Московский физико-технический институт

Теория вероятностей

ФРТК. 1 курс. 2 семестр. 2014-2015 уч. год.

Лектор: Горяйнов Виктор Владимирович

Набрал:
Ломов Артём

Содержание

1 Пространство элементарных событий **2**
1.1 Законы де Моргана . . . 2
1.2 Основное правило комбинаторики . . . 2
1.3 Выборки . . . 3
1.4 Размещение k частиц по n ячейкам . . . 3
1.5 Пример геометрических вероятностей. Задача о встрече . . . 3

2 Алгебра событий и свойства вероятностей **4**

3 Условная вероятность и независимость **5**
3.1 Независимость . . . 7

4 Независимость испытания. Схема Бернулли **8**
4.1 Предельные теоремы . . . 8

5 Полиномиальная схема **10**

6 Случайные величины **10**
6.1 Математическое ожидание . . . 11
6.2 Дисперсия случайной величины . . . 12
6.3 Случай счетного количества . . . 12
6.4 Основные целочисленные случайные величины и их распределения . . . 13

7 Пространство с мерой и общая модель вероятностного пространства **14**
7.1 Сигма-алгебра . . . 14
7.2 Вероятностные пространства . . . 16
7.3 Функция распределения вероятностей . . . 16

8 Математическое ожидание **18**
8.1 Предельные теоремы . . . 20

9 Совместное распределение и независимость случайной величины **20**
9.1 Независимость случайной величины . . . 21
9.2 Ковариация и коэффициент корреляции . . . 22
9.3 Задача линейного оценивания . . . 23
9.4 Ковариационная матрица . . . 24
9.5 Корреляционная матрица . . . 24

10 Неравенство Чебышева. Закон больших чисел **25**
10.1 Законы больших чисел: . . . 25

11 Характеристические функции. Центральная предельная теорема **26**
11.1 Таблица характеристических функций . . . 27
11.2 Виды сходимости . . . 29
11.3 Центральная предельная теорема . . . 30

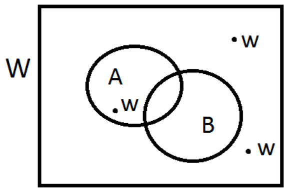
12 Марковские цепи **32**
12.1 Теорема о предельных вероятностях . . . 32

13 Ветвящиеся процессы **33**

Лекция 1
13.02.2015

1 Пространство элементарных событий

A - событие
n - число экспериментов
n_A - количество произошедших событий A
$\nu_a = \frac{n_A}{n}$ - частота появления события
$\mathbb{P}(A)$ - вероятность события A - проявляется через частоту
Элементарный исход ω - неделимое событие.
Событие - подмножество элементарных исходов.
Совокупность всех элементарных исходов - Ω.



Говорят, что событие A произошло, если $\omega \in A$.
$A \cup B$ - произошло A или B
$A \cap B = AB$ - произошли и A и B
Ω - достоверное событие
$\varnothing$ - невозможное событие (не путать с событием вероятности 0!)
$\overline{A} = \Omega \setminus A$ - отрицание
$A \setminus B = A\overline{B}$

1.1 Законы де Моргана

$A_i,\ i \in I$ - некоторые события

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

Докажем первое:
Теоретико-множественное равенство вытекает из двух включений.
1) $\omega \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \omega \notin A_i,\ \forall i \in I \Rightarrow \omega \in \overline{A_i},\ \forall i \in I \Rightarrow \omega \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$
2) $\omega \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \Rightarrow \omega \in \overline{A_i},\ \forall i \in I \Rightarrow \omega \notin A_i,\ \forall i \in I \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \omega \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$
Доказано.

1.2 Основное правило комбинаторики

Дискретная модель - пространство элементарных исходов конечно или счетно.
$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, ...\}$
Каждому элементарному исходу ω_k соответствует вероятность его выпадения p_k.
$\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k:\ \omega_k \in A} p_k$

Классическое определение вероятности: Ω конечно, все элементарные исходы равновероятны.
$|\Omega| = N \quad |A| = K \quad \mathbb{P}(A) = \frac{K}{N}$

Основное правило комбинаторики:
Есть m различных групп уникальных элементов. $|i| = k_i,\ i = \overline{1, m}$
Выбираем из каждой группы один элемент. Всего $N = k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_m$ различных комбинаций.

1.3 Выборки

Есть n элементов, занумерованных от 1 до n. Делаем выборку объёмом k.
Выборки различаются по двум критериям: упорядоченность(если имеет значение порядок элементов) и с возвращением или нет (элементы могут повторятся или нет).

1. *упорядоченная выборка с возвращениями [размещение с повторениями]*
   $\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k} = n^k$

2. *упорядоченная выборка без возвращений [размещение без повторений]*
   $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$

3. *неупорядоченная выборка без возвращений [сочетание без повторений]*
   $\frac{A_n^k}{k!} = C_n^k$

4. *неупорядоченная выборка с возвращениями [сочетание с повторениями]*
   Докажем, что количество таких выборок C_{n+k-1}^k
   Q(n,k) - количество таких выборок

   Б.и. Q(n,1)=n;
   И.ш. Пусть формула верна для 1,...,k. Докажем, что она верна и для k+1 (Q(n,k+1)=C_{n+k}^{k+1}).
   Разобъём множество всех выборок объёмом k+1 на непересекающиеся подмножества:
   1-ое - хотя бы один раз есть элемент 1;
   2-ое - нет элемента 1; хотя бы один раз есть элемент 2;
   3-ое - нет элементов 1,2; хотя бы один раз есть элемент 3;
   ...
   n-ое - нет элементов 1,...,n-1; хотя бы один раз есть элемент n;

   Найдём сумму всех подмножеств:
   $Q(n,k+1) = Q(n,k) + Q(n-1,k) + ... + Q(1,k) = C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^k + ... + C_{k+1}^k + C_k^k = (C_{n+k}^{k+1} - C_{n+k-1}^{k+1}) + (C_{n+k-1}^{k+1} - C_{n+k-2}^{k+1}) + ... + (C_{k+2}^{k+1} - C_{k+1}^{k+1}) + C_k^k = C_{n+k}^{k+1}$ ч.т.д.

1.4 Размещение k частиц по n ячейкам

Частицы могут быть различные или одинаковые. Может существовать ограничение: в каждой ячейке не более одной частицы.

1. *различные частицы, размещение без ограничений (статистика Максвелла-Больцмана)*
   Каждой частице ставится в соответствие номер ячейки. Происходит выборка номеров ячеек. Это эквивалентно упорядоченной выборке с возвращениями. n^k

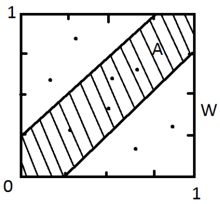
2. *различные частицы, размещение с ограничением*
   Это эквивалентно упорядоченной выборке без возвращений. A_n^k

3. *одинаковые частицы, размещение с ограничением (статистика Ферми-Дирака)*
   Это эквивалентно неупорядоченной выборке без возвращений. C_n^k

4. *одинаковые частицы, размещение без ограничений (статистика Бозе-Эйнштейна)*
   Это эквивалентно неупорядоченной выборке с возвращениями. C_{n+k-1}^k

1.5 Пример геометрических вероятностей. Задача о встрече

Два друга договорились встретится в интервале 1 час. Каждый приходит, ждёт 15 минут и уходит, если не встретил друга. Какова вероятность их встречи (событие A)?



Проекция точки на ось x - время прихода первого, на ось y - второго. Заштрихованная область - друзья встречаются. Вероятность их встречи равно отношению площадей закрашенной фигуры ко всему квадрату. Заметим, что дискретная модель уже не работает, т.к пространство элементарных исходов не счётно.
$\mathbb{P}(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{7/16}{1}$

Лекция 2
20.02.2015

2 Алгебра событий и свойства вероятностей

Какой класс подмножеств следует называть событиями?
$A \cup B \quad AB \quad \overline{A}$ - теоретико-множественные операции

Определение: Класс подмножеств Ω - $\mathcal{A}$- будем называть алгеброй, если
1) $\Omega \in \mathcal{A}$;
2) $\mathcal{A}$замкнуто относительно теоретико-множественных операций.

Предложение 1: $\mathcal{A}$- класс подмножеств Ω, удовлетворяющий следующим условиям
1) $\Omega \in \mathcal{A}$
2) Если A $\in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3) Если A и B $\in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
Тогда $\mathcal{A}$- алгебра.

Определение: $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_n\}$ будем называть разбиением, если $D_iD_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = \Omega$.
D_i - атомы разбиения.
В случае, когда $\mathbb{P}(D_i) > 0 \ \forall i = 1, ..., n,\ \mathcal{D}$ - называется группой событий, а D_i - гипотезы.

$\mathcal{A}(\mathcal{D})$ - класс подмножеств, которые состоят из Ω, всевозможных объединений атомов и $\varnothing$. $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ - алгебра.

Свойства вероятностей $\mathbb{P} : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$:

1. неотрицание $\forall A \in \mathcal{A} \ \ \mathbb{P}(A) \geqslant 0$
2. нормированность $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. аддитивность $A, B \in \mathcal{A},\ AB = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Следствия:

1. $A \in \mathcal{A} \ \ \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \ \ (\mathbb{P}(\varnothing) = 0)$
2. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
3. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
4. $\forall A \in \mathcal{A} \ \ 0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$
5. $\forall A, B \in \mathcal{A} \ \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$

Доказательство:
1) $\Omega = A \cup \overline{A},\ A\overline{A} = \varnothing$
$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$
2) $A \subset B\ \ B = A \cup (B \setminus A) \quad A, (B \setminus A)$ - не пересекаются
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
5) $A \cup B = (A \setminus AB) \cup (B \setminus AB) \cup (AB)$
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus AB) + \mathbb{P}(B \setminus AB) + \mathbb{P}(AB)$
По 2 следствию, $AB \subset A, B \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$

Теорема сложения: Пусть $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ - события. Тогда

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i1}A_{i2}) + \sum_{0 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant 1\mathbb{P}} (A_{i1}A_{i2}A_{i3}) - ...(-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1, ..., A_n)$$

Доказательство:
При n=2 это следствие 5. Допустим это верно вплоть до n-1.
$A_n \cup (\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i) - \mathbb{P}(A_n \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i)) =!$
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i) = \mathbb{P}(A_n) + [\sum\limits_{i=1..n-1} \mathbb{P}(A_i) - \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n-1} \mathbb{P}(A_{i1}A_{i2}) + ... + (-1)^{n-2}\mathbb{P}(A_1...A_{n-1})]$
$\mathbb{P}(A_n \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i)) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i A_n) = [\sum\limits_{i=1..n-1} \mathbb{P}(A_i A_n) - \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n-1} \mathbb{P}(A_{i1}A_{i2}A_n) + ... + (-1)^{n-2}\mathbb{P}(A_1...A_n)]$
$!= \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_n \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i1}A_{i2}) + ... + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 A_2 .... A_n)$

Предложение 2 (полуаддитивность): Если $A_1...A_n \in \mathcal{A}$ - произвольные событие, то

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Доказательство:
$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2\overline{A_1},\ B_3 = A_3\overline{A_1 A_2},\ ...\ , B_n = A_n\overline{A_1}...\overline{A_{n-1}}$
$\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$
$B_i B_j = \varnothing,\ i \neq j$
$\forall i\ \ B_i \subset A_i \Rightarrow \mathbb{P}(B_i) \leqslant \mathbb{P}(A - i)$
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

3 Условная вероятность и независимость

Допустим мы провели n экспериментов. Есть события A и B. n_a раз - A, n_b раз - B, n_{ab} раз - и A и B.
n_a/n - частота A
$n_{ab}/n_a = \frac{n_{ab}/n}{n_a/n}$
Комментарий: У нас всегда есть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Определение: Пусть $\text{A} \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \forall B \in A$. Под условной вероятность события B при условии A будем понимать $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(AB)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_A(B)$
Комментарий: Можно заменить $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$.
$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$

Теорема 1 (умножения): Пусть $A_1...A_n \in \mathcal{A}$ такие, что $\mathbb{P}(A_1...A_n) > 0$. Тогда

$$\mathbb{P}(A_1...A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1...A_{n-1})$$

Доказательсво по индукции:
Для n=2 это следствие определения условной вероятности.
Комментарий: Почему $\mathbb{P}(A_2|A_1), ..., \mathbb{P}(A_n|A_1...A_{n-1})$ определены? Т.к. $A_1...A_k \supset A_1...A_n$ и $\mathbb{P}(A_1...A_k) \geqslant \mathbb{P}(A_1...A_n) > 0$.
Пусть это верно до n-1 включительно.
$\mathbb{P}(A_1...A_n) = \mathbb{P}(A_1...A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1...A_{n-1}) =!$
$\mathbb{P}(A_1...A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}|A_1...A_{n-2})$
$! = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}|A_1...A_{n-2}) \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1...A_{n-1})$

Теорема 2 (полной вероятности): Пусть $\mathcal{D} = \{D_1...D_n\}$ - полная группа событий. Тогда $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_i) \cdot \mathbb{P}(A|D_i)$$

Доказательство:
$\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$
$A = A\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} AD_i$
$\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(AD_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_i) \cdot \mathbb{P}(A|D_i)$

Пример:
Двое подбрасывают монету по очереди. Выигрывает тот, у кого первый появится герб.
A - выигрыш первого игрока, B - второго.
$\mathbb{P}(A) = p_1$
$\mathbb{P}(B) = p_2$
$p_1 + p_2 = 1$
H_1 (гипотеза): при первом бросании выпал "герб".
H_2: при первом бросании выпала "решка".
По формуле полной вероятности: $\mathbb{P}(A) = p_1 = \mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2) \cdot$
$\mathbb{P}(A|H_2) = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot p_2$
$2p_1 = 1 + p_2$
Решая систему, получим $p_1 = 2/3, p_2 = 1/3$.

Лекция 3
27.02.2015

Теорема 3 (формула Байсса): Пусть $\mathcal{D} = \{H_1, ..., H_n\}$ - полная группа событий. Для любого $\mathbb{P}$(A)>0

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_k) \cdot \mathbb{P}(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}, \quad k = 1, .., n$$

$\mathbb{P}(H_k)$ - априорные вероятности
$\mathbb{P}(H_k|A)$ - апосториорные вероятности

Доказательство:
$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_kA)}{\mathbb{P}(a)} = \frac{\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}$

Пример:
Есть n ячеек. В одной ячейке приз. Участник вскрывает 1 ячейку. Ведущий вскрывает n-2 ячейки.

Стоит ли поменять на оставшуюся?
H - в выбранной игроком ячейке есть приз.
A - вскрытие n-2 ячейки пустые.
1) Ведущий знал, где приз, и открывал заведомо n-2 пустые ячейки.
$\mathbb{P}(H) = 1/n, \mathbb{P}(\overline{H}) = 1 - 1/n$
$\mathbb{P}(A|H) = 1, \mathbb{P}(A|\overline{H}) = 1$
$\mathbb{P}(H|A) = \frac{1/n \cdot 1}{1/n \cdot 1 + (n-1)/n \cdot 1 = 1/n}$
$\mathbb{P}(\overline{H}|A) = \frac{(n-1)/n \cdot 1}{1/n \cdot 1 + (n-1)/n \cdot 1 = (n-1)/n}$
2) Ведущий не знал, где приз.
$\mathbb{P}(A|\overline{H}) = 1/(n-1)$
$\mathbb{P}(H|A) = \frac{1/n \cdot 1}{1/n \cdot 1 + (n-1)/n \cdot 1/(n-1) = 1/2}$
$\mathbb{P}(\overline{H}|A) = 1/2)$

3.1 Независимость

A,B - события
Знание о наступлении события A не изменяет вероятность события B. $\mathbb{P}$(A)>0 $\Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
$\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$
$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Определение: Два события A и B называются независимыми, если выполняется $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Определение: $A_1 ... A_n$ - называются независимыми (в совокупности), если $\forall k = 1, ..., n$ и $\forall 1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n$ выполняется

$$\mathbb{P}(A_{i1} ... A_{ik}) = \mathbb{P}(A_{i1}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{ik}) \tag{1}$$

Пример 1:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1/4$
$A = \{\omega_1, \omega_2\}$
$B = \{\omega_1, \omega_3\}$
$C = \{\omega_1, \omega_4\}$
$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 1/4$
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$
$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 1/4$
$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/8$
Следовательно из попарной независимости не следует независимость совокупная.

Пример 2:
Подбрасываются две игральные кости.
A=$\{$на первой игральной кости выпало 1, 2 или 5$\}$
B=$\{$на первой игральной кости выпало 4, 5 или 6$\}$
C=$\{$сумма выпавших очков равна 9$\}$
$\mathbb{P}$(A)=1/2
$\mathbb{P}$(B)=1/2
$\mathbb{P}$(C)=1/9 (3,6) (4,5) (5,4) (6,3)
$\mathbb{P}(ABC) = 1/36 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$
$\mathbb{P}(AB) = 1/6 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
Вывод - ?

Определение: $\mathfrak{F}_1, ..., \mathfrak{F}_n$ - классы событий ($\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}$) называются независимыми, если для любого набора $A_1 \in \mathfrak{F}_1, ..., A_n \in \mathfrak{F}_n$ $A_1, ..., A_n$ - независимы.
Замечание: в случае, когда $\mathfrak{F}_1, ..., \mathfrak{F}_n$ - алгебры, то условие независимости можно записать:

$\forall A_1 \in \mathfrak{F}_1, ..., A_n \in \mathfrak{F}_n: \quad \mathbb{P}(A_1...A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_n)$.

Теорема 4: Пусть $\mathcal{D}_1 = \{D_1^1, ..., D_{k1}^1\}, ..., \mathcal{D}_n = \{D_1^n, ..., D_{kn}^n\}$ - разбиения.
$\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{D}_1), ..., \mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{D}_n)$ - алгебры, порожденные этими разбиениями.
$\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ - независимы $\Leftrightarrow$ для $1 \leqslant i_1 \leqslant k_1, ..., 1 \leqslant i_n \leqslant k_n$

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}_{i1}^1...\mathcal{D}_{in}^n) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_{i1}^1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(\mathcal{D}_{in}^n) \tag{2}$$

Доказательство:
$A_1 \in \sigma(\mathcal{D}_1), ..., A_n \in \sigma(\mathcal{D}_n)$

$$\mathbb{P}(A_i...A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_n) \tag{3}$$

Покажем, что из $\mathbb{P}(HA_2...A_n) = \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n)$ и $\mathbb{P}(GA_2...A_n) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n)$ при условии $HG \neq \varnothing$ следует, что $\mathbb{P}((H \cup G)A_1...A_n) = \mathbb{P}((H \cup G)) \cdot \mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n)$.
Сложим: $\mathbb{P}(HA_2...A_n) = \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n)$ и $\mathbb{P}(GA_2...A_n) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n)$
$\mathbb{P}(HA_2...A_n) + \mathbb{P}(GA_2...A_n) = \mathbb{P}((H \cup G)A_2...A_n)$
$(\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(G)) \cdot \mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}((H \cup G))\mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n)$

Предложение : Если A и B - независимые события, то также независимыми являются: $A, \overline{B} \quad \overline{A}, B \quad \overline{A}, \overline{B}$.
Доказательство:
$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
$\mathbb{P}(A\overline{B}) = \mathbb{P}(A \setminus (AB)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$

4 Независимость испытания. Схема Бернулли

n раз проводится случайный эксперимент, следим за появлением события A (успехом). Пусть p - вероятность успеха в отдельно эксперименте. q=1-p - вероятность не успеха.
B_k - в n независимых экспериментах событие A появилось ровно k раз.
$\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$
$\omega_k = 1$, если в k-ом эксперименте произошло A
$\omega_k = 0$, если в k-ом эксперименте не произошло A
$\mathbb{P}(\{\omega_1, ..., \omega_n\}) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i} \cdot q^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i}$
$\omega \in B_k \Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega\}) = p^k \cdot q^{n-k}$
$\{B_0, ..., B_n\}$ - разбиение
$\mathbb{P}(B_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = 0, ..., n$ - биномиальное распределение вероятностей
$\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1$

Лекция 4
06.03.2015

4.1 Предельные теоремы

Теорема 1 (Пуассона)(Закон редких событий): Пусть в схеме Бернулли при $n \mapsto \infty,\ p \mapsto 0,\ np \mapsto \lambda$

$$\mathbb{P}(B_k) \mapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 1, 2, ...$$

Доказательство:
$\mathbb{P}(B_k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^(n-k) = \frac{(np)^k}{k!} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} (1-p)^{-k} [(1-p)^{\frac{1}{n}}]^{np}$
1. $\frac{(np)^k}{k!} \mapsto \frac{\lambda^k}{k!}$
2. $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} = (1 - 1/n)(1 - 2/n)... \mapsto 1$
3. $(1-p)^{-k} \mapsto 1$

4. $[(1-p)^{1/p}]^{np} \mapsto e^{-\lambda}$
ч.т.д
По учебнику Севастьянова: $|\mathbb{P}(B_k) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}| \leqslant (np)^2 \quad \lambda = np$

Теорема 2 (Локальная теорема Муавра-Лапласа): Пусть 0<p<1 фиксированно, $\sigma = \sqrt{npq}$, $x = x(k) = \frac{k-np}{\sigma}$. Тогда $\forall M > 0$ равномерно на всем k: $|x(k) \leqslant M|$, при $n \mapsto \infty$

$$\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}(1+o(1))$$

Доказательство:
формула Стирлинга: $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}$
$ln(n!) = ln(\sqrt{2\pi n}) + n \cdot ln(n) - n + O(\frac{1}{n})$
$k = np + x\sigma = np(1 + \frac{xq}{\sigma})$
$n - k = nq - x\sigma = nq(1 - \frac{xp}{\sigma})$
При $n \mapsto \infty, \qquad k \mapsto \infty$ и $n - k \mapsto \infty$
Следовательно для k! и (n-k)! мы тоже можем воспользоваться этой асимптотической формулой.
При $\sigma \mapsto \infty, \quad \frac{1}{n} = O(1/\sigma^2), \quad \frac{1}{k} = O(1/\sigma^2), \quad \frac{1}{n-k} = O(1/\sigma^2)$
$\mathbb{P}(B_k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k}$ (формула Бернулли)
$ln(\mathbb{P}(B_k)) = ln(n!) - ln(k!) - ln((n-k)!) + k \cdot ln(p) + (n-k) \cdot ln(q) = \frac{1}{2} \cdot ln(\frac{n}{2\pi k(n-k)}) + n \cdot ln(n) - k \cdot ln(k) - (n-k) \cdot ln(n-k) + k \cdot ln(p) + (n-k) \cdot ln(q) + O(1/\sigma^2) = \frac{1}{2} \cdot ln(\frac{n}{2\pi k(n-k)}) - k \cdot ln(\frac{k}{np}) - (n-k) \cdot ln(\frac{n-k}{nq}) + O(1/\sigma^2) =!!!$

$ln(\frac{n}{k(n-k)}) = ln(\frac{n}{np(1+xq/\sigma)nq(1-xp/\sigma)}) = ln(\frac{1}{\sigma^2}) - ln(1 + \frac{xq}{\sigma}) - ln(1 - \frac{xp}{\sigma})$
$ln(1 + \frac{xq}{\sigma}) = O(1/\sigma)$
$ln(1 - \frac{xp}{\sigma}) = O(1/\sigma)$
$\frac{1}{2} \cdot ln(\frac{n}{2\pi k(n-k)}) = ln(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}) + O(1/\sigma)$
$k \cdot ln(\frac{k}{np}) - (n-k) \cdot ln(\frac{n-k}{nq}) = (np + x\sigma) \cdot ln(1 + \frac{xq}{\sigma}) + (nq - x\sigma) \cdot ln(1 - \frac{xp}{\sigma}) = (np + x\sigma) \cdot (\frac{xq}{\sigma} - \frac{x^2q^2}{2\sigma^2} + o(\frac{1}{\sigma^2})) + (nq - x\sigma) \cdot (-\frac{xp}{\sigma} - \frac{x^2p^2}{2\sigma^2} + o(\frac{1}{\sigma^2})) = x\sigma - \frac{x^2q}{2} + x^2q - x\sigma - \frac{x^2p}{2} + x^2p + O(1/\sigma) = x^2/2 + O(1/\sigma)$

$!!! = ln(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})\frac{-x^2}{2} + O(2/\sigma)$
$\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}(1+o(1))$

Теорема 3 (Интегральная теорема Муавра-Лапласа): Пусть S_n - количество успехов в схеме Бернулли, тогда $\forall 0 < p < 1, -\infty < a < b < +\infty$, при $n \mapsto \infty$

$$\mathbb{P}(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b (e^{\frac{-x^2}{2}} dx)$$

Граница применимости: q>20.
Распределение Пуассона: $p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 1, 2, ...;\ \lambda > 0$
Докажем, что $p_k > 0$:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$
Нормальное распределение: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} = \varphi(x)$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-n^2}{2}} dn$
$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{\frac{-n^2}{2}} dn$
$\Phi_0(x) = -\Phi_0(|x|)$
$\mathbb{P}(k_1 \leqslant S_n \leqslant k_2) = \mathbb{P}(x_1 \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x_2) \approx$

$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$
$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$
$\approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$

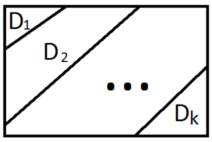
5 Полиномиальная схема

Сразу следим за n событиями: $A_1, .., A_r$. Пусть каждое из этих событий появляются в отдельном эксперименте с вероятностями $p_1, ...p_r, \quad p_1 + ... + p_r = 1$.
$B(k_1, ..., k_r)$, где $k_1, ..., k_r$ - целые, неотрицательные числа.
$k_1 + ... + k_r = n$
$\omega = (\delta_1, ..., \delta_n), \quad \delta_i \in 1, ..., r$ - исход испытания
$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_{\delta 1} \cdot p_{\delta 2} \cdot ... \cdot p_{\delta r}$
Если $\omega \in B(k_1, ..., k_r) \Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_1^{k1} \cdot ... \cdot p_r^{kr}$
Выбираем номера исходов, где появлялось A_1, затем A_2 и т.д.:
$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot ... \cdot \binom{k_r}{k_r} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot .... \cdot 1$
$\mathbb{P}(B(k_1, ..., k_r)) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_r!} \cdot p_1^{k1} \cdot p_2^{k2} \cdot ... \cdot p_r^{kr}$

Лекция 5
13.03.2015

6 Случайные величины

$\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$
$\{\omega : a < S(\omega) < b\} = \xi^{-1}((a, b))$
$\xi^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$
$\xi = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
$\xi^{-1}(\{x_k\}) = D_k$
$\mathcal{D}_\xi = \{D_1, ..., D_n\}, \quad D_k \in \mathcal{A}$



Индикатор $\mathbb{I}$- простейшая случайная величина.
$A \in \mathcal{A}$
$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A \\ 0, & \text{если } \omega \notin A \end{cases}$
Свойства индикаторов:
$\mathbb{I}_\Omega(\omega) \equiv 1$
$\mathbb{I}_\varnothing(\omega) \equiv 0$
$\mathbb{I}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{I}_A$
$\mathbb{I}_{AB} = \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$
$\mathbb{I}_{A \cup B} = \mathbb{I}_{\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}} = 1 - \mathbb{I}_{\overline{A} \cdot \overline{B}} = 1 - \mathbb{I}_{\overline{A}} \cdot \mathbb{I}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbb{I}_A)(1 - \mathbb{I}_B) = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$
$\mathbb{I}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{A_k}$

$$\boxed{\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{I}_{D_k}}$$

6.1 Математическое ожидание

Определение: Пусть $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{I}_{D_k}, \quad \mathbb{P}(D_k) = p_k, \quad k = 1, ..., n$. Тогда математическое ожидание -

$$\mathbb{E}\xi \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{P}(\xi = x_k)$$

Замечание 1: Пусть $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{I}_{D_k}, \quad \xi = \sum\limits_{j=1}^{N} y_j \cdot \mathbb{I}_{H_j}$, причём $\{H_1, ..., H_N\}$ - более мелкое разбиение чем $\{D_1, ..., D_n\}$. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{j=1}^{N} y_j \cdot \mathbb{P}(H_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{j: y_j = x_k\}} y_j \cdot \mathbb{P}(H_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum_{\{j: y_j = x_k\}} \mathbb{P}(H_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{P}(D_k)$$

Замечание 2: Если $\eta = \varphi(\xi), \quad \varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad \xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{I}_{D_k}$, то

$$\mathbb{E}\eta = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \cdot \mathbb{P}(D_k)$$

Свойства математического ожидания:

1. $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{P}(A)$
2. линейность:
   a) $\mathbb{E}(a\xi) = a\mathbb{E}(\xi)$
   b) $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$
3. монотонность:
   если $\xi \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \mathbb{E}\xi \geqslant 0$. Равенство нулю возможно только, если $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1$
4. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$
5. неравенство Шварца:
   $(\mathbb{E}(\xi\eta))^2 \leqslant (\mathbb{E}\xi^2) \cdot (\mathbb{E}\eta^2)$

Доказательства:

1. По определению.
2. a) $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{I}_{D_k}$
   $a\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} a \cdot x_k \cdot \mathbb{I}_{D_k} = a \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{P}(D_k) = a \cdot \mathbb{E}\xi$
   b) $\eta = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \cdot \mathbb{I}_{H_i}$
   $\xi + \eta = \sum\limits_{k,\ i} (x_k + y_i) \cdot \mathbb{I}_{D_k H_i}$
   $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \sum\limits_{k,\ i} (x_k + y_i) \cdot \mathbb{P}(D_k H_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(D_k H_i) + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(D_k H_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{P}(D_k) + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \cdot \mathbb{P}(H_i) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$
3. $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{I}_{D_k}, \quad x_k \geqslant 0$
   Если $\mathbb{E}\xi = 0 \; \forall x_i > 0$, то $\mathbb{E}\xi \geqslant x_i \cdot \mathbb{P}(D_i) \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(D_i) = 0$
4. Доказывается по неравенству треугольнику.

5. $(\mathbb{E}\xi^2) = 0 \;\Rightarrow\; \xi = 0$ с вероятностью 1, $\xi\eta = 0$ с вероятностью 1 $\Rightarrow \mathbb{E}\xi\eta = 0$
   Будем считать, что $\mathbb{E}\xi^2, \mathbb{E}\eta^2 > 0$
   $\hat{\xi} = \frac{|\xi|}{\sqrt{\mathbb{E}\xi^2}}$
   $\hat{\eta} = \frac{|\eta|}{\sqrt{\mathbb{E}\eta^2}}$
   $\mathbb{E}\hat{\xi}^2 = 1$ и $\mathbb{E}\hat{\eta}^2 = 1$
   $2\hat{\xi}\hat{\eta} \leqslant \hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2$
   $2\mathbb{E}(\hat{\xi}\hat{\eta}) \leqslant 2$
   $\frac{\mathbb{E}|\xi\eta|}{\sqrt{\mathbb{E}\xi^2}\cdot\sqrt{\mathbb{E}\eta^2}} \leqslant 1$
   $|\mathbb{E}\xi\eta| \leqslant \mathbb{E}|\xi\eta|$
   $(\mathbb{E}(\xi\eta))^2 \leqslant (\mathbb{E}\xi^2)\cdot(\mathbb{E}\eta^2)$

6.2 Дисперсия случайной величины

Определение: Дисперсией случайной величины называется $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$.
$\sigma_\xi = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$
Свойства:

1. $\mathbb{D} = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$
2. $\mathbb{D}(c\xi) = c^2 \cdot \mathbb{D}\xi$
   $\mathbb{D}(\xi + c) = \mathbb{D}\xi$
3. $\mathbb{D}\xi \geqslant 0;\quad \mathbb{D} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = \mathbb{E}\xi) = 1$

Доказательства:

1. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\cdot\mathbb{E}\xi\cdot\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2\cdot\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$
2. $\mathbb{D}(c\xi) = \mathbb{E}(c\xi)^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = c^2 \cdot (\mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2) = c^2 \cdot \mathbb{D}\xi$
3. $\mathbb{D}\xi \geqslant 0$ следует из определения. Если $\mathbb{D}\xi = 0$, то по определению $\xi - \mathbb{E}\xi = 0$ с вероятностью 1.

Распределение вероятностей:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

6.3 Случай счетного количества

Перейдем на случай со счётным множество значений ξ.
$\xi = \{x_1,\ x_2, ...\}$ и $p_1,\ p_2, ...\qquad p_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{p=1}^{\infty} p_i = 1$

Определение: Будем говорить, что для $\xi\ \ \exists\, \mathbb{E}\xi$, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \cdot |x_i|$ сходится.

$\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i$

Лекция 6
20.03.2015

Пусть ξ принимает целочисленные случайные величины: 0, 1, 2,...
$\mathbb{P}(\xi = k) = p_k,\quad k = 0,\ 1,\ 2, ...$
Производящая функция: $g_\xi(x) \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \mathbb{E}x^\xi,\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$
$g_\xi(1) = 1$
$g_\xi^{(k)}(0) = p_k \cdot k!,\quad p_k = \dfrac{g_\xi^{(k)}(0)}{k!}$ (по формуле Тейлора)

$\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k$
$g'_\xi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \cdot x^{k-1}$

$$\boxed{g'_\xi(1) = \mathbb{E}\xi}$$

$g''_\xi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k x^{k-2}$
$g''_\xi(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}\xi$
$\mathbb{E}\xi^2 = g''_\xi(1) + g'_\xi(1)$

$$\boxed{\mathbb{D}\xi = g''_\xi(1) + g'_\xi(1) - g'^2_\xi(1)}$$

6.4 Основные целочисленные случайные величины и их распределения

1. Бернуллиевская случайная величина
   $\mathbb{P}(\xi = 1) = p$
   $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - p = q$
   $g_\xi(x) = px + q$
   $\mathbb{E}\xi = g'_\xi(1) = p$
   $\mathbb{D}\xi = p(1-p)$

2. Биномиальное распределение
   $\mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}$
   $g_\xi(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k = (px+q)^n$
   $\mathbb{E} = g'_\xi(1) = n(p+q)^{n-1} \cdot p = np$
   $g''_\xi(1) = n(n-1)p^2$
   $\mathbb{D}\xi = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$

3. Пуассоновское распределение
   $\mathbb{P}(\xi = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,\ 1... \quad \lambda > 0$
   $g_\xi(x) = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} x_k = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}$
   $\mathbb{E}\xi = g'_\xi(1) = e^{\lambda(x-1)} \cdot \lambda = \lambda$
   $g''_\xi(1) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda(x-1)} = \lambda^2$
   $\mathbb{D}\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

4. Геометрическое распределение
   1 вариант:
   0<p<1
   q=1-p
   $\mathbb{P}(\xi = k) = pq^k, \quad k = 0,\ 1, ...$
   Проверим, что это распределение вероятностей:
   $\sum\limits_{k=0}^{\infty} pq^k = p \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{p}{1-q} = 1$
   $g_\xi(x) = p \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k x^k = \dfrac{p}{1-qx}$
   $g'_\xi(x) = \dfrac{pq}{(1-qx)^2} \qquad g'_\xi(1) = \dfrac{q}{p} = \mathbb{E}\xi$
   $g''_\xi(x) = \dfrac{2pq^2}{(1-qx)^3} \qquad g''_\xi(1) = 2\dfrac{q^2}{p^2}$

$$\mathbb{D} = 2\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

2 вариант:
$\mathbb{P}(\xi = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1,\ 2, ...$
$g_\xi(x) = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}x^k = px\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k x^k = \dfrac{px}{1-qx}$

7 Пространство с мерой и общая модель вероятностного пространства

Последовательностей событий $A_n, \quad n = 1,\ 2, ...$
$A^* = \varlimsup\limits_{n\mapsto\infty} A_n \overset{def}{=} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$
$A_* = \varliminf\limits_{n\mapsto\infty} A_n \overset{def}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k\geqslant n} A_k$
$\omega \in A^* \Leftrightarrow \omega \in A_{i_k}$
$\omega \in A_* \Leftrightarrow \omega \in A_k, \quad k \geqslant n_\omega$

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ... \subset A_n$ - монотонно возрастает
$\lim\limits_{n\mapsto\infty} A_n = A, \quad A^* = A_*$
$\lim\limits_{n\mapsto\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$
$\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \varlimsup\limits_{n\mapsto\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$
$\bigcap\limits_{k\geqslant n} A_k = A_n \Rightarrow \varliminf\limits_{n\mapsto\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$
Аналогично для сходящейся последовательности:
$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ... \supset A_n$
$\lim\limits_{n\mapsto\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

7.1 Сигма-алгебра

Определение: Класс $\mathcal{A}$подмножества Ω называется σ-алгеброй, если $\mathcal{A}$ - алгебра и $\forall\{A_n\} \subset \mathcal{A} \quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$:

Замечание : σ-алгебра замкнута относительно счётного количества пересечений.

