Оглавление

Глава 1

Аксиоматика классической механики.

1.1 Постулаты классической механики. Инерциальные системы отсчета. Понятие силы. Законы Ньютона.

Постулаты классической механики:

1. Первая группа аксиом целиком заимствована из геометрии и определяет понятие евклидова пространства $\mathbb{E}^3$ и геометрических объектов в нем (точки, прямые, плоскости).

2. Объекты в $\mathbb{E}^3$ полагаются зависящими от скалярного параметра t, называемого *временем*. Сказанное означает, что в механике рассматривается отображение $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{E}^3$, называемое *движением*.

3. Материальная точка - геометрическая точка, которой поставлен в соответствие скаляр, называемый *массой*: $(\overrightarrow{r}, m)$, $\overrightarrow{r}$ - вектор в евклидовом пространстве, отнесенном к какой-либо декартовой системе координат. Масса полагается постоянной, независящей ни от положения точки в пространстве, ни от времени.

4. Каждой паре материальных точек $(\overrightarrow{r_1}, m_1)$, $(\overrightarrow{r_2}, m_2)$ может быть поставлена в соответствие пара векторов $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, удовлетворяющих условию $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2} \parallel (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})$.

При этом говорят, что **сила** $\overrightarrow{F}$ приложена к материальной точке или что она действует на материальную точку. Материальные точки, которым поставлены в соответствие удовлетворяющие приведенному условию силы, называются взаимодействующими. Если рассматривается совокупность взаимодействующих материальных точек, то к одной материальной точке может быть приложено несколько сил. Их векторная сумма называется *равнодействующей.*

Этот постулат одновременно с категорией "сила" вводит и **третий закон Ньютона**: *если одна материальная точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы, приложенные к каждой из них, равны по величине и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

5. В евклидовом пространстве можно найти такую декартову систему координат и такой способ параметризации - t, что

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Такие системы координат в $\mathbb{E}^3$ и такой параметр t, для которых справедливо написанное уравнение (являющееся **вторым законом Ньютона**), называются **инерциальными** системами отсчета.

В таких системах отсчета выполняется **первый закон Ньютона**: *скорость материальной точки, которая не подвергается каким-либо воздействиям, не меняется во время ее движения.*

Отметим, что не только первый, но все законы Ньютона в приведенной формулировке справедливы только в инерциальных системах отсчета.

1.2 Преобразования Галилея. Понятие об инвариантности и ковариантности уравнений механики.

В теоретической механике считается, что инерциальные системы отсчета эквивалентны во всех механических отношениях. Иными словами, все уравнения и законы механики не зависят от конкретного выбора инерциальной системы отсчета. В этом состоит важнейший принцип механики - *принцип относительности Галилея.*

Преобразования, осуществляющие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, носят название **преобразований Галилея**. Математически эти преобразования могут быть выражены следующим образом:

$$\{t, r\} \to \{t', r'\}:$$

$$t' = t + \tau$$

$$\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{r_O} + \overrightarrow{v}t + A\overrightarrow{r}$$

Здесь постоянные τ, $\overrightarrow{r_O}$ характеризуют смещение начала отсчета времени и координат, постоянная $\overrightarrow{v}$ определяет равномерное прямолинейное движение начала новой системы координат относительно старой, A - матрица поворота осей новой системы координат относительно старой. Совокупность этих независимых коэффициентов представляет собой *группу Галилея.*

Теперь принцип относительности Галилея можно переформулировать: законы классической механики **инвариантны** по отношению к группе Галилея.

Поясним точный смысл терминов "инвариантность" и "ковариантность". Рассмотрим в общем случае произвольную систему дифференциальных уравнений:

$$F_i\left(t, q, \dot{q}, \ldots, q^{(k)}\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Независимая переменная t - время, зависимая переменная q - вектор, содержащий n компонент.

Пусть над зависимыми и независимыми переменными совершается преобразование $(t, q) \to (t', q')$:

$$t = t(t', q'), \qquad q = q(t', q')$$

Выписанная система дифференциальных уравнений называется ***инвариантной*** *по отношению к этому преобразованию переменных, если* *после подстановки замены в уравнение для новых переменных можно получить уравнения с теми же самыми функциями F_i:*

$$F_i\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}, \ldots, \frac{d^k q'}{d(t')^{(k)}}\right) = 0, \qquad i = 0, \ldots, k$$

В принципе относительности Галилея речь идет об инвариантности *законов классической механики*, то есть неизменны лишь *правила* составления дифференциальных уравнений, но не сами уравнения.

Инвариантность правила составления дифференциальных уравнений по отношению к переходу к новым переменным и называется **ковариантностью** самих дифференциальных уравнений.

Глава 2

Кинематика точки.

2.1 Траектория, скорость, ускорение.

Положение материальной точки считается известным, если задан радиус-вектор $\overrightarrow{r}$ этой точки в некоторой заранее фиксированной декартовой системе координат.*Движение* материальной точки задается явной функцией времени $\overrightarrow{r}(t)$, что соответствует заданию трех скалярных функций времени $x(t), y(t), z(t)$ при рассмотрении радиус-вектора в некотором базисе $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$:

$$\overrightarrow{r} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$$

Кривая, описываемая движущейся точкой, называется **траекторией**. **Скоростью** точки называется вектор

$$\overrightarrow{v} = \dot{\overrightarrow{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

где компоненты вектора есть проекции вектора скорости на оси x, y, z. Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорением точки называется вектор

$$\vec{w}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix},$$

где компоненты вектора есть проекции вектора ускорения на оси x, y, z.

Модуль ускорения

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

2.2 Естественный (сопровождающий) трехгранник. Разложение скорости и ускорения в осях трехгранника.

Пусть закон движения точки задан:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

Выберем на траектории произвольную точку, от которой будем отсчитывать пройденный рассматриваемой точкой по траектории путь $s(t)$. Рассматривая s в качестве нового параметра для траектории, получим:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}[s(t)] = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s} = \vec{\tau}\dot{s}.$$

Из дифференциальной геометрии известно, что $|\vec{\tau}| = 1$, а сам вектор определяет направление касательной к траектории в рассматриваемой точке. Вычислим ускорение точки:

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{ds}\dot{s} = \dot{v}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

Вектор $d\vec{\tau}/ds$ называется вектором кривизны. Он связан с единичным вектором нормали к кривой $\vec{n}$ следующим образом:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n},$$

где величина ρ называется радиусом кривизны траектории в рассматриваемой точке. Тогда для вектора ускорения:

$$\overrightarrow{w} = \dot{v}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n}$$

Дополнив векторы $\overrightarrow{\tau}$ и $\overrightarrow{n}$ третьим ортогональным им единичным вектором $\overrightarrow{b}$ таким образом, чтобы построенный базис из трех векторов был правым, мы и получим то, что называется **естественным** или **сопровождающим трехгранником**.

Исходя из вышесказанного, запишем разложение векторов скорости и ускорения в осях трехгранника $\left(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\right)$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ v^2/\rho \\ 0 \end{pmatrix},$$

где величины $\dot{v}$ и v^2/ρ называются соответственно *тангенциальным* и *нормальным* ускорениями.

2.3 Криволинейные координаты точки. Разложение скорости и ускорения точки в локальном базисе криволинейных координат. Коэффициенты Ламе.

Положение материальной точки $\overrightarrow{r} = \{x, y, z\}$ можно задавать не только при помощи декартовых координат x, y, z, но и любых других *независимых* величин q_1, q_2, q_3, называемых **криволинейными координатами точки**. Задание $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ полностью определяет положение материальной точки $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}\,[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]$.

Пусть в момент $t = t^*$ положение точки определено значениями обобщенных координат q_1^*, q_2^*, q_3^*, то есть радиус-вектором $\overrightarrow{r}(q_1^*, q_2^*, q_3^*)$. Положив теперь $q_2 = q_2^*$, $q_3 = q_3^*$, будем изменять q_1. Тогда $\overrightarrow{r}(q_1, q_2^*, q_3^*)$ определит в пространстве кривую - ее называют *координатной линией* q_1. Аналогично можно построить координатные линии q_2 и q_3. Касательные к координатным линиям в точке (q_1^*, q_2^*, q_3^*) образуют систему осей координат q_1, q_2, и q_3.

Для того чтобы определить компоненты **скорости** $\overrightarrow{v}$ по построенным таким образом осям координат, введем в рассмотрение соответствующие орты:

$$\text{Орт } \overrightarrow{\tau_i} \text{ оси } q_i \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{равен } \overrightarrow{\tau_i} = \frac{\partial \overrightarrow{r} / \partial q_i}{|\partial \overrightarrow{r} / \partial q_i|}$$

и **коэффициенты Ламе**

$$H_i = |\partial \overrightarrow{r} / \partial q_i|\,;$$

тогда

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = H_i \overrightarrow{\tau_i}$$

и

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d\overrightarrow{r}}{dq_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{3} H_i \dot{q}_i \overrightarrow{\tau_i},$$

т.е. его компонента v_i скорости $\overrightarrow{v}$ по оси q_i равна

$$v_i = H_i \dot{q}_i$$

Определим, далее, w^i - проекцию **ускорения** $\overrightarrow{w}$ на ось q_i, т.е. скалярное произведение $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\tau_i}$:

$$w^i = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{\tau_i} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \frac{1}{H_i} \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{v} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} \right) - \overrightarrow{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} \right]$$

Выражение для скорости определяет функцию $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(q, \dot{q})$, откуда следует

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i},$$

но, с другой стороны, очевидно, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial \dot{q}_i}$$

Теперь равенство для проекции ускорения представимо в виде

$$w^i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v}\cdot\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \overrightarrow{v}\cdot\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial q_i}\right],$$

или

$$w^i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial (v^2/2)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (v^2/2)}{\partial q_i}\right]$$

Глава 3

Кинематика твердого тела (кинематика систем отсчета).

3.1 Твердое тело. Способы задания ориентации твердого тела: углы Эйлера, матрицы направляющих косинусов.

Совокупность материальных точек, состоящая из более чем одной материальной точки, называется **твердым телом**, если расстояние между любыми двумя точками этой совокупности неизменно.

Из определения твердого тела следует, что если в какой-то момент времени с некоторыми точками тела связать *ортонормированный* базис $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$, то этот базис будет оставаться ортонормированным в любой последующий момент. Радиус-вектор произвольной точки тела в этом базисе имеет неизменные компоненты $\overrightarrow{R} = (x, y, z)$

Рассмотрим произвольное движение твердого тела относительно неподвижной системы отсчета $A\overrightarrow{i_1}\overrightarrow{i_2}\overrightarrow{i_3}$, задаваемой ортонормированным базисом с началом в точке A. Радиус-вектор произвольной точки тела в этом базисе дается соотношением

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{R_O} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_O} + (x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}), \qquad \overrightarrow{R_O} = \overrightarrow{AO}$$

Отсюда следует, что для однозначного определения положения точки тела в системе $A\overrightarrow{i_1}\overrightarrow{i_2}\overrightarrow{i_3}$ достаточно задать положение базиса $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$

относительно базиса $A\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$.

Движение базиса $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ относительно $A\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$ может быть полностью описано движением точки O и движением базиса $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ относительно $O\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$. Последнее представляет собой движение твердого тела с неподвижной точкой O и называется *вращением* твердого тела.

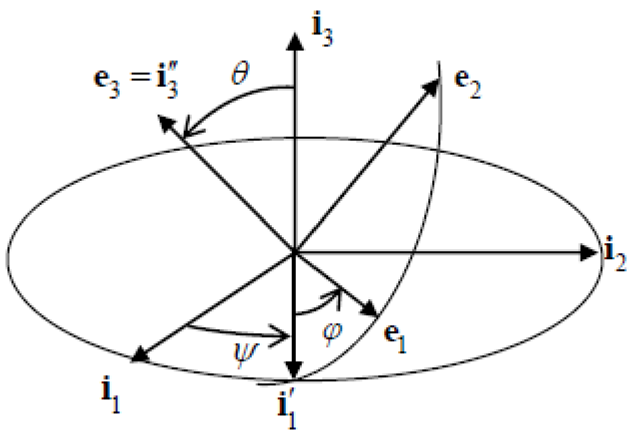
Теперь ориентацию твердого тела можно задать с помощью **матрицы направляющих косинусов** :

$$\overrightarrow{R'} = A\overrightarrow{R},$$

где $\overrightarrow{R'}$ - радиус-вектор произвольной точки тела в базисе $O\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$, A - матрица перехода от базиса $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ к базису $O\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$. Оба этих базиса ортонормированные, поэтому матрица направляющих косинусов ортогональна:

$$AA^T = E$$

Рассмотрим систему **углов Эйлера**. Пусть базис $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ занимает произвольное положение. Все векторы $\overrightarrow{i_k}$ базиса $O\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$ можно совместить с базисными векторами $\overrightarrow{e_k}$ с помощью следующих трех поворотов:



1. Поворот вокруг оси $\overrightarrow{i_3}$ на угол ψ до совмещения вектора $\overrightarrow{i_1}$ с *линией узлов* $\overrightarrow{i'}_1$, т.е. с линией пересечения плоскостей векторов $\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{i_2}$ и $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$.

2. Поворот вокруг линии узлов $\overrightarrow{i'}_1$ на угол θ до совмещения орта $\overrightarrow{i_3}$ с ортом $\overrightarrow{e_3}$.

3. Поворот вокруг оси $\overrightarrow{e_3}$ ($\overrightarrow{i''_3}$) на угол φ до полного совмещения базисов.

Совокупность указанных поворотов переводит базис $O\overrightarrow{i_1}\overrightarrow{i_2}\overrightarrow{i_3}$ в базис $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ и представляет собой последовательность поворота на *эйлеровы* углы ψ (угол прецессии), θ (угол нутации) и φ (угол собственного вращения).

Отметим, что с помощью углов Эйлера не всегда можно задать ориентацию твердого тела. Если $\sin\theta = 0$, то углы Эйлера вырождаются.

3.2 Алгебра кватернионов.

Кватернионы представляют собой четырехмерные гиперкомплексные числа и записываются выражениями следующего вида:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3,$$

где λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 - произвольные действительные числа, называемые компонентами кватерниона Λ, а i_1, i_2, i_3 - кватернионные единицы.

