$\varphi(t) = f(r(t))$ непрерывна на отрезке $[t_1, t_2]$, то по теореме Коши о промежуточном значении для функции одной переменной для любого числа y_0, лежащего между y_1 и y_2, существует $t_0 \in [t_1, t_2]$: $\varphi(t_0) = y_0$. Следовательно, $x_0 = r(t_0) \in X$ и $f(x_0) = y_0$.

■

Определение. Открытое связное множество называется *областью*.

Заметим, что множество определения функции может не являться областью. Поэтому лучше говорить не "область определения функции", а "множество определения функции".

Задача. Являются ли областями в $\mathbb{R}^n$ следующие множества

а) $U_\varepsilon(x_0)$, где $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$;

б) $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| > \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$;

в) $U_{\varepsilon_1}(a) \bigcup U_{\varepsilon_2}(b)$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $|b - a| > \varepsilon_1 + \varepsilon_2$?

Указания: 1) открытость ε-окрестности в $\mathbb{R}^n$ доказана в главе 5;

2) для доказательства несвязности множества (в) применить теорему о промежуточном значении для непрерывной функции $f(x) = |x - a|$.

§ 4. Равномерная непрерывность функции на множестве

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что $f(x)$ *равномерно непрерывна* на X, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{1}$$

Лемма 1. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X, то она непрерывна на множестве X. Обратное неверно.

Доказательство. Условие непрерывности функции на множестве X можно записать в виде

$$\begin{gathered} \forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x' \in X \\ |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{2}$$

Формально условия (1) и (2) отличаются порядком кванторов; фактическое отличие этих условий состоит в том, что в условии (1) число δ – единое для всех x, т. е. не зависит от x, а в условии (2) число δ – свое для каждого x. Поэтому из условия (1) следует условие (2).

Покажем, что из условия (2) не следует условие (1). Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ на множестве $X = \mathbb{R}$. Поскольку $f(x) = x^2$ – непрерывная функция, то условие (2) выполняется. Покажем, что для этой функции условие (1) не выполняется, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x, x' \in X : \ |x - x'| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$

Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\forall \delta > 0\ \exists x = \frac{1}{\delta},\ x' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} : \quad |x - x'| = \delta/2 < \delta$ и $|f(x) - f(x')| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2}\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon$. Следовательно, функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

■

Теорема 1. (Теорема Кантора.) Если функция $f(x)$ непрерывна на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на этом компакте.

Доказательство. Предположим противное, т. е. функция $f(x)$ непрерывна на компакте $X \subset I\!R^n$, но не является равномерно непрерывной на X. Это означает, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\, \exists x, x' \in X : \ |x-x'| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x)-f(x')| \geq \varepsilon.$$

Взяв последовательность $\{\delta_k\} = \{\frac{1}{k}\}$, получим

$$\begin{gathered} \exists \varepsilon > 0 : \forall k \in I\!N\ \exists x_k, x'_k \in X : \\ |x_k - x'_k| < \tfrac{1}{k} \quad \text{и} \quad |f(x_k) - f(x'_k)| \geq \varepsilon. \end{gathered} \tag{3}$$

Поскольку X – компакт, то из последовательности $\{x_k\} \subset \subset X$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$.

Покажем, что последовательность $\{x'_{k_j}\}$ также будет сходиться к x_0. Действительно, в силу неравенства треугольника

$$|x'_{k_j} - x_0| \leq |x'_{k_j} - x_{k_j}| + |x_{k_j} - x_0| \leq \frac{1}{k_j} + |x_{k_j} - x_0| \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Итак, $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = x_0$ и $\lim\limits_{j\to\infty} x'_{k_j} = x_0$. В силу непрерывности функции $f(x)$ на множестве X имеем $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{j\to\infty} f(x'_{k_j}) = f(x_0)$, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} |f(x_{k_j}) - f(x'_{k_j})| = 0. \tag{4}$$

Применяя (3) для $k = k_j$, получим $\exists \varepsilon > 0 : \forall j \in \in I\!N \quad |f(x_{k_j}) - f(x'_{k_j})| \geq \varepsilon$, что противоречит (4). Полученное противоречие показывает, что непрерывная на компакте функция должна быть равномерно непрерывна на этом компакте.

■