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Если $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. Если $A_n \in \mathcal{A}, \quad n = 1,\ 2, ... \quad \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Доказательство п.3: $A_n \in \mathcal{A} \quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n}} = \overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}} \in \mathcal{A}$

Определение: $\mathcal{K}$- некоторый класс подмножеств Ω. $\sigma(\mathcal{K})-$ минимальная σ-алгебра подмножеств Ω, порождённая $\mathcal{K}$:

1. $\mathcal{K} \in \sigma(\mathcal{K})$
2. Если $\mathfrak{F} - \sigma$-алгебра подмножеств Ω и $\mathcal{K} \subset \mathfrak{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}) \subset \mathfrak{F}$

$\mathfrak{F}_\lambda - \sigma$-алгебра подмножеств $\Omega, \quad \lambda \in \Lambda$
Докажем, что $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{F}_\lambda - \sigma$-алгебра:

1) $\Lambda \in \mathfrak{F}$
2) $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \in \mathfrak{F}_\lambda, \ \ \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \overline{A} \in \forall \mathfrak{F}_\lambda \ \ \forall \overline{A} \in \mathfrak{F}$
3) $A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow A_n \in \mathfrak{F}_\lambda \ \ \forall \lambda \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}_\lambda \ \ \forall \lambda \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$
Пример:
$\Omega = \mathbb{R}$
$\mathcal{K}$- совокупность открытых множеств.
$\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - борелевская σ-алгебра. Множества из $\mathcal{B}$ называются борелевскими множествами.

Лекция 7
27.03.2015

Замечание : Пусть T - совокупность $(-\infty, x], \ \ x \in \mathbb{R}$. Если мы построим минимальную σ-алгебру, порождённую T, то она совпадёт с борелевской. $\sigma(T) = \mathcal{B}$
Тогда $(a, b] \in \sigma(T)$, так как $(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$.
$(a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{\varepsilon}{n}] \in \sigma(T)$, как счётное объединение полуинтервалов из σ-алгебры.
$G \in \sigma(T)$, G - любое открытое множество.

Определение: $\mathcal{A}$- σ-алгебра подмножеств Ω. Функция $\mu: \ \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ называется аддитивной, если $\forall A_1, \ A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ и $A_i A_j = \varnothing, \ i \neq j$

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Функция называется счётно аддитивной, если $\forall A_1, \ A_2, ...$ и $A_i A_j = \varnothing, \ i \neq j$

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Определение: $\mu: \ \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ называется непрерывной, если для любой исчезающей последовательности $\{H_n\} \subset \mathcal{A}$ (исчезающая последовательность - $H_1 \supset H_2 \supset ...$ - монотонно убывает и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n = \varnothing$. Краткая запись - $H_n \searrow \varnothing$)

$$\lim_{n \to \infty} \mu(H_n) = 0$$

Теорема 1: Пусть $\mu: \ \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ аддитивна и $\mu(\varnothing) = 0$. Тогда μ - счетно аддитивно в том и только том случае, когда она непрерывна.
Доказательство:
$\Leftarrow$
Пусть μ - счетно аддитивна. Возьмем некоторую $H_n \searrow \varnothing$. Покажем, что $\mu(H_n) \to 0$.
Введём:
$A_1 = H_1 \setminus H_2 = H_1 \overline{H_2}$
$A_2 = H_2 \overline{H_3}$
$\cdots$
$A_n = H_n \overline{H_{n+1}}$
$A_i A_j = \varnothing, \ \ i \neq j$
$\forall n = 1, \ 2, ... \ \ H_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$
$\mu(H_n) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \to 0$, при $n \to \infty$

$\Rightarrow$
Пусть μ - сходится и непрерывна. Покажем, что μ счетно аддитивна.

$A_1,\ A_2, ...\ \ A_iA_j = \varnothing,\ i \neq j$
$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$
Докажем, что $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
$B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$
$B_n \nearrow A \qquad H_n = A \setminus B_n \Rightarrow H_n \searrow \varnothing$
$\mu(H_n) \to 0$, при $n \to \infty$
$\mu(B_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$
$\mu(A \setminus B_n) = \mu(H_n) = \mu(A) - \mu(B_n) = \mu(A) - \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \to 0$, при $n \to \infty \Rightarrow$
$\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

7.2 Вероятностные пространства

Определение: Пусть $\mathcal{A}$- σ-алгебра подмножеств Ω. Тогда $(\Omega, \mathcal{A})$ - измеримое пространство.
$\mu :\ \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ - мера. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ - пространство с мерой.
Если $\mu(\Omega) = 1,\ \mu$ - вероятностная мера и обозначается $\mathbb{P}$.
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство.

Определение: Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство, тогда $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если $\forall B \in \mathcal{B}\ \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ (иначе $\{\xi \in b\}$ или $\xi^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$.

Теорема 2: Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Для того, чтобы ξ была случайной величиной необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\{\xi \leqslant x\} \in \mathcal{A}(\text{иначе } \xi^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A})$$
Доказательство:
$\Rightarrow$
тривиально
$\Leftarrow$
Пусть $\forall x\ \ \xi^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.
Другими словами $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\ \ \forall B \in T$. Заметим, что $\sigma(T) = \mathcal{B}$.
B_α:
$\xi^{-1}(\bigcup\limits_\alpha B_\alpha) = \bigcup\limits_\alpha \xi^{-1}(B_\alpha)$ (1)
$\xi^{-1}(\bigcap\limits_\alpha B_\alpha) = \bigcap\limits_\alpha \xi^{-1}(B_\alpha)$ (2)
Докажем (1): $\omega \in \xi^{-1}(\bigcup\limits_\alpha B_\alpha) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup\limits_\alpha B_\alpha :\ \ \xi(\omega) = x \Leftrightarrow x \in B_{\alpha'},\ \xi(\omega) = x \Leftrightarrow \omega \in \xi^{-1}(B_{\alpha'}) \Leftrightarrow \omega \in \bigcup\limits_\alpha \xi^{-1}(B_\alpha)$
$\xi^{-1}(\mathcal{B}) = \xi^{-1}(\sigma(T)) = \sigma(\xi^{-1}(T)) \in \mathcal{A}$

7.3 Функция распределения вероятностей

Определение: $F_\xi(x)$ - функция распределения вероятностей случайной величины ξ.
$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x) = \mathbb{P}(\xi^{-1}((-\infty, x]))$

Свойства:

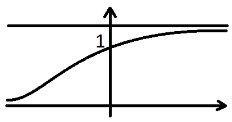
1. $0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1$
2. $F_\xi(x) \nearrow$ и непрерывна справа

3. $F_\xi(x) \to 0$, при $x \to -\infty$
   $F_\xi(x) \to 1$, при $x \to +\infty$

Доказательства:

2. Пусть $x_1 < x_2$.
   $(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2]$
   $\{\xi \leqslant x_1\} \subset \{\xi \leqslant x_2\}$
   $\mathbb{P}(\xi \leqslant x_1) \leqslant \mathbb{P}(\xi \leqslant x_2)$
   $F_\xi(x_1) \leqslant F_\xi(x_2)$
   Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Положим, что $F_\xi(x_0+0) = F_\xi(x_0)$.
   $F_\xi(x_0) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x_0)$
   $\{\xi \leqslant x_0 + \frac{1}{n}\} \to \{\xi \leqslant x_0\}$ - монотонно убывающая последовательность
   $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi \leqslant x_0 + \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(x_0 + \frac{1}{n}) = F_\xi(x_0)$

3. При $x_n \to -\infty$ $\ (-\infty, x_n] \searrow \varnothing$.
   Если $x_n \to +\infty$ $\ (-\infty, x_n] \searrow \mathbb{R}$, $\ \xi^{-1}((-\infty, x]) \to \Omega$, $\ \mathbb{P}(\Omega) \to 1$.

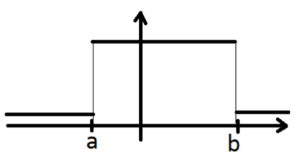


$\mathbb{P}(a < \xi \leqslant b) = \mathbb{P}(\xi \leqslant b) - \mathbb{P}(\xi \leqslant a) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

Определение: $F_\xi(x)$ называется абсолютно непрерывной, если $\exists f_\xi(x) > 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx$ - сходится и равен 1.
$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$, $\ f_\xi(u)$ - плотность распределения.
Тогда $\mathbb{P}(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int\limits_a^b f_\xi(x)dx \quad$ (если $F_\xi(x) - , \mathbb{P}(\xi = a, b) = 0$)
Свойства:

1. $f_\xi(x) \geqslant 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$

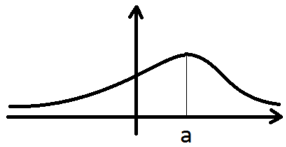
Примеры:
1) Равномерное распределение на [a,b]
$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b (1 \cdot dx) = 1$



Лекция 8
03.04.2015

2) Экспоненциальное распределение
Определяется для неотрицательных случайных величин.

$f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x), \quad \lambda > 0$
Проверим, что это плотность:
$f_\xi(x) \geqslant 0$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u}du = 1$
3) Нормальное (Гауссово) распределение:
$N(a, \sigma^2)$
$f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$

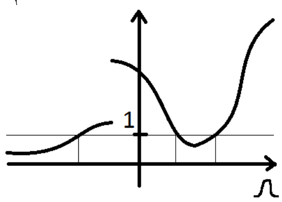


$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} d(\dfrac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = 1$
4) Распределение Коши
$f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = 1$

8 Математическое ожидание

Напомним, $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathbb{I}_{A_k}, \quad \mathbb{E}\xi = \sum\limits_{k=1} x_k \mathbb{P}(A_k)$
Вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$, Ω - пространство элементарных исходов, $\mathcal{A}$- σ-алгебра, $\mathbb{P}$-счетно-аддитивная мера.

Теорема 3 (аппроксимационная):: Пусть $\xi \geqslant 0,\ (\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$. Тогда $\exists$ последовательность простых неотрицательных случайных величин $\xi_n \nearrow \xi$.
$\xi_n(\omega) \nearrow \xi(\omega)$, при $n \to \infty \quad \forall \omega \in \Omega$
Доказательство:



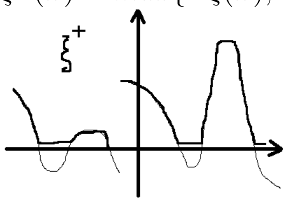
n=1, 2,...
$\mathcal{D}$- разбиение $=\{\Delta_n,\ D_1^{(n)},\ D_2^{(n)}, ..., D_{n\cdot 2^n}^{(n)}\}$
$\mathcal{D}_1 = \{\Delta_1,\ D_1^1,\ D_2^{(1)}\}$
$\Delta_n = \{\omega :\ \xi(\omega) \geqslant n\}$
$D_k^{(n)} = \{\omega :\ \dfrac{k-1}{2^n} \leqslant \xi(\omega) < \dfrac{k}{2^n}\}$
$\xi_n(\omega) = n \cdot \mathbb{I}_{\Delta_n}(\omega) + \sum\limits_{k=1}^{n\cdot 2^n} \dfrac{k-1}{2^n} \cdot \mathbb{I}_{D_k^{(n)}}(\omega)$
Докажем монотонность:
Разобьём $\omega \in \Omega$ на два случая:
1) $\omega \in \Delta_n \Rightarrow \xi(\omega) \geqslant n \Rightarrow \xi_n(\omega) = n$
$\xi_{n+1}(\omega) \geqslant n = \xi_n(\omega)$
2) $\omega \in D_k^{(n)} \Rightarrow \xi_n(\omega) = \dfrac{k-1}{2^n}$
$D_k^{(n)} = D_{2k-1}^{(n+1)} \cup D_{2k}^{(n+1)}$

$\xi_{n+1}(\omega) \geqslant \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} = \dfrac{k-1}{2^n} = \xi_n(\omega)$
$\forall\omega:\ 0 \leqslant \xi(\omega) - \xi_n(\omega) \leqslant \dfrac{1}{2^n} \to 0$

Теорема 4:: Пусть $\eta,\ \xi_1,\ \xi_2$ - неотрицательные случайные величины. $\xi_n \nearrow \xi \geqslant \eta \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n \geqslant \mathbb{E}\eta$
Доказательство:
$n = 1,\ 2, \ldots\ \ \varepsilon > 0$
$A_n = \{\omega:\ \xi_n(\omega) \geqslant \eta(\omega) - \varepsilon\}$
$A_n \nearrow \Omega \quad \overline{A_n} \searrow \varnothing$
$\xi_n = \xi_n \mathbb{I}_{A_n} + \xi_n \mathbb{I}_{\overline{A_n}} \geqslant (\eta \cdot \varepsilon)\mathbb{I}_{A_n} = \eta\mathbb{I}_{A_n} - \varepsilon\mathbb{I}_{A_n} = \eta - \varepsilon\mathbb{I}_{A_n} - \eta\mathbb{I}_{\overline{A_n}} \geqslant \eta - \varepsilon - M\mathbb{I}_{\overline{A_n}}$, где $M = \max\limits_{\omega\in\Omega} \eta(\omega)$
Применяем свойство монотонности математического ожидания простых случайных величин:
$\mathbb{E}\xi_n \geqslant \mathbb{E}\eta - \varepsilon - M\mathbb{P}(\overline{A_n})$
$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n \geqslant \mathbb{E}\eta - \varepsilon$ $\ (M\mathbb{P}(\overline{A_n}) \to 0$, при $n \to \infty$ в силу непрерывности вероятностной меры)
Так как ε выбиралось произвольным образом, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n \geqslant \mathbb{E}\eta$
Следствие: Пусть $\xi_n \nearrow \xi$ и $\eta_n \nearrow \xi$, где $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ - последовательности простых случайных величин. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\eta_n$
Доказательство:
k=1, 2,...
$\xi_n \nearrow \xi \geqslant \eta_k$
$\lim\limits_{b\to\infty} \mathbb{E}_n\xi \geqslant \mathbb{E}\eta_k$ (по теореме 4)
Т.к. k - любое, то переходя к пределу:
$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\eta_k$
Меняя ролями ξ и η, получим обратное равенство, следовательно пределы равны.

Определение: Пусть $\xi \geqslant 0$ - случайная величины, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$. $\xi_n \nearrow \xi$ - аппроксимирующая последовательность неотрицательных простых случайных величин.
$\mathbb{E}\xi \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n$

В силу аппроксимационной теоремы и следствия из теоремы 4 определение корректно: последовательность всегда существует и предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.
$\xi = \xi^+ - \xi^-$
$\xi^+(\omega) = max\{\xi(\omega),\ 0\}$
$\xi^-(\omega) = max\{-\xi(\omega),\ 0\}$



Если $\mathbb{E}\xi^+ < \infty$ и $\mathbb{E}\xi^- < \infty$, то $\mathbb{E}\xi \overset{def}{=} \mathbb{E}\xi^+ + \mathbb{E}\xi^-$

Свойства математического ожидания:

1. линейность
   $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$

2. монотонность
   $\xi \leqslant \eta \Rightarrow \mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}\eta$

3. $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$ почти наверное $(\mathbb{P}(\xi = 0) = 1)$

4. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$

8.1 Предельные теоремы

Теорема 5 (о монотонной последовательности): Если $\xi_n \nearrow \xi$ - последовательность неотрицательных случайных величин, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi$$

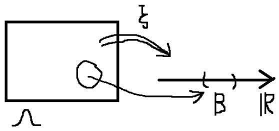
Теорема 6 (лемма Фату): Пусть ξ_n - последовательность неотрицательных случайных величин, тогда

$$\mathbb{E}(\varliminf_{n\to\infty} \xi_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n$$

Теорема 7 (теорема Лебега о предельном переходе): Пусть ξ_n - произвольная последовательность случайных величин. $|\xi_n(\omega)| \leqslant \eta(\omega),\ \mathbb{E}\eta < \infty$ и $\xi_n \to \xi$ (почти наверное). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi$$

$\xi:\ \Omega \to \mathbb{R}$
С каждой случайной величиной можно связать измеримое пространство $(\mathbb{R},\ \mathcal{B})$.
$B \in \mathcal{B} \quad \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) = \mathbb{P}_\xi(B)$
Каждому борелевскому множеству с помощью случайной величины можно приписать вероятность.



$\mathbb{P}_\xi(\mathbb{R}) = 1$
Все вычисления, связанные со случайной величиной, переносятся в новое вероятностное пространство - $(\mathbb{R},\ \mathcal{B},\ \mathbb{P}_\xi)$, $\mathbb{R}$- числовая ось, $\mathcal{B}$- борелевская σ-алгебра, $\mathbb{P}_\xi$ - мера вероятности.
$\mathbb{P}((-\infty, 1]) = F_\xi(x)$
$\mathbb{P}((a, b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$
$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x \cdot d\mathbb{P}_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF_\xi(x)$

Если распределение вероятностей задается плотностью f_ξ, то $\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx$

Лекция 9
10.04.2015

9 Совместное распределение и независимость случайной величины

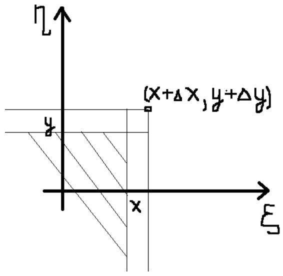
$\xi,\ \eta,$ - простые случайные величины в $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{I}_{D_i}$
$\eta = \sum\limits_{i=1}^{m} y_j \mathbb{I}_{H_j}$
$\mathcal{D}_{\xi\eta} = \{D_i H_j :\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$

$$(\xi, \eta) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} \xi \setminus \eta & y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \hline x_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ x_2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline x_n & p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nm} \end{array}$$

$p_{ij} = \mathbb{P}(D_i H_j) = \mathbb{P}(\xi = x_i,\ \eta = y_j)$
$\sum\limits_{i,\ j} p_{ij} = 1$

Пусть теперь ξ, η - случайные величины.

$F_{\xi\eta}(x,y) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y)$



Характеристические свойства:
1) $F_{\xi\eta}(x,y) \nearrow$
2) $F_{\xi\eta}(x,y)$ непрерывна справа
3) $F_{\xi\eta}(-\infty, y) = F_{\xi\eta}(x, -\infty) = 0$
$F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = 1$
$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall \Delta x, \Delta y > 0 \to F_{\xi\eta}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{\xi\eta}(x+\Delta x, y) - F_{\xi\eta}(x, y+\Delta y) + F_{\xi\eta}(x,y) \geqslant 0$

$F_{\xi\eta}(x,y) \quad f_{\xi\eta}(x,y) \geqslant 0$ - функция распределения
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1$
$\mathbb{P}((\xi,\eta) \in D) = \iint\limits_{D} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy, \quad D \in \mathbb{R}^2$
$F_{\xi\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(u,v)dudv$
$\dfrac{\delta^2 f_{\xi\eta}(x,y)}{\delta x \delta y} = f_{\xi\eta}(x,y)$

$\xi,\ \mathbb{P}_\xi,\ (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$
Возьмем $B \in \mathcal{B}$, тогда $\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in \mathcal{B})$
$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx$
Если есть функция $\eta = \varphi(\xi)$, тогда $\mathbb{E}\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)d\mathbb{P}_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_\xi(x)dx$
$\varphi(x,y) \quad \mathbb{E}\varphi(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) f_{\xi\eta}(x,y)dxdy$
$\varphi(\xi,\eta) = \sum\limits_{i,\ j} \varphi(x_i, y_j)p_{ij}$

9.1 Независимость случайной величины

Определение: Случайная величина $\xi:\ \Omega \to \mathbb{R}$ определена на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. $\sigma(\xi) = \mathcal{A}_\xi = \{\xi^{-1}(B):\ B \in \mathcal{B}\}$

Определение: ξ, η в $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ называются независимыми, если $\sigma(\xi)$ и $\sigma(\eta)$ независимые. $(A \in \sigma(\xi),\ B \in \xi(\eta):\ \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))$

$F_{\xi\eta}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi \leqslant x\}\{\eta \leqslant y\} = \mathbb{P}(\xi \leqslant x)\mathbb{P}(\eta \leqslant y) = F_\xi(x)\ F_\eta(y) \quad (\{\xi \leqslant x\} = \xi^{-1}((-\infty, x]))$
В случае абсолютно непрерывных распределений: $f_{\xi\eta}(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$

Теорема 1 (мультипликативное свойство мат. ожидания): Пусть ξ, η - независимые случайные величины из одного пространства с конечными мат. ожиданиями.

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$$

Доказательство:
$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{I}_{D_i}$

$\eta = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \mathbb{I}_{H_j}$
$\mathbb{E}(\xi\eta) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j \mathbb{P}(D_i H_j) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j \mathbb{P}(D_i)\mathbb{P}(H_j) = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(D_i))(\sum\limits_{j=1}^{m} y_j \mathbb{P}(H_j)) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$
Для неотрицательных величин $\xi, \eta \geqslant 0$ можем выбрать $\xi_n \nearrow \xi, \quad \eta_n \nearrow \eta$
$\mathbb{E}\xi_n \nearrow \mathbb{E}\xi \quad \mathbb{E}\eta_n \nearrow \mathbb{E}\eta$
$\sigma(\xi_n) \subset \sigma(\xi) \quad \sigma(\eta_n) \subset \sigma(\eta)$

$\xi_n\eta_n$ - простая случайная величина
$\xi_n\eta_n \nearrow \xi\eta$
$\mathbb{E}(\xi_n\eta_n) \nearrow \mathbb{E}(\xi\eta) \quad (\mathbb{E}\xi_n)(\mathbb{E}\eta_n) \to (\mathbb{E}\xi)(\mathbb{E}\eta)$
Пусть $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $\eta = \eta^+ - \eta^-$
$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$
$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\eta^+ - \mathbb{E}\eta^-$
$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi^+ - \xi^-)(\eta^+ - \eta^-) = \mathbb{E}\xi^+\eta^- - \mathbb{E}\xi^+\eta^- - \mathbb{E}\xi^-\eta^+ + \mathbb{E}\xi^-\eta^- = \mathbb{E}\xi^+\mathbb{E}\eta^+ - \mathbb{E}\xi^+\mathbb{E}\eta^- - \mathbb{E}\xi^-\mathbb{E}\eta^+ + \mathbb{E}\xi^-\mathbb{E}\eta^- = (\mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-)(\mathbb{E}\eta^+ - \mathbb{E}\eta^-) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$
Следствие:
$\xi, \ \eta$ - целочисленные случайные величины
$g_\xi(x), g_\eta(x)$ - производящие функции
$\xi + \eta \quad g_{\xi+\eta}(x) = \mathbb{E}x^{\xi+\eta} = \mathbb{E}x^\xi x^\eta = \mathbb{E}x^\xi \cdot \mathbb{E}x^\eta = g_\xi(x) \cdot g_\eta(x)$

Теорема 2: ξ, η - независимые случайные величины.

$$\mathbb{D}(\xi, \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$$

Доказательство:
$\mathbb{D}(\xi+\eta) = \mathbb{E}(\xi+\eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi+\eta))^2 = \mathbb{E}\xi^2 + \mathbb{E}\eta^2 + 2\mathbb{E}\xi\eta - (\mathbb{E}\xi)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - (\mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2[\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta] = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

9.2 Ковариация и коэффициент корреляции

$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{E}((\xi + \eta) - (\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta))^2 = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi) + (\eta - \mathbb{E}\eta))^2 = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$

Определение: Пусть ξ, η - две случайные величины, определенные на вероятностном пространстве. Тогда под ковариацией понимают $cov(\xi, \eta) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$
$\mathbb{D}\xi > 0, \quad \mathbb{D}\eta > 0$

Определение: $\hat{\xi}$ - нормированная случайная величины $\hat{\xi} = \dfrac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}$
$\mathbb{E}\hat{\xi} = 0$
$\mathbb{D}\hat{\xi} = \mathbb{E}\hat{\xi}^2 = 1$
$\hat{\eta} = \dfrac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}$

Определение: $\rho(\xi, \eta)$ - коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \dfrac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}}$

Лекция 10
17.04.2015

Свойства:

1. $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$
2. Если ξ, η независимы, то $cov(\xi, \eta) = 0$
3. $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$ ($=$ если ξ и η линейно зависимы)

Доказательства:

1. $cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta + \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

2. Если ξ, η независимы, то $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta cov(\xi,\eta) = 0$

3. $0 \leqslant \mathbb{D}(\hat{\xi} \pm \hat{\eta}) = \mathbb{E}(\hat{\xi} \pm \hat{\eta})^2 = 1 + 1 \pm 2\mathbb{E}\hat{\xi}\hat{\eta} = 2(1 \pm \rho(\xi,\eta)) \Rightarrow |\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$
   Достаточность:
   $\eta = a\xi + b$
   $\hat{\eta} = \dfrac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}$
   $\hat{\eta} = \dfrac{a\xi + b - a\mathbb{E}\xi - b}{\sqrt{a^2\mathbb{D}\xi}} = \dfrac{a}{|a|}\hat{\xi}$
   $\rho(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\hat{\xi}\hat{\eta}) = \dfrac{a}{|a|}\mathbb{E}\hat{\xi}^2 = \dfrac{a}{|a|}\mathbb{D}\hat{\xi} = \dfrac{a}{|a|} = sign(a)$
   Необходимость:
   $\rho(\xi,\eta) = 1 \Rightarrow \mathbb{D}(\hat{\xi} + \hat{\eta}) = 0 \Leftrightarrow \hat{\xi} + \hat{\eta} = 0 \Rightarrow \eta = a\xi + b$

Замечание : Из $cov(\xi,\eta) = 0$ не следует независимость.
Пример:
Берем z: $z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ с $\mathbb{P} = \frac{1}{3}$.
$\xi = cos(z)$ и $\eta = sin(z)$ очевидно зависимы.
$cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$
$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{3}(cos(0) + cos(\frac{\pi}{2}) + cos(\pi))$
$\mathbb{E}\eta = \frac{1}{3}(sin(0) + sin(\frac{\pi}{2}) + sin(\pi))$
$\xi\eta = \frac{1}{2}sin(2z) \Rightarrow \mathbb{E}\xi\eta = \frac{1}{6}(sin(0) + sin(\pi) + sin(2\pi)) = 0 \Rightarrow$
$cov(\xi,\eta) = 0$, но они зависимы.
Вычисление:
$\rho(\xi,\eta) = \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}}$
1)

$\xi \setminus \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

$\mathbb{E}_{\xi\eta} = \sum\limits_{i,j} x_i y_j p_{ij}$
2)
Если задано $f_{\xi,\eta}(x,y)$:
$\mathbb{E}_{\xi\eta} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$

9.3 Задача линейного оценивания

ξ - наблюдаемая
η - ненаблюдаемая
$\varphi(x)$ - оценка, т.е. вместо η смотрим $\varphi(\xi)$. φ из класса функций $\mathcal{K}$.
φ^* - наилучшая оценка в смысле среднеквадратичного отклонения, если: $\mathbb{E}(\eta - \varphi^*(\xi))^2 = \inf\limits_{\varphi \in \mathcal{K}} \mathbb{E}(\eta - \varphi(\xi))^2$
Рассматриваем $\varphi(x) = ax + b$. Ищем $a^*,\ b^*$.
$\psi(a,b) = \mathbb{E}(\eta - (a\xi + b))^2 = \mathbb{E}\eta^2 + a^2\mathbb{E}\xi^2 + b^2 - 2a\mathbb{E}\xi\eta - 2b\mathbb{E}\eta + 2ab\mathbb{E}\xi$

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\psi}{\delta a} \geqslant 0 \\ \dfrac{\delta\psi}{\delta b} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E} + b\mathbb{E}\xi = 0 \\ \quad b - \mathbb{E}\eta + a\mathbb{E}\xi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\mathbb{E}\xi^2 + b\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi\eta \\ b + a\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta \end{cases}\Bigg| \cdot \mathbb{E}\xi$$
$a^*\mathbb{D}\xi = cov(\xi, \eta)$
$b = \mathbb{E}\eta - a\mathbb{E}\xi$
$a^* = \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi}$
$b^* = \mathbb{E}\eta - \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi}\mathbb{E}\xi$
Наилучшая оценка в классе линейных функций:
$\eta^* = \varphi^*(\xi) = \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi}\xi + \mathbb{E}\eta - \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi}\mathbb{E}\xi$
$\varphi^*(\xi) = \mathbb{E}\eta + \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi}(\xi - \mathbb{E}\xi)$
Среднеквадратическое отклонение:
$\mathbb{E}(\eta - \eta^*)^2 = \mathbb{E}((\eta - \mathbb{E}\eta) - \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi}(\xi - \mathbb{E}\xi))^2 = \mathbb{D}\eta + \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi} - 2\dfrac{cov(\xi,\eta)}{\mathbb{D}\xi} = \mathbb{D}\eta \cdot [1 - (\rho(\xi,\eta))^2]$
Ошибка$=\mathbb{D}\eta \cdot [1 - (\rho(\xi,\eta))^2]$

Название: $\varphi^*(\xi)$ - уравнение линейной регрессии.
Пример:
ξ - рост отца
η - рост сына
$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = m,\ \mathbb{D}\xi = \mathbb{D}\eta = \sigma^2$, т.к. они из одной семьи.
$\eta^* - m = \dfrac{cov(\xi,\eta)}{\sigma^2}(\xi - m) = \rho(\xi,\eta)(\xi - m) \Rightarrow$
$|\rho| < 1$ собственно, из этой задачи и регрессии

9.4 Ковариационная матрица

$\xi_1,\ \xi_2, ..., \xi_n$
$v_{ij} = cov(\xi_i, \xi_j)$
$i = j \Rightarrow v_{ij} = \mathbb{D}\xi_i$
Матрица $\mathbb{V} = (v_{ij})$ - ковариационная матрица.

Свойства:
1) $\forall \vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \neq \vec{0} : (\vec{x}^T \cdot \mathbb{V} \cdot \vec{x} \geqslant 0)$
2) Симметрична, т.е. $\mathbb{V}^T = \mathbb{V}$ (очевидно, т.к. $v_{ij} = v_{ji}$)

Доказательство 1:
$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$
$\mathbb{E}\xi = (\mathbb{E}\xi_1, ..., \mathbb{E}\xi_n)^T$
$(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T = ((\xi_i - \mathbb{E}\xi_i)(\xi_J - \mathbb{E}\xi_j))_{n\ \text{x}\ n}$
$\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T) = \mathbb{V}$
$x^T \cdot \mathbb{V} \cdot x = \mathbb{E}(x^T(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T x) = \mathbb{E}(x^T(\xi - \mathbb{E}\xi))^2 \geqslant 0$

9.5 Корреляционная матрица

Если $\forall i \in [1, n]\ \ \mathbb{D}\xi_i > 0$, то $(\rho(\xi_i, \xi_j))_{n\ \text{x}\ n}$ - корреляционная матрица.
Как её получить?
$\sigma_i^2 = \mathbb{D}\xi_i$
Тогда $(\rho(\xi_i, \xi_j)) = \left(\dfrac{v_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}\right) \Rightarrow$ на диагонали расположены единицы.
Свойство про $x^T \cdot \rho(\xi_i, \xi_j) \cdot x \geqslant 0$ тоже верно.

10 Неравенство Чебышева. Закон больших чисел

Теорема 1: Если ξ - случайная величина$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0$, то
1) $\mathbb{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\varepsilon}$
2) $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}$

Доказательство:
1)
$|\xi| = |\xi| \cdot \mathbb{I}_{\{|\xi| \geqslant \varepsilon\}} + |\xi| \cdot \mathbb{I}_{\{|\xi| < \varepsilon\}} \Rightarrow$
$|\xi| \geqslant \varepsilon \cdot \mathbb{I}_{\{|\xi| \geqslant \varepsilon\}} \Rightarrow$
$\mathbb{E}|\xi| \geqslant \varepsilon \cdot \mathbb{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon)$ (т.к. $\mathbb{E}\mathbb{I}_{\{|\xi| \geqslant \varepsilon\}} = \mathbb{P}(|\xi| \geqslant \varepsilon)$)
2)
$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant \varepsilon^2)$
По неравенству 1: $\mathbb{P}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}$

Замечание : $(\mathbb{E}(\xi\eta))^2 \leqslant \mathbb{E}\xi^2 \cdot \mathbb{E}\eta^2$ - неравенство Шварца
при $\eta = 1 \quad (\mathbb{E}|\xi|)^2 \leqslant \mathbb{E}\xi^2$

Следствие неравенства [правило трёх сигма]: $\xi, \quad \sigma^2 = \mathbb{D}\xi$
$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$
Верно для любого распределения.

Теорема 2: Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность независимых случайных величин, таких что $\mathbb{D}\xi_k \leqslant c \;\; \forall k, \quad S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$$

Лекция 11
24.04.2015

Доказательство:
$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right| \geqslant \xi\right) \leqslant \frac{\mathbb{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}S_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{D}\xi_k}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{C}{n\varepsilon^2} \to 0$, при $n \to \infty$
Следствие:
$\xi_1, \; \xi_2, ...$
$\mathbb{E}\xi_n = a$
$\mathbb{D}\xi_n = \sigma^2$
$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$
$\forall\varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

10.1 Законы больших чисел:

T2 - закон больших чисел в форме Чебышева

Теорема 3 [закон больших чисел Бернулли]: Пусть S_n - число успехов в схеме Бернулли из n независимых испытаний (с вероятностью p успеха в отдельном испытании).

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Доказательство:
$\xi_k = \begin{cases} 1, \text{если в k-ом испытании успех} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$ $\quad S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$
$\mathbb{E}\xi_k = p$
$\mathbb{D}\xi_k = pq$

11 Характеристические функции. Центральная предельная теорема

$\xi = \xi_1 + i\xi_2$ - комплекснозначная случайная величина
$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi_1 + i\mathbb{E}\xi_2$
Докажем, что $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$ (1) :
Напоминание: $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$
$\mathbb{E}\xi = |\mathbb{E}\xi|e^{i\varphi}$
$|\mathbb{E}\xi| = e^{-i\varphi}\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(e^{-i\varphi}\xi) \leqslant \mathbb{E}|e^{-i\varphi}\xi| = \mathbb{E}|\xi|$

Определение: ξ - случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, тогда под характеристической функцией понимают: $h_\xi(u) = \mathbb{E}e^{iu\xi}$
Если $\mathbb{P}(\xi = x_k) = p_k$, то $h_\xi(u) = \sum\limits_k e^{iux_k} \cdot p_k$
Если $f_\xi(x)$, то $h_\xi(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \cdot f_\xi(x)dx$
Свойства:

1. $|h_\xi(u)| \leqslant 1$
   $h_\xi(0) = 0$
2. $h_\xi(-u) = \overline{h_\xi(u)}$
3. $\xi_1, ..., \xi_n$ - независимые величины
   $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$
   $h_{S_n}(u) = \prod\limits_{k=1}^n h_{\xi_k}(u)$
4. $\eta = a\xi + b \Rightarrow h_\eta(u) = e^{iub} \cdot h_\xi(au)$
5. $h_\xi(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}$
   Если $\mathbb{E}(\xi)^k < \infty$, то $\mathbb{E}\xi^k = \dfrac{1}{i^k}h_\xi^{(k)}(0)$

Доказательства:

1. из (1): $|h_\xi(u)| = |\mathbb{E}e^{iu\xi}| \leqslant \mathbb{E}|e^{iu\xi}| = 1$
2. $h_\xi(-u) = \mathbb{E}e^{-iu\xi} = \mathbb{E}\hat{e^{iu\xi}} = \hat{\mathbb{E}e^{iu\xi}} = h_\xi\hat{(u)}$
3. $e^{iu\xi_k}$ - независимые, т.к. $h_{\xi_k}(u)$ - независимые и ξ_k - независимые
   $h_{S_n}(u) = \mathbb{E}e^{iu(\xi_1+...+\xi_n)} = \mathbb{E}\prod\limits_{k=1}^n e^{iuS_k} = \prod\limits_{k=1}^n \mathbb{E}e^{iuS_k} = \prod\limits_{k=1}^n h_{\xi_k}(u)$
4. $h_\xi(u) = \mathbb{E}e^{iu(a\xi+b)} = \mathbb{E}e^{iub}\mathbb{E}e^{iua\xi} = e^{iub}\mathbb{E}e^{iua\xi} = e^{iub}h_\xi(au)$
5. $h'_\xi(u) = \dfrac{d}{du}\mathbb{E}e^{iu\xi} = \mathbb{E}(\dfrac{d}{du}e^{iu\xi}) = \mathbb{E}(i\xi)e^{iu\xi} = i\mathbb{E}(\xi e^{iu\xi})$

$h'_\xi(0) = i\mathbb{E}\xi$
$h''_\xi(u) = i^2\mathbb{E}(\xi^2 e^{iu\xi})$
$h''_\xi(0) = i^2\mathbb{E}\xi^2$

11.1 Таблица характеристических функций

1. Вырожденное распределение:
   $\mathbb{P}(\xi = a) = 1$
   $h_\xi(u) = e^{iau}$

2. Равномерное распределение на [a,b]:
   $f_\xi(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$
   $h_\xi(u) = \dfrac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu(b-a)}$
   Если [-a,a], то $h_\xi(u)\dfrac{sin(au)}{au}$

3. Экспоненциальное распределение:
   $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$
   $h_\xi(u) = \dfrac{\lambda}{\lambda - iu}$

4. Нормальное (Гауссово) распределение $N(a, \sigma^2)$:
   $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
   $h_\xi(u) = e^{iau - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$

Вычисление:

1. $h_\xi(u) = \mathbb{E}e^{iu\xi} = e^{iua}$

2. $h_\xi(u) = \mathbb{E}e^{iu\xi} = \int\limits_a^b \dfrac{1}{b-a} e^{iux}dx = \dfrac{e^{iux}}{iu(b-a)}\Bigg|_{x=a}^{x=b} = \dfrac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu(b-a)}$
   Если [-a,a], то $h_\xi(u) = \dfrac{e^{iau} - e^{-iau}}{iu2a} = \dfrac{sin(au)}{au}$

3. $h_\xi(u) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{iux - \lambda x}dx = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-x(\lambda - iu)}dx = \dfrac{-\lambda}{\lambda - iu} e^{-x(\lambda - iu)}\Bigg|_0^\infty = \dfrac{\lambda}{\lambda - iu}$

4. Найдем стандартное нормальное распределение N(0,1):
   $f_\eta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
   $h_\eta(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} cos(ux)dx + i\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} sin(ux)dx,$ i(...)=0, т.к. это интеграл нечетной функции по симметричному промежутку
   $h'_\eta(u) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x \cdot sin(ux)dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} sin(ux) \cdot d(e^{-\frac{x^2}{2}}) \overset{\text{по частям}}{=} 0 - \dfrac{u}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} cos(ux)dx$
   $h'_\eta(u) = -uh_\eta(u)$
   $[ln(h_\eta(u))]' = -u$
   $ln(h_\eta(u)) = -\dfrac{u^2}{2} + 0$
   $h_\eta(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$
   Общий случай:
   $\xi = \sigma\eta + a$
   $h_\xi(u) \overset{\text{св-во 4}}{=} e^{iua} h_\eta(\sigma u) = e^{iau - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$

Лекции 12-13
25.04.2015

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$
$h_\eta(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$
$\xi = \sigma\eta + a$
$h_\xi(a) = e^{iah}e^{-\frac{\sigma^2 h^2}{2}} = e^{iau}e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$
$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x) = \mathbb{P}(\sigma\eta + a \leqslant x) = \mathbb{P}(\eta \leqslant \frac{x-a}{\sigma}) = F_\eta(\frac{x-a}{\sigma})$
$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}f_\eta(\frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
$f_\eta(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$
$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{i}h'_\xi(0)$
$\mathbb{E}\xi^2 = -h''_\xi(0)$
$\mathbb{E}\eta = -ih'_\eta(0) = iue^{-\frac{u^2}{2}}\mid_{u=0} = 0$ - у стандартного нормального распределения
$\mathbb{D}_\eta = \mathbb{E}\eta^2 = -h''_\xi(0) = u(h_\eta(u))' = [h_\eta(u)u' + u(h'_\eta u)] = 1$
$h'_\eta(u) = -uh_\eta(u)$
$\mathbb{E}\xi = a$
$\mathbb{D}\xi = \sigma^2$

Замечание : Пусть ξ - целочисленная случайная величина с производльной функцией $g_\xi(x) = \mathbb{E}x^\xi$
$h_\xi(u) = g_\xi(e^{iu})$
$h_\xi(u) = \mathbb{E}e^{iu\xi}$

$\xi \quad (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$
$\mathbb{P}_\xi((a,b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

Теорема 1: Пусть ξ - случайная величина и $h_\xi(u)$ - характеристическая функция $\forall a < b$:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{-ia}e^{-iub}}{iu}du = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_\xi((a,b]) + \mathbb{P}_\xi([a,b)))$$

Теорема 2: Пусть ξ - случайная величина с характеристической функцией $h_\xi(u)$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h_\xi(u)|du < \infty$. Тогда ξ имеет абсолютно непрерывное распределение и его плотность

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}h_\xi(u)du$$

Теорема 3: Пусть h(u) непрерывна на $\mathbb{R}$, $h(0) = 1$, $h(u) = h_\xi(u)$ в том и только том случае, если h(u) - является неотрицательно определенной функцией.
$\forall n \quad u_1, u_2, ... \quad u_n \in \mathbb{R}, \quad z_1, ..., z_n$

$$\sum_{k,l=1}^{n}h(u_{k-l})z_k\overline{z_l} \geqslant 0$$

Доказательство:
Необходимость
$h(u) = h_\xi(u) = \mathbb{E}e^{iu\xi}$
$\sum\limits_{k,l=1}^{n}h(u_k - u_l)z_k\overline{z_l} = \sum\limits_{k,l=1}^{n}z_k\overline{z_l}\mathbb{E}e^{i(u_k-u_l)\xi} = \mathbb{E}(\sum\limits_{k,l=1}^{n}z_k\overline{z_l}e^{iu_k\xi}e^{-iu_l\xi}) = \mathbb{E}(\sum\limits_{k,l=1}^{n}z_ke^{iu_k\xi}\cdot\overline{z_le^{iu_l\xi}}) =$
$= \mathbb{E}[(\sum\limits_{k=1}^{n}z_ke^{iu_k\xi})(\sum\limits_{l=1}^{n}z_le^{iu_l\xi})] = \mathbb{E}(|\sum\limits_{k=1}^{n}z_ke^{iu_k\xi}|^2) \geqslant 0 \quad \overline{e^{-iu\xi}} = e^{iu\xi}$

Определение: $F_n(x) \overset{\text{сходится слабо}}{\Rightarrow} F(x)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ в каждой точке непрерывной функции F.

Теорема 4 (сходимости): $\xi_n,\ F_n(x),\ h_n(u)$

1) Если $F_n \Rightarrow F \quad h$, то $h_n(u) \to h(u), n \to \infty \ \ \forall u \in \mathbb{R}$

2) Пусть $h_n(u) \to h(u)$, h - непрерывна в нуле

Тогда h - характеристическая функция некоторого распределения F и $F_n \Rightarrow F$

11.2 Виды сходимости

Определение: Сходимость по вероятности. $\xi_n \overset{\mathbb{P}}{\to} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = 0$

Определение: $\xi_n \overset{\text{почти наверное}}{\to} \xi$, если $\mathbb{P}(\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$

Определение: $\xi_n \overset{Lp}{\to} \xi$ сходится в среднем порядка p, p>0, если $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0$ при $n \to \infty$

Определение: По распределению. $\xi_n \overset{d}{\to} \xi$, если $F_{\xi_n} \Rightarrow F_\xi$

Теорема 5: Пусть $\xi_n,\ \xi$ определены на одном и том же вероятностном пространстве.

$$(1)\ \text{Если } \xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi, \text{ то } \xi_n \overset{\mathbb{P}}{\to} \xi$$
$$(2)\ \text{Если } \xi_n \overset{Lp}{\to} \xi, \text{ то } \xi_n \overset{\mathbb{P}}{\to} \xi$$
$$(3)\ \text{Если } \xi_n \overset{\mathbb{P}}{\to} \xi, \text{ то } \xi_n \overset{d}{\to} \xi$$

Доказательство:

Для $\varepsilon > 0$

A_n^ε - событие

$A_n^\varepsilon = \omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|$

$\xi_n \overset{\mathbb{P}}{\to} \xi \Leftrightarrow \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \to 0 \ \ \forall > 0$ при $n \to \infty$

(1)

$\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$

$\varepsilon > 0 \quad B_n^\varepsilon = \omega : \sup\limits_{k \geqslant n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \xi$

$A_n^\varepsilon \subset B_n^\varepsilon$

$B_n^\varepsilon \searrow B^\varepsilon = \bigcap B_n^\varepsilon \subset \omega : \ \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)$

$\mathbb{P}(B^\varepsilon) = 0$

$\mathbb{P}(B_n^\varepsilon \to B^\varepsilon) = 0$

$0 \leqslant \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(B_n^\varepsilon)$

(2)

$\xi_n \overset{Lp}{\to} \xi, \quad p > 0$

$\mathbb{P}(A_n^\varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi_n - \xi|^p \geqslant \varepsilon^p) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \to 0$

(3)

$F_n(x) = F_{\xi_n}(x) \quad F(x) = F_\xi(x) \quad F_n \Rightarrow F$

$F(x - \varepsilon) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x + \varepsilon)$

$\{\xi \leqslant x - \varepsilon\} \subset \{\xi_n \leqslant x\} \cup A_n^\varepsilon$

$\{\xi_n \leqslant x\} \subset \{\xi \leqslant x + \varepsilon\} \cup A_n^\varepsilon$

$F(x - \varepsilon) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x - \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(\xi_n \leqslant x) + \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) = F_n(x) + \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \to 0 \Rightarrow$

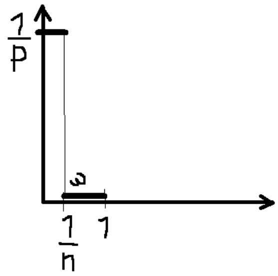
$F(x - \varepsilon) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} F_n(x)$

$F_n(x) \leqslant F(x + \varepsilon) + \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \to 0$

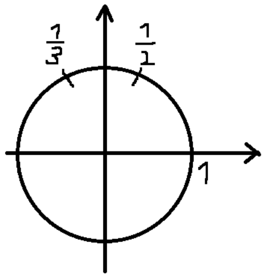
$\varlimsup\limits_{n\to\infty} F_n(x) \leqslant F(x + \varepsilon)$

$F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$

Пример 1:
$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, но $\xi_n \overset{Lp}{\nrightarrow} \xi$
$\Omega = [0,1],\ \mathcal{A} = \mathcal{B},\ \mathbb{P}$
$\xi_n(\omega) = n^{\frac{1}{p}} \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}(\omega)$
$\xi_n(\omega) \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi(\omega) \equiv 0$
$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p = \mathbb{E}|\xi_n|^p = n\mathbb{P}([0,\frac{1}{n}]) = 1$



Пример 2:
$\xi_n \xrightarrow{L1} \xi$, но $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\nrightarrow} \xi$
Единичная окружность



$\Omega = \pi \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}$
$\mathbb{P} = \dfrac{\text{mesA}}{2\pi}$
$A_n = \left\{ \omega = e^{i\varphi} :\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k} \leqslant \varphi \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \right\}$
$\mathbb{E}|\xi_n| = \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2n} \to 0$
$\xi_n \xrightarrow{L1} \xi \equiv 0$
Центральная точка будет принадлежать бесконечному числу чего-то там.

11.3 Центральная предельная теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких, что $\mathbb{E}\xi_n = a,\ \mathbb{D}\xi_n = \sigma^2$
$\forall x \in \mathbb{R}$
$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x)$$

Доказательство:
Нужно доказать, что $\zeta = \dfrac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \eta$ (которая имеет ст. нормальное распределение, $\eta \in N(0,1)$)
$\zeta_n \to \eta \Leftrightarrow h_{\zeta_n}(u) \to h_\eta(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \forall u$
$\hat{\xi_n} = \dfrac{\xi_n - a}{\sigma}$
$\mathbb{E}\hat{\xi_n} = 0 \quad \mathbb{D}\hat{\xi_n} = \mathbb{E}\hat{\xi_n}^2 = 1$
$h(u) = h_{\hat{\xi_n}}(u)$

$h(0) = 1 \quad h'(0) = 0$
$\mathbb{E}\hat{\xi_n} = -h''(0) \quad h''(0) = -1$
$h(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + O(u^2)$
$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{\xi_n} = \zeta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\hat{\xi_n}}{\sqrt{n}}$
$h_{\zeta_n}(u) = \left(h_{\frac{\hat{\xi_n}}{\sqrt{n}}}(u)\right)^n = \left(1 - \frac{u^2}{2n} + O(\frac{u^2}{n})\right)^n$
$n \to \infty \qquad \frac{u}{n} \to \infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} h_{\zeta_n}(u) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{nln\left(1-\frac{u^2}{2n}+O(\frac{u^2}{n})\right)} = e^{-\frac{u^2}{2}}$
$E_{\zeta_n}(x) \to \Phi(x)$

Теорема 7: S_n - число успехов в схеме Бернулли. $0 < p < 1 \quad a < b$

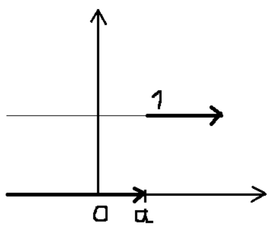
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Доказательство:
$\mathbb{E}\xi_n = p$
$\mathbb{D}\xi_n = pq$

Теорема 8 (Закон Больших чисел в форме Хинчина): $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. $\mathbb{E}\xi_n = a, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - a| \geqslant \varepsilon) = 0$$

В законе Чебышева требуется ограничить σ^2
Доказательство:
$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a$
$h_{\frac{S_n}{n}}(u) \to e^{iau}$
$h(u) = h_{\xi_n}(u)$
$h(u) = 1 \quad h'(0) = i\mathbb{E}\xi_n = ia$
$h(u) = 1 + iau + O(u)$
$h_{S_n}(u) = (h(u))^n$
$h_{\frac{S_n}{n}}(u) = \left(1 + \frac{iau}{n} + O(\frac{u}{n})\right)^n = e^{nln\left(1+\frac{iau}{n}+O(\frac{u}{n})\right)} \to e^{iau}$ при $n \to \infty$
$F_{\frac{S_n}{n}}(x) \to F(x)$
$\mathbb{P}(\eta = a) = 1$



$a - \varepsilon, \ a + \varepsilon$ - точки непрерывности
$F_{\frac{S_n}{n}}(a - \varepsilon) \to F(a - \varepsilon)$
$F_{\frac{S_n}{n}}(a + \varepsilon) \to F(a + \varepsilon) = 1$
фикс. $\xi > 0$
$\mathbb{P}\left(|\frac{S_n}{n} - a| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a - \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a + \varepsilon\right) = F_{\frac{S_n}{n}}(a - \varepsilon) + (1 - F_{\frac{S_n}{n}}(a + \varepsilon)) \to 0$ при $n \to \infty$

Лекция 14
08.05.2015

12 Марковские цепи

$x_1, ..., x_r$ - возможные состояния системы (состояния могут ассоциироваться с номером, например $x_1 \equiv 1, x_r \equiv r$).