Кватернионное сложение определяется по правилам обычной векторной алгебры:

$$M = \mu_0 + \mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3$$

$$\Lambda + M = \lambda_0 + \mu_0 + \sum_{k=1}^{3}(\lambda_k + \mu_k) i_k$$

Кватернионное произведение обозначается знаком "$\circ$" и для умножения кватерниона на скаляр определяется так:

$$a \circ \Lambda = \Lambda \circ a = a\lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} a\lambda_k i_k,$$

а правила умножения кватернионных единиц определяются следующей таблицей:

$$i_k \circ i_k = -1,\ k = 1, 2, 3$$

$$i_1 \circ i_2 = i_3,\ i_2 \circ i_3 = i_1,\ i_3 \circ i_1 = i_2$$

$$i_2 \circ i_1 = -i_3,\ i_3 \circ i_2 = -i_1,\ i_1 \circ i_3 = -i_2$$

В соответствии с этими правилами можно использовать такую интерпретацию кватернионов,при которой элементы i_1, i_2, i_3 отождествляются с единичными векторами, образующими в трехмерном пространстве правую ортогональную тройку. Тогда по аналогии с комплексными числами кватернион Λ можно представить в виде формальной суммы скалярной части λ_0 и векторной части $\overrightarrow{\lambda}$:

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \overrightarrow{i_1} + \lambda_2 \overrightarrow{i_2} + \lambda_3 \overrightarrow{i_3} = \lambda_0 + \overrightarrow{\lambda},$$

а правила умножения базисных векторов записать через скалярное и векторное произведение:

$$i_k \circ i_j = i_k \times i_j - i_k \cdot i_j, \qquad k, j = 1, 2, 3$$

Отсюда и из свойства дистрибутивности

$$\Lambda \circ (M + N) = \Lambda \circ M + \Lambda \circ N$$

получаем для кватернионного произведения векторов $\overrightarrow{\lambda}$ и $\overrightarrow{\mu}$ формулу

$$\overrightarrow{\lambda} \circ \overrightarrow{\mu} = \overrightarrow{\lambda} \times \overrightarrow{\mu} - \overrightarrow{\lambda} \cdot \overrightarrow{\mu}$$

Отсюда и из формулы для умножения кватерниона на скаляр получим

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \overrightarrow{\lambda} \cdot \overrightarrow{\mu} + \lambda_0 \overrightarrow{\mu} + \mu_0 \overrightarrow{\lambda} + \overrightarrow{\lambda} \times \overrightarrow{\mu}$$

Помимо свойства дистрибудивности, умножение кватернионов ассоциативно, но некоммутативно. А также скалярная часть произведения кватернионов не меняется при циклической перестановке сомножителей.

По аналогии с комплексными числами для кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \overrightarrow{\lambda}$ определяется *сопряженный кватернион* $\widetilde{\Lambda}$:

$$\widetilde{\Lambda} = \lambda_0 - \overrightarrow{\lambda}$$

Нормой кватерниона Λ называется произведение этого кватерниона на его сопряженное значение:

$$||\Lambda|| = \Lambda \circ \widetilde{\Lambda} = \lambda_0^2 + \overrightarrow{\lambda} \cdot \overrightarrow{\lambda} = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k^2$$

Если $||\Lambda|| = 1$, то такой кватернион называется *нормированным*.

Для произведения двух сопряженных кватернионов $\widetilde{\Lambda} = \lambda_0 - \overrightarrow{\lambda}$ и $\widetilde{M} = \mu_0 - \overrightarrow{\mu}$ по формуле умножения имеем:

$$\widetilde{M} \circ \widetilde{\Lambda} = \lambda_0\mu_0 - \overrightarrow{\lambda} \cdot \overrightarrow{\mu} - (\lambda_0\overrightarrow{\mu} + \mu_0\overrightarrow{\lambda} + \overrightarrow{\lambda} \times \overrightarrow{\mu}) = (\widetilde{\Lambda \circ M})$$

Отсюда для нормы произведения двух кватернионов:

$$||\Lambda \circ M|| = \Lambda \circ M \circ \widetilde{M} \circ \widetilde{\Lambda} = ||\Lambda|| \cdot ||M||$$

Операция *деления* двух кватернионов определяется как операция умножения на *обратный* кватернион.

Кватернионом, обратным к Λ, называется кватернионΛ^{-1}, определяемый из условия

$$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1$$

Умножим обе части уравнения $\Lambda \circ \Lambda^{-1} = 1$ на $\widetilde{\Lambda}$ слева:

$$\Lambda^{-1} = \frac{\widetilde{\Lambda}}{||\Lambda||}$$

3.3 Кватернионный способ задания ориентации твердого тела (присоединенное отображение).

Теорема о положении твердого тела: *произвольное положение твердого тела с неподвижной точкой задается нормированным кватернионом Λ по формулам*

$$\overrightarrow{e_k} = \Lambda \circ \overrightarrow{i_k} \circ \widetilde{\Lambda}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

где базис $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ связан с самим телом, а базис $O\overrightarrow{i_1}\overrightarrow{i_2}\overrightarrow{i_3}$ неподвижен. При этом каждому положению тела соответствуют два значения кватерниона Λ, отличающихся знаком.

Доказательство.

Будем искать решение в виде

$$\Lambda = \lambda_0 + \overrightarrow{\lambda}, \text{ где } \lambda_0^2 + |\overrightarrow{\lambda}|^2 = 1$$

Введем обозначения

$$\overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{e_k} - \overrightarrow{i_k}, \qquad \overrightarrow{s_k} = \overrightarrow{e_k} + \overrightarrow{i_k}, \qquad k = 1, 2, 3$$

Для этих векторов, очевидно,

$$\overrightarrow{s_k} \cdot \overrightarrow{r_k} = 0, \qquad \overrightarrow{s_j} \cdot \overrightarrow{r_k} = -\overrightarrow{s_k} \cdot \overrightarrow{r_j}$$

Записывая исходную формулу в виде $\overrightarrow{e_k} \circ \Lambda = \Lambda \circ \overrightarrow{i_k}$, получим систему:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_k} \cdot \overrightarrow{\lambda} = \overrightarrow{i_k} \cdot \overrightarrow{\lambda} \\ \lambda_0 \overrightarrow{e_k} + \overrightarrow{e_k} \times \overrightarrow{\lambda} = \lambda_0 \overrightarrow{i_k} - \overrightarrow{i_k} \times \overrightarrow{\lambda}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_k} \cdot \overrightarrow{\lambda} = 0 \\ \lambda_0 \overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{\lambda} \times \overrightarrow{s_k}, \end{cases}$$

Если базисы совпадают, то из второго уравнения системы получим $\overrightarrow{\lambda} = 0$, откуда $\Lambda = \lambda_0 = \pm 1$, что соответствует утверждению теоремы.

Если они не совпадают, то найдется, по крайней мере, два не равных нулю вектора $\overrightarrow{r_k}$ и $\overrightarrow{r_j}$. Пусть для определенности это вектора $\overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{r_2}$. Из первого уравнения системы следует, что векторная часть искомого решения может быть написана в виде

$$\overrightarrow{\lambda} = x(\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}),$$

где x - некоторый скаляр. Подстановка этого выражения во второе уравнение системы даст

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = -x(\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{r_2}) \\ \lambda_0 = x(\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{r_1}) \end{array} \right.$$

Полученные уравнения, очевидно, совпадают. Тогда искомое решение системы имеет вид

$$\Lambda = x(\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2})$$

С учетом условия нормировки, окончательно получим формулу

$$\Lambda = \pm \frac{\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}}{\sqrt{(\overrightarrow{s_2} \cdot \overrightarrow{r_1})^2 + (\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2})^2}}$$

Теорема доказана.

Преобразование в исходной формуле называется **присоединенным отображением**.

3.4 Параметры Родрига-Гамильтона

Запишем единичный кватернион в форме

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda \overrightarrow{e},$$

где $\lambda = |\overrightarrow{\lambda}|$, а $\overrightarrow{e}$ - единичный вектор направления вектора $\overrightarrow{\lambda}$.

