,u^2 + o(u^2) = \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \geq 0.$$

Деля это неравенство на $u^2$, получаем $\frac{1}{2}f''(x_0) + o(1) \geq \geq 0$, где $o(1)$ – это такая функция $\varphi(u)$, что $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u) = 0$. Переходя к пределу при $u \to 0$, получим $\frac{1}{2}f''(x_0) \geq 0$, т. е. $f''(x_0) \geq 0$.

1. б) Пусть $\forall x \in (a, b) \quad f''(x) \geq 0$. Покажем, что функция $f$ выпукла вниз на $(a, b)$. Зафиксируем произвольные числа $t \in [0, 1]$ и $x_1, x_2$ такие, что $a < x_1 < x_2 < b$. Обозначим $x_0 = tx_1 + (1 - t)x_2$. Требуется доказать, что

$$f(x_0) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2). \tag{2}$$

Если $t = 0$ или $t = 1$, то неравенство (2) тривиально выполняется (выполняется равенство). Поэтому будем предполагать, что $t \in (0, 1)$.

В силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа
$\exists \xi_1 \in (x_1, x_0) : \quad f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) + + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\,(x_1 - x_0)^2$ и
$\exists \xi_2 \in (x_0, x_2) : \quad f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x_2 - x_0) + + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\,(x_2 - x_0)^2$.

Поскольку $f''(\xi_1) \geq 0$ и $f''(\xi_2) \geq 0$, то $f(x_1) \geq f(x_0) + + f'(x_0)\,(x_1 - x_0)$ и $f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x_2 - x_0)$, следовательно,

$$tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \geq$$

$$\geq tf(x_0)+(1-t)f(x_0)+f'(x_0)\Big(t(x_1-x_0)+(1-t)(x_2-x_0)\Big) =$$

$$= f(x_0)+f'(x_0)\Big(tx_1+(1-t)x_2-x_0\Big) \overset{\text{по опр. } x_0}{=} f(x_0).$$

Поэтому справедливо неравенство (2).

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

■

**Определение.** Пусть функция $f$ определена и непрерывна в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$ и пусть $\exists f'(x_0) \in \overline{I\!R}$. Точка $x_0$ называется *точкой перегиба* функции $f$, если $\exists \delta \in (0, \delta_0)$ такое, что на одном из интервалов $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ функция выпукла вниз, а на другом – выпукла вверх.

**Теорема 6.** (Необходимые и достаточные условия точки перегиба.) Пусть функция $f$ непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дважды дифференцируема в $\overset{o}{U}_{\delta_0}(x_0)$, пусть $\exists f'(x_0) \in \overline{I\!R}$. Тогда $x_0$ является точкой перегиба функции $f$ в том и только в том случае, когда существует $\delta \in (0, \delta_0)$:
либо $\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \quad f''(x) \geq 0$ и
$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \quad f''(x) \leq 0$,
либо $\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \quad f''(x) \leq 0$ и
$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \quad f''(x) \geq 0$,
т. е. вторая производная меняет знак в точке $x_0$.

**Доказательство** следует непосредственно из теоремы 5 и определения точки перегиба.

■

**Теорема 7.** Пусть функция $f$ дважды дифференцируема в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$. Пусть $x_0$ – точка перегиба функции $f$, $\quad y_{\text{кас}}(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ – уравнение касательной. Тогда $\exists \delta > 0$: