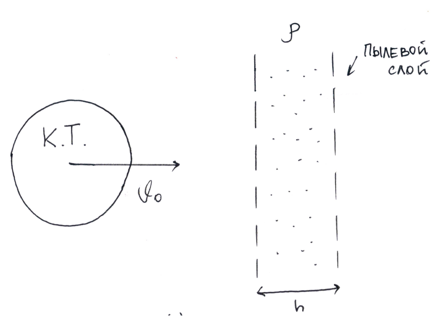
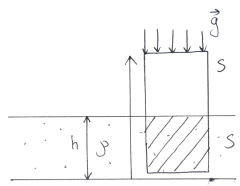
Задача 1 (7.86)

Космическое тело шарообразной формы имеет массу M и радиус r, равные массе и радиусу Земли. Двигаясь со скоростью V_0=11,2 км/с, тело проходить через облако космической пыли со средней плотностью $p = 10^{-4}$ кг $\cdot$м$^{-3}$ и толщиной вдоль направления движения $h = 10^9$ м, захватывая частицы пыли. Найти увеличение массы тела, когда оно выйдет из облака.



Решение

Для начала, иследуем собственную гравитацию слоя пыли.
Вне слоя ускорение свободного падения $g = const$
По теореме Гаусса выясним напряжённость гравитационного поля $\vec{g}$ пылевого облака.



$$\oint(\vec{g})ds = g * S = -4\pi\gamma ps\frac{h}{2}$$

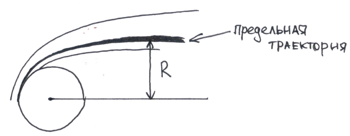
,

где $ps\frac{h}{2}$ ничто иное как масса пылинок, содержащихся в данном объёме.
Получаем, что

$$g = 4\pi\gamma ps\frac{h}{2} = 4 \cdot 10^{-5}\frac{M}{c^2},$$

что во много раз меньше притяжения самого космического тела.
Следовательно, гравитацинным взаимодействием частиц можно пренебречь.

Под действием притяжения тела частицы будут двигаться по параболическим траекториям. При R - предельная траектория. Все частицы, которые проходят ниже неё, попадают на космическое тело.



Запишем закон сохранения момента инерции:

$$mV_0R = mVr$$

И закон сохранения энергии:

$$\frac{m{V_0}^2}{2} = \frac{mV^2}{2} - \frac{\gamma m M}{r}$$

Из этого получаем, что квадрат предельного радиуса

$$R^2 = r^2[1 + \frac{2\gamma M}{r{V_0}^2}]$$

$$E = 0 = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{Mm}{r}$$

$$R = \sqrt{2}$$

$$r = 1,4 \cdot 6340$$

$$\triangle m = \pi R^2 hp = 2.6 \cdot 10^{19}\text{кг}$$

Ответ: $\triangle m = 2.6 \cdot 10^{19}$кг

Задача 2 (7.188 и 7.189)

В верхних слоях атмосферы на спутник, движущийся по круговой орбите, действует сила сопротивления очень разреженного воздуха F. Увеличивается или уменьшается скорость спутника, имеющего массу , в процессе его торможения? Каково его тангенциальное ускорение?

Слабая сила сопротивления, действующая на спутник в верхних слоях атмосферы, пропорциональна квадрату его скорости: $F = kV^2$. Найти как зависит скорость спутника массой м, движущегося по круговой орбите, от времени, если при $t = 0$ скорость спутника была равно v_0.

Решение

Запишем втоторой закон Ньютона

$$m\frac{V^2}{R} = \frac{\gamma M m}{R^2}$$

Как известно ускрение свободного падения для Земли можно записать в виде:

$$g_0 = \frac{\gamma M}{R_3}$$

Тогда

$$V^2 R = g_0 {R_3}^2 = const$$

$$2VdV + VdR = 0$$

$$2VdR = -2RdV$$

Из этого следует, что увеличение скорости в два раза больше, чем от уменьшения радиуса

$$\frac{dL}{dt} = -FRdt \rightarrow dL = -Frdt$$

$$dL = d(mVR) = mRdV + mVdR = -FRdt$$

$$RdV + VdR = RdV - 2RdV = -\frac{FR}{m}dt$$

$$-dV = -\frac{F}{m}dt$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F}{m}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F}{m} = a > 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{kV^2}{m}$$

$$\frac{dV}{V^2} = \frac{k}{m}dt$$

$$\int_{V_0}^{0} \frac{V^2}{dV} = \frac{k}{m}\int_0^t dt$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{V_0} - \frac{k}{m}t} = \frac{V_0}{1 - \frac{kV_0}{m}t}$$

Ответ:$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{V_0} - \frac{k}{m}t} = \frac{V_0}{1 - \frac{kV_0}{m}t}$

Задача 3 (7.44)

Со спутника, движущегося по кргуовой орбите со скоростью V_0, стреляют в направлении, составляющем угол в 120^o к курсу. Какой должна быть скорость пули, относительно спутника, чтобы пуля ушла на бесконечность?

Решение

$$\frac{m{V_0}^2}{R} = \frac{\gamma Mm}{R^2} \to \frac{\gamma M}{R} = {V_0}^2$$

$$V_\varphi = V_0 - V\sin 30^o$$

$$V_r = V\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}V$$

$${V_3}^2 = {V_\varphi}^2 + {V_r}^2 = (V_0 - \frac{V_0}{2})^2 + \frac{3}{4}{V_0}^2 = {V_0}^2 - V_0V + V^2$$

П(R)=$-\frac{\gamma Mm}{R}$

По условию: $E = 0 = \frac{m{V_3}^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{R} = {V_0}^2 - V_0V + V^2 - \frac{2\gamma M}{R}$

А так как $\frac{\gamma M}{R} = {V_0}^2$

$V^2 - V_0V - {V_0}^2 = 0$

решаем квадратное уравнение и получаем ответ:

$$V = \frac{V_0(\sqrt{5}+1)}{2}$$

Ответ:$V = \frac{V_0(\sqrt{5}+1)}{2}$

Задача 4 (7.72)

Определить, какую дополнительную скорость дельтаV необходимо кратковременно сообщить спутнику Земли, вращающемуся на очень высокой круговой орбите, чтобы он мог достичь Марса? Орбиты Земли и Марса считать круговыми, диаметр орбиты Земли равен $3 \cdot 10^8$ км, а диаметр орбиты Марса в 1,52 раза больше, чем у Земли.

Решение

$$2a = R_3 + R_m$$

Спутник Солнца на орбите Земли

$$E_3 = -\frac{\gamma m M}{2R_3}$$

$$E_4 = -\frac{\gamma m M}{2a}$$

$$E_4 - E_3 = \frac{\gamma m M_c}{2R_3}(1 - \frac{R_3}{a})$$

Кроме того, на орбите Земли в т.з. Круг:

$$E_3 = \frac{m{V_3}^2}{2} - \frac{\gamma m M_c}{R_3}$$

Элипс:

$$E_4 = \frac{m{V_x}^2}{2} - \frac{\gamma m M_c}{R_3}$$

$$E_4 - E_3 = \frac{m}{2}({V_x}^2 - {V_3}^2) = \frac{\gamma m M_c (R_m - R_3}{2R_3(R_m + R_3})$$

$${V_x}^2 = {V_3}^2 + {V_3}^2(\frac{R_m - R_3}{R_m + R_3})$$

$$V_x = v_3\sqrt{\frac{2R_m}{R_m + R_3}}$$

$$\triangle V = V_x - V_3 = 3 \text{ км/с}$$

Ответ:3 км/с

Задача 5 (7.109)

Определить усилие, действующее на трос длиной L=100м, на котором находится ксмонавт при максимальном удалении от Земли. Спутник движется по круговой орбите на расстоянии $2R_3$ от центра Земли. Масса космонавта $m = 100$кг много меньше массы спутника, радиуса Земли R_3 принять равым 6400 км.

Решение

$$m \ll M$$

$$M\omega^2 R = \gamma \frac{MM_3}{R^2}$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma M_3}{R^3} = \frac{g_0 {R_3}^2}{8R_3}$$

$$m\omega^2(R+L) = \frac{\gamma m M}{(R+L)^2} + T$$

$$T = \omega^2(R+L)m - \frac{\gamma m M}{R+L} = m\omega^2 R + m\omega^2 L - \frac{\gamma m M}{R^2(1+\frac{l}{R})} \approx$$

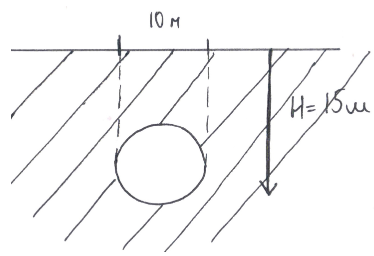
$$\approx m[(\omega^2 R + \omega^2 L - \omega^2 R(1 - \frac{2L}{R})] =$$

$$= m\omega^2 R + \omega^2 L - m\omega^2 R + 2m\omega^2 L = 3m\omega^2 L =$$

$$= \frac{3mg_0 L}{8R_3} = 6 * 10^{-3} H$$

Задача 6 (7.136)

Математический маятник расположен на поверхности Земли над тонелем метро. Тоннель находится на глубине $H = 15$ метров, а его диаметр $2R = 10$ метров. Принимая среднюю плотность грунта равной, $p = 2$ г
см^3, оценить относительное изменение периодов колебаний $\frac{\triangle T}{T}$ маятника, вызванное наличием тоннеля (смотри рисунок)



Решение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\frac{\triangle T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\triangle g}{g}$$

По теореме Гауса:

$$\triangle g 2\pi H l = 4\pi\gamma(\pi R^2 l p)$$

$$\triangle g = \frac{2\gamma p \pi R^2}{H}$$

$$\frac{\triangle T}{T} = \frac{1}{2}\frac{2\gamma p\pi R^2}{Hg} \sim 10^{-7}$$

Ответ: $\frac{\triangle T}{T} = 10^{-7}$