Кватернион единичный, откуда $\lambda_0^2 + \lambda^2 = 1$. Два скаляра, удовлетворяющие уравнению единичной окружности, всегда могут быть представлены в таком виде, что $\Lambda = \cos\varphi/2 + \overrightarrow{e}\sin\varphi/2$.

Теорема о повороте базиса: *Поворот, определяемый кватернионом Λ, есть поворот вокруг вектора $\overrightarrow{e}$ на угол φ.*

Доказательство.

Вычислим образы орт исходного базиса с помощью теоремы о положении твердого тела, выбрав исходный базис как $\overrightarrow{i_1} \equiv \overrightarrow{e}$, $i_2, i_3 \perp \overrightarrow{e}$:

$$\overrightarrow{i'}_1 = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overrightarrow{i_1}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \overrightarrow{i_1} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \overrightarrow{i_1}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \overrightarrow{i_1}$$

$$\overrightarrow{i'}_2 = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overrightarrow{i_1}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \overrightarrow{i_2} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \overrightarrow{i_1}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \overrightarrow{i_2}\cos\varphi + \overrightarrow{i_3}\sin\varphi$$

$$\overrightarrow{i'}_3 = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overrightarrow{i_1}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \overrightarrow{i_3} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \overrightarrow{i_1}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = -\overrightarrow{i_2}\sin\varphi + \overrightarrow{i_3}\cos\varphi$$

Тогда матрица поворота:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Теорема доказана.

В покомпонентной записи этот кватернион имеет вид

$$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + x\sin\frac{\varphi}{2}\overrightarrow{i_1} + y\sin\frac{\varphi}{2}\overrightarrow{i_2} + z\sin\frac{\varphi}{2}\overrightarrow{i_3},$$

коэффициенты которого называются **параметрами Родрига-Гамильтона**.

3.5 Кватернионные формулы сложения поворотов

Пусть кватернион Λ задает поворот тела из базиса $\overrightarrow{I}$ в базис $\overrightarrow{I'}$, а кватернион M - поворот из базиса $\overrightarrow{I'}$ в базис $\overrightarrow{I''}$. В результате указанных двух поворотов начальное положение $\overrightarrow{r}$ произвольной точки тела преобразуется в конечное положение $\overrightarrow{r''}$ по формуле

$$\overrightarrow{r''} = M \circ \overrightarrow{r'} \circ \widetilde{M} = M \circ \Lambda \circ \overrightarrow{r} \circ \widetilde{\Lambda} \circ \widetilde{M} = N \circ \overrightarrow{r} \circ \widetilde{N},$$

где N - кватернион результирующего поворота. Отсюда следует, что этот кватернион определяется как

$$N = M \circ \Lambda$$

По индукции доказывается, что в случае n последовательных поворотов, задаваемых кватернионами $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$, формула сложения поворотов имеет вид

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \ldots \circ \Lambda_1$$

3.6 Теорема Эйлера о конечном повороте твердого тела с неподвижной точкой.

Теорема Эйлера о конечном повороте: *любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг оси* $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{\lambda}/|\overrightarrow{\lambda}|$ *на угол* $\vartheta = 2\arccos\lambda_0$, *где* $\Lambda = \lambda_0 + \overrightarrow{\lambda}$ *- нормированный кватернион, задающий положение тела.*

Доказательство.

Запишем кватернион Λ в тригонометрической форме:

$$\Lambda = \cos\varphi + \overrightarrow{e}\sin\varphi, \qquad \cos\varphi = \lambda_0, \overrightarrow{e} = \overrightarrow{\lambda}/|\lambda|$$

Дополним вектор $\overrightarrow{e}$ единичными векторами $\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{k}$ до правой ортогональной тройки ($\overrightarrow{e} \circ \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$) таким образом, чтобы вектор $\overrightarrow{r}$ оказался в плоскости векторов $\overrightarrow{e}$ и $\overrightarrow{j}$. Тогда вектор $\overrightarrow{r}$ запишется в виде

$$\overrightarrow{r} = |\overrightarrow{r}|(\overrightarrow{e}\cos\beta + \overrightarrow{j}\sin\beta)$$

Учитывая, что из условия ортогональности векторов $\overrightarrow{e}$ и $\overrightarrow{j}$ следует равенство $\overrightarrow{j} \circ \widetilde{\Lambda} = \Lambda \circ \overrightarrow{j}$, по теореме о положении твердого тела получим

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r'} &= |\overrightarrow{r}|(\Lambda \circ \overrightarrow{e} \circ \widetilde{\Lambda} \cos\beta + \Lambda \circ \overrightarrow{j} \circ \widetilde{\Lambda} \sin\beta = \\ &= |\overrightarrow{r}|(\overrightarrow{e} \cos\beta + (\overrightarrow{j} \cos 2\varphi + \overrightarrow{k} \sin 2\varphi \sin\beta))\end{aligned}$$

Сравнивая полученое выражение с вектором $\overrightarrow{r'}$, получаем требуемое.

Теорема доказана.

3.7 Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в кватернионах (уравнения Пуассона).

Рассмотрим движение тела с неподвижной точкой O относительно базиса $\overrightarrow{I}$. Моментам времени t и $t+\Delta t$ соответствуют положения связанного с телом базиса $\overrightarrow{E}(t)$ и $\overrightarrow{E}(t+\Delta t)$. По теореме Эйлера о конечном повороте указанные положения можно совместить одним поворотом вокруг некоторой оси $\overrightarrow{e}(t, \Delta t)$ на некоторый угол $\Delta\varphi(t, \Delta t)$.

Угловой скоростью твердого тела относительно базиса $\overrightarrow{I}$ в момент t называется предел

$$\overrightarrow{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{\Delta t} \overrightarrow{e}(t, \Delta t)$$

Найдем выражение для вектора угловой скорости через кватернион $\Lambda(t)$, задающий положение тела относительно базиса $\overrightarrow{I}$. Перемещению тела из положения $\overrightarrow{E}(t)$ в положение $\overrightarrow{E}(t+\Delta t)$ соответствует кватернион

$$\begin{aligned}\delta\Lambda &= \cos\frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{2} + \overrightarrow{e}(t, \Delta t) \sin\frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{2} = \\ &= 1 + \overrightarrow{e}(t, \Delta t) \sin\frac{\Delta\varphi(t, \Delta t)}{2} + O((\Delta\varphi)^2)\end{aligned}$$

Перепишем формулу сложения поворотов $\Lambda(t+\Delta t) = \delta\Lambda \circ \Lambda(t)$:

$$\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t) = \delta\Lambda \circ \Lambda(t) - \Lambda(t) \Rightarrow \Delta\Lambda = (\delta\Lambda - 1) \circ \Lambda(t)$$

Тогда

$$\dot{\Lambda} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Lambda}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta\Lambda - 1}{\Delta t} \circ \Lambda(t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega} \circ \Lambda(t),$$

откуда

$$\overrightarrow{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \widetilde{\Lambda}$$

Полученные формулы для $\dot{\Lambda}$ являются кинематическими уравнениями вращательного движения твердого тела, записанными в кватернионах, и называются **уравнениями Пуассона**.

Угловым ускорением называется вектор

$$\overrightarrow{\varepsilon} = \dot{\overrightarrow{\omega}}$$

3.8 Распределение скоростей и ускорений в твердом теле (формулы Эйлера и Ривальса).

Рассмотрим произвольное движение тела относительно системы отсчета $A\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$. Пусть Λ - нормированный кватернион, задающий ориентацию связанного с телом базиса $O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ относительно $A\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$. Вычислим производные по времени от базисных векторов $\overrightarrow{e_k}$ в системе отсчета $A\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$:

$$\dot{\overrightarrow{e_k}} = \dot{\Lambda} \circ \overrightarrow{i_k} \circ \widetilde{\Lambda} + \Lambda \circ \overrightarrow{i_k} \circ \dot{\widetilde{\Lambda}}, \qquad k = 1, 2, 3$$

С учетом равенств

$$\Lambda \circ \widetilde{\Lambda} = 1 \Rightarrow \dot{\Lambda} \circ \widetilde{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\widetilde{\Lambda}} = 0$$

получим

$$\dot{\overrightarrow{e_k}} = \dot{\Lambda} \circ (\widetilde{\Lambda} \circ \Lambda) \circ \overrightarrow{i_k} \circ \widetilde{\Lambda} + \Lambda \circ \overrightarrow{i_k} \circ (\widetilde{\Lambda} \circ \Lambda) \circ \dot{\widetilde{\Lambda}} = \\ = \dot{\Lambda} \circ \widetilde{\Lambda} \circ \overrightarrow{e_k} - \overrightarrow{e_k} \circ \dot{\Lambda} \circ \widetilde{\Lambda}$$

С учетом выражения для вектора угловой скорости:

$$\dot{\overrightarrow{e_k}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{e_k}, \qquad k = 1, 2, 3$$

Найдем скорость произвольной точки тела в системе $A\overrightarrow{i_1}\,\overrightarrow{i_2}\,\overrightarrow{i_3}$. Положение этой точки определяется вектором

$$\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{R_O} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_O} + (x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}), \qquad \overrightarrow{R_O} = \overrightarrow{AO}$$

Дифференцируя это уравнение по времени с учетом полученного ранее соотношения приходим к **формуле Эйлера** распределения скоростей в твердом теле:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_O} + \dot{\overrightarrow{R}} = \overrightarrow{V_O} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{R}$$

Дифференцирование последней формулы по времени дает **формулу Ривальса** распределения ускорений в твердом теле:

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{\varepsilon} \times \overrightarrow{R} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{R}),$$

где $\overrightarrow{W_O}$ - *ускорение полюса*, $\overrightarrow{\varepsilon} \times \overrightarrow{R}$ - *вращательное ускорение*, $\overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{R})$ - *осестремительное ускорение*.

3.9 Разложение движения тела на поступательное движение и вращение (движение с неподвижной точкой). Кинематический винт твердого тела.

Согласно формуле Эйлера, в каждый момент времени произвольное движение твердого тела может быть представлено как комбинация поступательного движения со скоростью $\overrightarrow{V_O}$ некоторой точки O тела и вращения вокруг оси, проходящей через точку O, параллельной вектору $\overrightarrow{\omega}$. Выбирая в качестве полюса различные точки тела, получим разные представления одного и того же движения тела. **Кинематическим винтом** называется такое представление движения тела, в котором вектор скорости $\overrightarrow{V_C}$ выбранного полюса C параллелен вектору угловой скорости тела $\overrightarrow{\omega}$, т.е. $\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{V_C} = 0$. Зная $\overrightarrow{V_O}$ и $\overrightarrow{\omega}$, найдем эту точку C.

В силу формулы Эйлера $\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_O} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{R_{OC}}$ для этой точки должно выполняться равенство

$$\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{V_O} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{R_{OC}}) = 0$$

Разложим радиус-вектор искомой точки на две составляющие:

$$\overrightarrow{R_{OC}} = \overrightarrow{h_{OC}} + \overrightarrow{f_{OC}}, \text{ где } \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{h_{OC}} = 0,\ \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{f_{OC}} = 0$$

Тогда составляющая $\overrightarrow{f_{OC}}$, параллельная вектору $\overrightarrow{\omega}$ может принимать любые значения, а составляющая, ортогональная вектору $\overrightarrow{\omega}$

$$\overrightarrow{h_{OC}} = \overrightarrow{\omega} \times \frac{\overrightarrow{V_O}}{\omega^2}$$

Отсюда следует, что точки, удовлетворяющие условию $\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{V_C} = 0$, образуют прямую, называемую *осью кинематического винта*. Эта прямая параллельна вектору угловой скорости тела - *главному вектору винта*. Скорости всех точек тела, принадлежащих оси винта, одинаковы по величине и по направлению. Величину V_C скорости этих точек можно определить по известной скорости точки O и угловой скорости тела, используя инвариантность скалярного произведения: $\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{V_O}$. записывая вектор $\overrightarrow{V_C}$ в виде $\overrightarrow{V_C} = V_C \overrightarrow{\omega}/|\overrightarrow{\omega}|$, получим

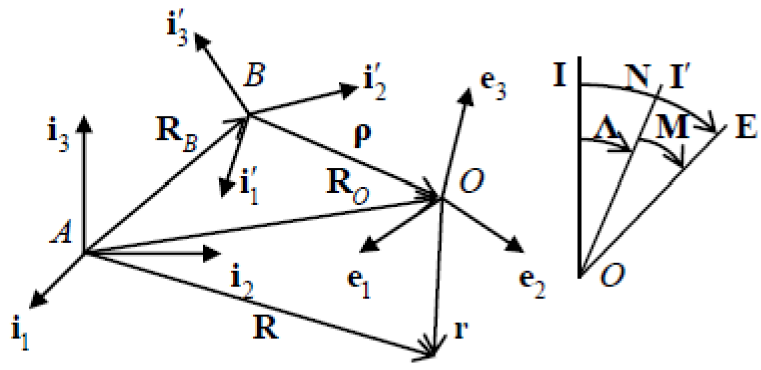
$$V_C = \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{V_O}/|\overrightarrow{\omega}|$$

Кинематический винт характеризуется тремя параметрами: *осью винта, вектором угловой скорости тела и величиной скорости V_C точек винта.*

Отметим, что ось кинематического винта является осью минимальных скоростей твердого тела. В частном случае, когда $V_C = 0$, движение тела представляет собой мгновенное вращение вокруг этой оси. Для мгновенного поступательного движения ($\overrightarrow{\omega} = 0$) кинематический винт не определен.

3.10 Кинематика сложного движения. Сложение скоростей и ускорений точек в сложном движении. Вычисление угловой скорости и углового ускорения тела в сложном движении.

Формулировка задачи на сложное движение состоит в следующем. Пусть задано движение связанного с твердым телом базиса $O\overrightarrow{E}$ относительно базиса $B\overrightarrow{I'}$, и задано движение базиса $B\overrightarrow{I'}$ относительно системы отсчета $A\overrightarrow{I}$. Требуется найти движение базиса $O\overrightarrow{E}$ относительно $A\overrightarrow{I}$.



В этой задаче движение базиса $O\overrightarrow{E}$ относительно $B\overrightarrow{I'}$ называется *относительным* движением тела, движение базиса $B\overrightarrow{I'}$ относительно $A\overrightarrow{I}$ - *переносным* движением, а движение базиса $O\overrightarrow{E}$ относительно $A\overrightarrow{I}$ - *абсолютным* движением.