$\tau = 0, 1, 2, ..., T$ - дискретное время

Элементарный исход $\omega = (\omega_0, ..., \omega_T)$ - последовательность состояний.
$\mathbb{P}((\omega_0, ..., \omega_T) = (i_0, ..., i_T)) = \mathbb{P}(\{\omega_0 = i_0\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega_1 = i_1\}|\{\omega_0 = i_0\}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(\{\omega_T = i_T\}|\{\omega_0 = i_0, ..., \omega_{T-1} = i_{T-1}\}), \quad i_j \in \{x_1, ..., x_r\}$

Марковское свойство: $\omega_T = i_T$ зависит только от предыдущего состояния $\omega_{T-1} = i_{T-1}$.
Тогда $\mathbb{P}((\omega_0, ..., \omega_T) = (i_0, ..., i_T)) = \mathbb{P}(\{\omega_0 = i_0\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega_1 = i_1\}|\{\omega_0 = i_0\}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(\{\omega_T = i_T\}|\{\omega_{T-1} = i_{T-1}\})$

Однородность (по времени) - $\mathbb{P}(\omega_{t+1} = i_{t+1}|\omega_t = i_t)$ не зависит от t. Переход из одного состояния в другое не зависит от времени развития системы.
$p_i(0)$ - вероятность того, что в начальный момент времени система будет находится в состоянии i, i=1,...,r
$p_{ij} = \mathbb{P}(\omega_{t+1} = i|\omega_t = i)$ - вероятность перехода системы из состояния i в состояние j за единицу времени.

Стахостическая матрица - $P = (p_{ij})$ - определяет однородную цепь Маркова.
Свойства матрицы:
1) $p_{ij} \geqslant 0$
2) $\sum\limits_{j=1}^{r} p_{ij} = 1$

$p_i(t)$ - вероятность того, что в момент времени t система будет в состоянии i.

$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\omega_t = j|\omega_0 = i)$ - вероятность того, что, находясь в состоянии i, через время t система перейдет в состояние j.

Уравнение Колмогорова-Чепкина:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}(t) \cdot p_{kj}(s) \tag{1}$$

Доказательство:
Введем гипотезы $H_1, ..., H_n$.
$\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathbb{P}(ABH_k)}{\mathbb{P}(B)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathbb{P}(A|BH_k)\mathbb{P}(BH_k)}{\mathbb{P}(B)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(H_k|B)\mathbb{P}(A|BH_k)$
$p_{ij}(t+s) = \mathbb{P}(\omega_{t+s} = j|\omega_0 = i) = \sum\limits_{k=1}^{r} \mathbb{P}(\omega_t = k|\omega_0 = i) \cdot \mathbb{P}(\omega_{t+s} = j|\{\omega_0 = i\}\{\omega_t = k\}) =!!!$
$\mathbb{P}(\omega_{t+s} = j|\{\omega_0 = i\}\{\omega_t = k\}) = \mathbb{P}(\omega_{t+s} = j|\omega_t = k)$ (по марковскому свойству)
$\mathbb{P}(\omega_{t+s} = j|\omega_t = k) = p_{kj}(s)$ (по условию однородности)
$!!! = \sum\limits_{k=1}^{r} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$

$P(t+s) = P(t) \cdot P(s)$
$P(t) = P^t$
$p_i(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} p_k(0)p_{ki}(t)$

12.1 Теорема о предельных вероятностях

Пусть $P(t) = (p_{ij}(t))$ и при $t_0:\ p_{ij}(t_0) > 0$. Тогда $\forall j = 1, ..., r$

$$\exists \lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = p_j \tag{*}$$

$p_j > 0$, не зависит от i и является единственным решением системы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{r} p_{kj}\lambda_k = \lambda_j \\ \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_j = 1 \end{cases} \quad (2)$$

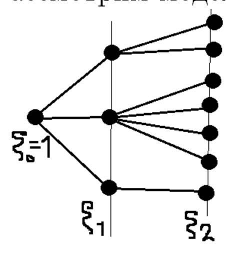
Доказательство:
$m_j(t) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant r} p_{kj}(t)$
$M_j(t) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant r} p_{kj}(t)$
$p_{ij}(t+1) = \sum\limits_{k=1}^{r} p_{ik}\cdot p_{kj}(t) \leqslant M_j(t)\sum\limits_{k=1}^{r} p_{ik} = M_j(t)$
$M_j(t+1) \leqslant M_j(t)$
$m_j(t) \leqslant m_j(t+1) \leqslant M_j(t+1) \leqslant M_j(t)$
Если $[M_j(t) - m_j(t)] \to 0$, то из $m_j(t) \leqslant p_{ij}(t) \leqslant M_j(t)$ следует, что $p_{ij}(t)$ сходится. Докажем это:
Возьмем произвольное t_0.
$\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant r} p_{ij}(t_0), \quad 0 < \varepsilon < 1$
$p_{ij}(t_0+t) = \sum\limits_{k=1}^{r} p_{ik}(t_0)p_{kj}(t) = \sum\limits_{k=1}^{r}(p_{ik}(t_0)-\varepsilon p_{jk}(t))p_{kj}(t)+\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{r} p_{jk}(t)p_{kj}(t) \leqslant M_j(t)\cdot\sum\limits_{k=1}^{r}(p_{ik}(t_0)-\varepsilon p_{jk}(t_0))+\varepsilon p_{jj}(2t)$
$p_{ij}(t_0+t) \leqslant (1-\varepsilon)M_j(t) + \varepsilon p_{jj}(2t)$
Аналогичным способом получим:
$p_{ij}(t_0+t) \geqslant (1-\varepsilon)m_j(t) + \varepsilon p_{jj}(2t)$
Т.к. вышеуказанные выражения верны для любых i, то и для max и min.
$M_j(t_0+t) \leqslant (1-\varepsilon)M_j(t) + \varepsilon p_{jj}(2t)$
$m_j(t_0+t) \geqslant (1-\varepsilon)m_j(t) + \varepsilon p_{jj}(2t)$
$M_j(t_0+t) - m_j(t_0+t) \leqslant (1-\varepsilon)(M_j(t) - m_j(t))$
Возьмём произвольное k.
$M_j(kt_0+t) - m_j(kt_0+t) \leqslant (1-\varepsilon)(M_j((k-1)t_0+t) - m_j((k-1)t_0+t)) \leqslant ... \leqslant (1-\varepsilon)^k(M_j(t) - m_j(t))$
$(1-\varepsilon)^k \to 0$, при $k\to\infty$
Мы нашли последовательность чисел $t_k = kt_0 + t \to \infty$ и $M_j(t_k) - m_j(t_k) \to 0$. Существование предела доказано.

$p_{ij}(t_0) \geqslant m_j(t_0) \geqslant \varepsilon$
$p_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) \geqslant \varepsilon$
$\sum\limits_{j=1}^{r} p_j = \lim\limits_{t\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{r} p_{ij}(t) = 1$
Второе равенство доказано.

Лекция 15
22.05.2015

13 Ветвящиеся процессы

Рассмотрим модель Гальтона-Ватсона.



ξ_k - количество элементов на k-ом шаге.
$\xi_0 = 1,\ \xi_1,\ \xi_2, ...$
$\mathbb{P}(\xi_1 = k) = p_k, \quad p_k \geqslant 0,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$
$A_n = \{\xi_n = 0\}$
$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ - процесс выродился
$\mathbb{P}(A) = q$ - вероятность вырождения процесса
$A_n \nearrow A \quad \mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$
$m = \mathbb{E}\xi_1$
m=1 - критический процесс
m>1($=\infty$) - надкритический процесс
m<1 - докритический процесс
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k = g_{\xi_1}(x) = \mathbb{E}x^{\xi_1}$

Теорема 1 [о случайной сумме случайных величин]: Пусть $\eta_1,\ \eta_2, ...$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. $g_\eta(x)$ - их производящяя функция. ν - случайная величина, не зависимая с предыдущими. Её производящяя функция $g_\nu(x)$.
$S_\nu = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_\nu$. Тогда

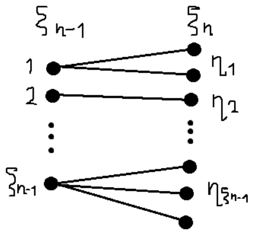
$$g_{S_\nu}(x) = g_\nu \circ g_\eta(x) = g_\nu(g_\eta(x))$$

Доказательство:
$g_{S_\nu}(x) = \mathbb{E}x^{S_\nu} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(x^{S_\nu}\mathbb{I}_{\{\nu=k\}}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(x_{S_k}\mathbb{I}_{\nu=k}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\prod\limits_{j=1}^{k} \mathbb{E}x^{\eta_j}) \cdot (\mathbb{P}(\nu = k)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (g_\eta(x))^k \cdot \mathbb{P}(\nu = k) = g_\nu(g_\eta(x))$

Теорема 2 [Ватсона]: $\xi_0 = 1,\ \xi_1,\ \xi_2, ... \quad f(x) = \mathbb{E}x^{\xi_1}$ Тогда

$$g_{\xi_n}(x) = \overbrace{f \circ f \circ ... \circ f}^{\text{n раз}}(x)$$

Доказательство:



$\xi_n = \eta_1 + ... + \eta_{\xi_{n-1}}$
$g_{\eta_k}(x) = f(x)$
$g_{\xi_n}(x) = g_{\xi_{n-1}}(x) \circ f(x) = g_{\xi_{n-2}} \circ f \circ f(x)$ и т.д.

Теорема 3: Пусть $\xi_0 = 1,\ \xi_1,\ \xi_2$ - процесс Гальтона-Ватсона с производящей функцией $f(x) = g_{\xi_1}(x) = \mathbb{E}x^{\xi_1}$. Тогда

$$q = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(0) \text{ и q - наименьший неотрицательный корень ур-ния f(x)=x}$$

Доказательство:
$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\xi_n = 0) = g_{\xi_n}(0) = f^n(0)$
$f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k x^{k-1} > 0\ (0 < x < 1)$
$f''(x) > 0$
$\cdots$
$f(0) = p_o > 0$

$f(\alpha) = \alpha$
$0 < \alpha < 1$
$f(0) < \alpha < f(1) = 1$
$f^2(0) < \alpha < 1$
$\dots$
$f^n(0) < \alpha \ \ \forall n$

Теорема 4: Пусть $\xi_0 = 1,\ \xi_1,\ \xi_2, ...$ - процесс Гальтона-Ватсона $f(x) = \mathbb{E}x^{\xi_1}$. Тогда, если процесс критический или докритический, то q=1, если надкритический, то $0 \leqslant q < 1$.
Доказательство:
$\mathbb{E}\xi_n = g'_{\xi_n}(1) = (f^n)'(1) = f'(f^{n-1}(1)) \cdot f'(f^{n-2}(1)) \cdot ... \cdot f'(1) = m^n$
1)
$m = f'(1) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x < 1$
$0 < f'(x) < 1$
$1 - f(x) = f'(\theta) \cdot (1 - x) < 1 - x, \quad x < \theta < 1$
Корней нет и q=1.
2)
m=f'(1)>1
Если $p_0 = f(0) = 0$, то q=0
Если $p_0 = f(0) > 0$, то $f'(x_0) > 1$
$1 - f(x_0) = f(0)(1 - x_0) > 1 - x_0$
$f(x_0) < x_0$
Рассмотрим $\varphi(x) = f(x) - x$

$$\left.\begin{array}{r}\varphi(0) > 0\\ \varphi(x_0) < 0\end{array}\right| \Rightarrow \exists q \in (0, x_0) : \ \varphi(q) = 0$$

То q - корень уравнения и $0 \leqslant q < 1$.