Вопрос 22. Потенциалы простого и двойного слоя. Теоремы о среднем.

Рассмотрим классическое решение $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ уравнения Пуассона

$$-\triangle u = f(x) \tag{1}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей.

Лемма. *Для любой точки $x^\circ \in \Omega$ имеет место представление:*

$$u(x^\circ) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r} f(x)\, dx - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \Big)\, ds_x\,, \tag{2}$$

где $r \stackrel{\text{def}}{=} |x - x^\circ|$, n — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а $f = f(x) \in C(\Omega)$ такова, что первый интеграл в правой части (2) существует, например, $f \in C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Вырежем точку $x^\circ \in \Omega$ шаром $B_\varepsilon(x^\circ)$ достаточно малого радиуса ε и используем вторую формулу Грина, в которой в качестве функции $v = v(x)$ выберем $v(x) = -1/r$, где $r = |x - x^\circ|$. Очевидно, $\triangle \frac{1}{r} = 0$ в $\Omega \setminus B_\varepsilon(x^\circ)$. При этом из второй формулы Грина находим

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Omega} \frac{1}{r} \triangle u dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x^\circ)} \frac{1}{r} \triangle u dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x^\circ)} \Big(-\frac{1}{r} \triangle u + u \triangle \frac{1}{r} \Big) dx = \\ = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \Big) ds_x + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} \Big(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \Big)\, ds_x\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим предел последнего слагаемого при $\varepsilon \to 0$. Для единичной внешней нормали к сфере радиуса ε выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\,,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} u(x) ds_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} [u(x) - u(x^\circ)] ds_x + \frac{1}{\varepsilon^2} u(x^\circ) \int\limits_{\partial B_\varepsilon} ds_x = \\ = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} [u(x) - u(x^\circ)] ds_x + 4\pi u(x^\circ). \end{aligned}$$

А так как $u(x) \in C(\overline{\Omega})$, то $|u(x) - u(x^\circ)| \leqslant \varepsilon_1$ при $|x - x^\circ| \leqslant \varepsilon$, откуда находим

$$\Big| \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} [u(x) - u(x^\circ)] ds_x \Big| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon_1\,.$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} u(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} ds_x = 4\pi u(x^\circ).$$

В силу ограниченности $|\frac{\partial u}{\partial n}| \leqslant M$ в $\overline{\Omega}$, имеем

$$\Big| -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x^\circ)} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} ds_x \Big| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{M}{\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = 0.$$

Подставляя значения рассмотренных пределов в (3), получаем:

$$-\int\limits_{\Omega} \frac{1}{r} \triangle u dx = 4\pi u(x^\circ) + \int\limits_{\partial\Omega} \Big[u \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \Big] ds_x,$$

Откуда, заменяя $-\triangle u$ на $f(x)$, получаем формулу (2). Лемма доказана. □

Если бы были известны одновременно граничные данные $u|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$ для решения уравнения (1), то формула (2) давала бы явное представление решения краевой задачи для уравнения Пуассона (1) в произвольной ограниченной области. Однако, мы не можем произвольно задать $u|_{\partial\Omega} = \varphi_1(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi_2(x)$ (в данном случае можно задать или $u|_{\partial\Omega}$, или $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$), и поэтому формула (2) не дает решения краевой задачи. Тем не менее, формулу (2) используют для представления решения краевой задачи через функцию Грина. Интегралы же, входящие в (2), имеют непосредственный физический смысл. Так, первый из интегралов в правой части (2) называется ньютоновским потенциалом с плотностью $f = f(x)$. Интеграл $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{1}{r}\varphi_2(x) ds_x$ называется потенциалом простого слоя с плотностью $\varphi_2(x)$, а интеграл $\int\limits_{\partial\Omega} \varphi_1(x) \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} ds_x$ называется потенциалом двойного слоя с плотностью $\varphi_1(x)$. С помощью потенциалов простого и двойного слоя можно строить решения задач Неймана и Дирихле для уравнений Лапласа (и Пуассона), сводя эти задачи к интегральным уравнениям.

Теорема (о среднем по сфере)**.** *Функция $u(x) \in C^2(B_\rho(x^\circ)) \cap C(\overline{B_\rho(x^\circ)})$, гармоническая в шаре $B_\rho(x^\circ)$, удовлетворяет равенству*

$$u(x^\circ) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int\limits_{\partial B_\rho(x^\circ)} u(x)\, ds. \tag{4}$$

Доказательство. Для гармонической функции $u = u(x)$ интегральное представление (2) принимает вид

$$u(x^\circ) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \Big)\, ds_x \tag{5}$$

при любом выборе внутренней точки $x^\circ \in \Omega$. Выбирая в (5) в качестве области Ω шар $B_\rho(x^\circ)$ радиуса $\rho > 0$, находим

$$u(x^\circ) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial B_\rho(x^\circ)} \Big(u(x) \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \Big)\, ds_x \tag{5$'$}$$

Так как функция $r = |x - x^\circ|$ на сфере $\partial B_\rho(x^\circ)$ зависит только от ρ, то в силу формулы Остроградского–Гаусса имеем

$$\int\limits_{\partial B_\rho(x^\circ)} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \frac{1}{\rho} \int\limits_{\partial B_\rho(x^\circ)} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \frac{1}{\rho} \int\limits_{\partial B_\rho(x^\circ)} \triangle u\, ds = 0.$$

Учитывая, что на сфере $\partial B_\rho(x^\circ)$ производная по внешней нормали $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$, получаем $\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial n}\Big|_{\partial B_\rho(x^\circ)} = \frac{1}{4\pi\rho^2}$, откуда и из (5′) находим

$$u(x^\circ) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int\limits_{\partial B_\rho(x^\circ)} u(x)\, ds. \tag{6}$$

Теорема доказана. □

Следствие 1 (о среднем по шару). *Для функции $u(x) \in C^2(B_R(x^\circ)) \cap C(\overline{B_R(x^\circ)})$, гармонической в шаре $B_R(x^\circ)$, ее значение в центре шара равно среднему арифметическому ее значений по шару, т.е.*

$$u(x^\circ) = \frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_{B_R(x^\circ)} u(x)\, dx. \tag{7}$$

Для доказательства достаточно умножить равенство (6) на $4\pi\rho^2$ и проинтегрировать его по ρ от 0 до R, что приводит к равенству

$$u(x^\circ) \int\limits_0^R 4\pi r^2\, dr = \int\limits_0^R \Big(\int\limits_{\partial B_\rho(x^\circ)} u(x) ds \Big) d\rho,$$

которое переписывается в виде (7).

Следствие 2 (о бесконечной дифференцируемости гармонических функций). *Гармоническая в Ω функция $u(x)$ имеет в каждой точке внутри области Ω непрерывные производные любого порядка.*

Доказательство следует из интегрального представления (5) гармонической функции в виде потенциалов, так как стоящие в правой части интегралы можно дифференцировать по параметру x° любое число раз во всякой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ такой, что $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ (т.е. когда $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) = h \geqslant h_0 > 0$), ввиду бесконечной дифференцируемости по $x^\circ \in \Omega$ при $|x - x^\circ| \geqslant h_0 > 0$ функции

$$\mathcal{E}_3(x, x^\circ) = -\frac{1}{4\pi|x - x^\circ|},$$

которую нзывают фундаментальным решением оператора Лапласа.