Переносное движение тела задается скоростью $\overrightarrow{V_B}$ и ускорением$\overrightarrow{W_B}$ точки B относительно системы $A\overrightarrow{I}$, а также угловой скоростью $\overrightarrow{\omega}^{\text{пер}}$ и угловым ускорением $\overrightarrow{\varepsilon}^{\text{пер}}$ базиса $B\overrightarrow{I'}$ относительно $A\overrightarrow{I}$. В свою очередь векторы $\overrightarrow{V_O}^{\text{отн}}$ и $\overrightarrow{W_O}^{\text{отн}}$ задают скорость и ускорение точки O в системе $B\overrightarrow{I'}$, а векторы $\overrightarrow{\omega}^{\text{отн}}$ и $\overrightarrow{\varepsilon}^{\text{отн}}$ - угловую скорость и угловое ускорение связанного с телом базиса $O\overrightarrow{E}$ относительно $B\overrightarrow{I'}$.

Чтобы найти параметры абсолютного движения тела, нужно найти скорость $\overrightarrow{V_O}$ и ускорение $\overrightarrow{W_O}$ точки O в системе отсчета $A\overrightarrow{I}$, а также угловую скорость и угловое ускорение базиса $O\overrightarrow{E}$ относительно $A\overrightarrow{I}$.

Найдем сначала скорость и ускорение точки O в системе отсчета $A\overrightarrow{I}$. Записывая вектор $\overrightarrow{\rho}$ определяющий положение точки O в базисе $B\overrightarrow{I'}$ в виде $\overrightarrow{\rho} = \sum \rho_k \overrightarrow{i'}_k$ и дифференцируя вектор $\overrightarrow{R_O} = \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{\rho}$ по времени в системе $A\overrightarrow{I}$, получим

$$\overrightarrow{V_O} = \dot{\overrightarrow{R_B}} + \dot{\overrightarrow{\rho}} = \overrightarrow{V_B} + \sum_1^3 \dot{\rho}_k \overrightarrow{i'}_k + \sum_1^3 \rho_k \dot{\overrightarrow{i'}}_k =$$
$$= \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_O}^{\text{отн}} + \overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} \times \overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{V_O}^{\text{отн}} + \overrightarrow{V_O}^{\text{пер}}$$

Ускорение точки O в системе $A\overrightarrow{I}$ находится дифференцированием вектора $\overrightarrow{V_O}$ по времени в системе $A\overrightarrow{I}$:

$$\overrightarrow{W_O} = \overrightarrow{W_B} + \sum_1^3 \ddot{\rho}_k \overrightarrow{i'}_k + 2\sum_1^3 \dot{\rho}_k \dot{\overrightarrow{i'}}_k + \sum_1^3 \rho_k \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} \times \overrightarrow{i'}_k) =$$
$$= \left[\overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{\varepsilon}^{\text{пер}} \times \overrightarrow{\rho} + \overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} \times (\overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} \times \overrightarrow{\rho})\right] + \sum_1^3 \ddot{\rho}_k \overrightarrow{i'}_k + 2\overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} \times \overrightarrow{V_O}^{\text{отн}} =$$
$$= \overrightarrow{W_O}^{\text{пер}} + \overrightarrow{W_O}^{\text{отн}} + \overrightarrow{W_O}^{\text{кор}}$$

Найдем угловую сокрость $\overrightarrow{\omega}$ твердого тела в системе $A\overrightarrow{I}$. Запишем скорость произвольной точки тела в этой системе, используя формулу сложения скоростей и формулу Эйлера:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^{\text{пер}} + \overrightarrow{V}^{\text{отн}} = \left[\overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} \times (\overrightarrow{r} + \overrightarrow{\rho})\right] + \left[\overrightarrow{V_O}^{\text{отн}} + \overrightarrow{\omega}^{\text{отн}} \times \overrightarrow{r}\right] =$$
$$= \left[\overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} \times \overrightarrow{\rho} + \overrightarrow{V_O}^{\text{отн}}\right] + (\overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} + \overrightarrow{\omega}^{\text{отн}}) \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{V_O} + (\overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} + \overrightarrow{\omega}^{\text{отн}}) \times \overrightarrow{r}$$

Отсюда, в силу произвольности $\overrightarrow{r}$

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} + \overrightarrow{\omega}^{\text{отн}}$$

Найдем абсолютное угловое ускорение тела $\overrightarrow{\varepsilon}$, продифференицровав последнюю формулу и учитывая, что если $\overrightarrow{\omega}^{\text{отн}} = \sum\limits_{1}^{3} \omega_k^{\text{отн}} \overrightarrow{i'}_k$, то $\overrightarrow{\varepsilon}^{\text{отн}} = \sum\limits_{1}^{3} \dot{\omega}_k^{\text{отн}} \overrightarrow{i'}_k$:

$$\overrightarrow{\varepsilon} = \dot{\overrightarrow{\omega}}^{\text{пер}} + \dot{\overrightarrow{\omega}}^{\text{отн}} = \overrightarrow{\varepsilon}^{\text{пер}} + \overrightarrow{\varepsilon}^{\text{отн}} + \overrightarrow{\omega}^{\text{пер}} \times \overrightarrow{\omega}^{\text{отн}}$$

3.11 Кинематические уравнения движения твердого тела в углах Эйлера.

В соответствии с правилом выбора углов Эйлера, движение тела с неподвижной точкой представляется в виде суммы трех вращений: 1) вокруг оси прецессии $\overrightarrow{i_3}$ с угловой скоростью $\dot{\psi}$; 2) вокруг линии узлов $\overrightarrow{i'}_1$ с угловой скоростью $\dot{\theta}$; 3) вокруг оси собственного вращения $\overrightarrow{e_3}$ с угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Из формулы сложения угловых скоростей в сложном движении тела:

$$\overrightarrow{\omega} = \dot{\psi}\overrightarrow{i_3} + \dot{\theta}\overrightarrow{i'}_1 + \dot{\varphi}\overrightarrow{e_3}$$

Проектируя это равенство на оси связанного с телом базиса и используя для проекций угловой скорости на эти оси обозначения $p = \overrightarrow{\omega}\overrightarrow{e_1}$, $q = \overrightarrow{\omega}\overrightarrow{e_2}$, $r = \overrightarrow{\omega}\overrightarrow{e_3}$, получим

$$p = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi$$

$$q = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi$$

$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$$

Кинематические уравнения Эйлера получаются разрешением полученной системы относительно производных от углов Эйлера:

$$\dot{\psi} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta}$$

$$\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi$$

$$\dot{\varphi} = r - \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\operatorname{tg}\theta}$$

Напомним, что если $\sin\theta = 0$, то система вырождается.

3.12 Прецессионное движение твердого тела. Интегрирование уравнений Пуассона для прецессионного движения твердого тела.

Движение твердого тела с неподвижной точкой называется **прецессионным**, если некоторая фиксированная в теле ось $\overrightarrow{e}$, проходящая через неподвижную точку, совершает движение по поверхности неподвижного кругового конуса.

В случае прецессионного движения угол θ между осью конуса $\overrightarrow{i}$ и осью тела $\overrightarrow{e}$ не меняется, поэтому $\overrightarrow{i} \cdot \dot{\overrightarrow{e}} = 0$. Отсюда с учетом формулы $\dot{\overrightarrow{e}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{e}$ получаем $\overrightarrow{i} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{e}) = 0$, т.е. вектор угловой скорости тела раскладывается на ось конуса $\overrightarrow{i}$ и ось тела $\overrightarrow{e}$:

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega_1} + \overrightarrow{\omega_2} = \omega_1(t)\overrightarrow{i} + \omega_2(t)\overrightarrow{e}$$

Ось конуса $\overrightarrow{i}$ называется *осью прецессии*, ось тела $\overrightarrow{e}$ - *осью собственного вращения*, а составляющие ω_1 и ω_2 - угловые скорости *прецессии* и *собственного вращения* соответственно. Если $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{i_3}$ и $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e_3}$, то составляющие угловой скорости равны соответствующим производным от углов Эйлера: $\omega_1 = \dot{\psi}$, $\omega_2 = \dot{\varphi}$.

Если составляющие угловой скорости не зависят от времени, то такая прецессия называется *регулярной*.

Приведем решение уравнений Пуассона для рассматриваемого прецессионного движения тела. Будем считать, что в начальный момент времени ($t = 0$) оси связанного с телом базиса $O\overrightarrow{E}$ совпадают с осями системы отсчета $O\overrightarrow{I}$, ось прецессии направлена по вектору $\overrightarrow{i_3}$, а ось собственного вращения в начальный момент лежит в плоскости векторов $\overrightarrow{i_2}$, $\overrightarrow{i_3}$.

Введем базис $O\overrightarrow{I'}$, вращающийся относительно неподвижного базиса $O\overrightarrow{I}$ с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_1} = \omega_1 \overrightarrow{i_3}$. Тогда связанный с телом базис $O\overrightarrow{E}$ будет вращаться относительно базиса $O\overrightarrow{I}$ с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_2} = \omega_2 \overrightarrow{e}$.

Поскольку движение базиса $O\overrightarrow{I'}$ относительно базиса $O\overrightarrow{I}$ есть вращение вокруг неподвижной оси $\overrightarrow{i_3}$, то положение этого базиса будет определяться кватернионом

$$\Lambda_1 = \cos\frac{\vartheta_1}{2} + \overrightarrow{i_3}\sin\frac{\vartheta_1}{2}, \qquad \vartheta_1 = \int\limits_0^t \omega_1(\tau)d(\tau)$$

Так как ось $\overrightarrow{e}$ неподвижна в базисе $O\overrightarrow{I'}$, то кватернион Λ_2 задающий положение базиса $O\overrightarrow{E}$ относительно $O\overrightarrow{I'}$, определяется выражением

$$\Lambda_2 = \cos\frac{\vartheta_2}{2} + \overrightarrow{e}\sin\frac{\vartheta_2}{2}, \qquad \vartheta_2 = \int\limits_0^t \omega_2(\tau)d(\tau)$$

По формуле сложения поворотов найдем кватернион Λ, задающий положение $O\overrightarrow{E}$ относительно $O\overrightarrow{I}$

$$\Lambda(t) = \left(\cos\frac{\vartheta_1}{2} + \overrightarrow{i_3}\sin\frac{\vartheta_1}{2}\right) \circ \left(\cos\frac{\vartheta_2}{2} + (\Lambda_1 \circ \overrightarrow{e} \circ \widetilde{\Lambda_1})\sin\frac{\vartheta_2}{2}\right)$$

Глава 4

Основные теоремы динамики

4.1 Связанные определения.

Рассмотрим непрерывную совокупность материальных точек, образующую механическую систему S. Для такой системы

центром масс называется точка, радиус-вектор которой определяется по формуле(в скобках будут указываться те же формулы для дискретного случая, то есть для системы из N изолированных материальных точек):

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{m}\int\limits_S \overrightarrow{r}\,dm, \qquad m = \int\limits_S dm$$

$$\left(\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{r_i}m_i, \qquad m = \sum_{i=1}^{N} m_i\right)$$

импульсом или **количеством движения** называется интеграл:

$$\overrightarrow{p} = \int\limits_S \overrightarrow{v}\,dm \qquad \left(\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{v_i}\right)$$

моментом импульса или **кинетическим моментом** относительно некоторой точки O с радиус-вектором $\overrightarrow{r_O}$ называется вектор

$$\overrightarrow{K_O} = \int\limits_S (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_O}) \times \overrightarrow{v}\,dm \qquad \left(\overrightarrow{K_O} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{r_O}) \times \overrightarrow{v_i}\right)$$

кинетической энергией называется скалярная неотрицательная величина

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_S \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}\, dm \qquad \left(T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_i} \right)$$

Силы, действующие на рассматриваемую точку системы S со стороны других точек этой же системы, называются **внутренними**, а силы, действующие на нее со стороны точек, лежащих вне рассматриваемой системы - **внешними**:

$$d\overrightarrow{F} = d\overrightarrow{F^e} + d\overrightarrow{F^i} = \overrightarrow{f^e} dm + \overrightarrow{f^i} dm$$

-где $\overrightarrow{F^e}$ и $\overrightarrow{F^i}$ соответственно внешние и внутренние силы, а $\overrightarrow{f^e}$ и $\overrightarrow{f^i}$ - плотности этих сил.

Когда говорится о силе, считается, что она приложена к какой-либо точке. Отметим также, что сила вводится как *независимая категория* - ее нельзя вывести из каких-либо физических законов.

Определим следующие понятия, связанные с понятием силы:

импульсом силы за время $t_2 - t_1$ называется интеграл

$$\overrightarrow{I} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} dt$$

элементарной работой силы на перемещении $\delta\overrightarrow{r}$ называется скалярная величина

$$\delta A = \overrightarrow{F} \cdot \delta\overrightarrow{r}$$

мощностью силы за время δt называется скалярная величина

$$N = \frac{\delta A}{\delta t} = \overrightarrow{F}\overrightarrow{v}$$

моментом силы называется вектор

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F},$$

где вектор $\overrightarrow{r}$ есть радиус-вектор, проведенный от оси вращения к точке приложения силы.

4.2 Теоремы Кёнига для кинетической энергии и момента импульса.

Движением системы относительно ее центра масс называется движение точек системы относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы. Такая система координат называется *кёниговой*. Отметим, что кёнигова система координат не вращается.

Пусть $\overrightarrow{v_C}$ - абсолютная скорость центра масс, $\overrightarrow{v_\nu}$ - абсолютная скорость точки P_ν системы, $\overrightarrow{v_{\nu r}}$ - скорость точки P_ν в ее движении относительно центра масс. Так как кёнигова система отсчета движется только поступательно, то переносные скорости всех точек системы одинаковы и равны $\overrightarrow{v_C}$. Тогда абсолютная скорость точки P_ν будет определяться формулой:

$$\overrightarrow{v_\nu} = \overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{v_{\nu r}}$$

Теорема Кёнига для кинетической энергии системы: *кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и кинетической энергией движения системы относительно кёниговой системы отсчета.*

Доказательство.

Из определения кинетической энергии следует:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_S \overrightarrow{v_\nu}^2 dm = \frac{1}{2}\int\limits_S \left(\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{v_{\nu r}}\right)^2 dm = \frac{1}{2}\int\limits_S \left[\overrightarrow{v_C}^2 + 2\overrightarrow{v_C}\cdot\overrightarrow{v_{\nu r}} + \overrightarrow{v_{\nu r}}^2\right] dm$$

Второе слагаемое $\frac{1}{2}\overrightarrow{v_C}\int\limits_S \overrightarrow{v_{\nu r}} dm = \frac{1}{2}\overrightarrow{v_C}\cdot m\overrightarrow{v_{Cr}}$ равно нулю, так как начало кёниговой системы отсчета лежит в центре масс системы, а значит относительная скорость центра масс равна нулю. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\int\limits_S v_{\nu r}^2 dm$$

Теорема доказана.

Теорема Кёнига для момента импульса системы: *момент импульса системы равен сумме момента импульса, который имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу, равную массе системы, и момента импульса движения системы относительно кёниговой системы отсчета.*

Доказательство.

Из определения момента импульса следует:

$$\overrightarrow{K} = \int\limits_S \overrightarrow{r_\nu} \times \overrightarrow{v_\nu} dm = \int\limits_S (\overrightarrow{r_{\nu r}} + \overrightarrow{r_C}) \times (\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{v_{\nu r}})\, dm = \overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{v_C} \int\limits_S dm +$$
$$+ \left(\int\limits_S \overrightarrow{r_{\nu r}} dm \right) \times \overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{r_C} \times \int\limits_S \overrightarrow{v_{\nu r}} dm + \int\limits_S \overrightarrow{r_{\nu r}} \times \overrightarrow{v_{\nu r}} dm$$

Так как $\overrightarrow{r_{\nu r}} = \overrightarrow{r_\nu} - \overrightarrow{r_C}$, то

$$\int\limits_S \overrightarrow{r_{\nu r}} dm = \int\limits_S \overrightarrow{r_\nu} dm - \overrightarrow{r_C} \int\limits_S dm = 0, \text{ откуда}$$

$$\int\limits_S \overrightarrow{v_{\nu r}} dm = \int\limits_S \overrightarrow{\dot{r}_{\nu r}} dm = \int\limits_S \overrightarrow{\dot{r}_\nu} dm - \overrightarrow{v_C} \int\limits_S dm = 0$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{K} = \overrightarrow{r_C} \times M\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{K^*},$$

где $\overrightarrow{K^*} = \int\limits_S \overrightarrow{r_{\nu r}} \times \overrightarrow{v_{\nu r}} dm$ - момент импульса движения системы относительно кёниговой системы отсчета.

Теорема доказана.

4.3 Теоремы об изменении импульса, момента импульса и кинетической энергии в инерциальных системах отсчета.

Теорема об изменении импульса: *производная от импульса системы равна сумме всех внешних сил системы.*

Доказательство.

Запишем второй закон Ньютона через плотности внутренних и внешних сил:

$$\ddot{\overrightarrow{r}}dm = \overrightarrow{f^e}dm + \overrightarrow{f^i}dm, \text{ откуда}$$

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{f^e} + \overrightarrow{f^i}$$

Учитывая, что в силу третьего закона Ньютона интеграл от плотности внутренних сил равен нулю, из определения импульса получим:

$$\dot{\overrightarrow{p}} = \int\limits_S \dot{\overrightarrow{v}}dm = \int\limits_S \left(\overrightarrow{f^e} + \overrightarrow{f^i}\right)dm = \overrightarrow{R^e},$$

где $\overrightarrow{R^e}$ - сумма всех внешних сил системы.

Теорема доказана.

Заметим, что

$$\dot{\overrightarrow{p}} = \int\limits_S \dot{\overrightarrow{v}}dm = \frac{d}{dt}\int\limits_S \dot{\overrightarrow{r}}dm = m\dot{\overrightarrow{v_C}}$$

С учетом предыдущей теоремы, получим **теорему о движении центра масс:**

$$m\dot{\overrightarrow{v_C}} = \overrightarrow{R^e}$$

Теорема об изменении момента импульса: *скорость изменения момента импульса относительно некоторой точки O равна моменту всех внешних сил, вычисленному относительно той же точки, минус масса* *системы, умноженная на векторное произведение скоростей точки O и центра масс системы.*

Доказательство:

Из определения момента импульса следует:

$$\overrightarrow{K_O} = \int\limits_S (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_O}) \times \overrightarrow{v}\, dm$$

$$\dot{\overrightarrow{K_O}} = \int\limits_S (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_O}) \times \overrightarrow{v}\, dm + \int\limits_S (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_O}) \times \dot{\overrightarrow{v}}\, dm$$

Пользуясь вторым законом Ньютона через плотности внутренних и внешних сил и учитывая, что в силу третьего закона Ньютона интеграл от плотности внутренних сил равен нулю, получим:

$$\dot{\overrightarrow{K_O}} = -m\overrightarrow{v_O} \times \overrightarrow{v_C} + \int\limits_S (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_O}) \times \left(\overrightarrow{f^e} + \overrightarrow{f^i}\right) dm = \overrightarrow{M_O^e} - m\overrightarrow{v_O} \times \overrightarrow{v_C},$$

где $\overrightarrow{M_O^e}$ - момент всех внешних сил, вычисленный относительно точки O.

Теорема доказана.

Теорема об изменении кинетической энергии: *производная по времени от кинетической энергии системы равна мощности всех сил, приложенных к ней.*

Доказательство.

Из определения кинетической энергии и второго закона Ньютона через плотности внутренних и внешних сил следует:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_S v^2 dm$$

$$\dot{T} = \int\limits_S \overrightarrow{v} \cdot \dot{\overrightarrow{v}}\, dm = \int\limits_S \left(\overrightarrow{f^e} + \overrightarrow{f^i}\right) \cdot \overrightarrow{v}\, dm$$

Отсюда и из определения мощности следует:

$$\dot{T} = N^e + N^i,$$

где N^e и N^i - соответственно суммарные мощности внешних и внутренних сил системы.

Теорема доказана.

Отметим, что мощность внутренних сил, действующих на систему, здесь не исключается. Несмотря на то, что векторная сумма внутренних сил, по третьему закону Ньютона, равна нулю, точки системы могут перемещаться относительно друг друга (так, что центр масс системы перемещается) под действием внутренних сил, то есть работа, а значит и мощность внутренних сил системы не равна нулю.

4.4 Потенциальные, гироскописеские, диссипативные силы. Критерий потенциальности сил.

Сила, приложенная к точке, называется **потенциальной**, если существует такая функция координат этой точки и времени - $U(t, x, y, z)$, что проекции $\overrightarrow{f}$ на оси могут быть вычислены как:

$$f_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad f_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

или, в краткой форме:

$$\overrightarrow{f} = \frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r}}$$

Если потенциал U от времени не зависит, то выражение $d\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{f}$ представляет собой полный дифференциал функции U:

$$d\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{f} = dU$$

Потенциальной энергией всей системы называется величина

$$\Pi = -\int\limits_S U dm$$

Непотенциальные силы называются **гироскопическими** , если их мощность равна нулю.

Непотенциальные силы называются **диссипативными** , если их мощность отрицательна или равна нулю ($N^* \leq 0$, причем$N^* \not\equiv 0$).

Необходимое условие потенциальности сил: *если сила потенциальна, то совершаемая ей работа определяется только начальным и конечным положениями точки и не зависит от способа перемещения из одного положения в другое.*

Доказательство.

Вычислим работу потенциальной силы:

$$A = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} \int\limits_S \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) dm =$$

$$= -\int\limits_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2,$$

где $\Pi_1 = \Pi(x_1, y_1, z_1)$ и $\Pi_2 = \Pi(x_2, y_2, z_2)$ - значения потенциальной энергии соответственно в начальном и конечном положении точки.

Теорема доказана.

Отметим, что не всякая сила, зависящая только от положения, является потенциальной. Для потенциальности требуются еще условия существования функции $\Pi = \Pi(x, y, z)$, которые сводятся к выполнению следующих трех равенств:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

4.5 Консервативные системы, закон сохранения энергии.

Рассмотрим движение системы материальных точек относительно некоторой прямоугольной системы координат, предполагаемой неподвижной. Состояние системы задается радиус-векторами $\overrightarrow{r_v}$ и скоростями $\overrightarrow{v_v}$ ее точек. Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\overrightarrow{r_v}$ и $\overrightarrow{v_v}$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются *связями*. Если на систему не наложены связи, то она называется *свободной*.

Пусть на систему из N материальных точек наложено m связей, и пусть их можно выразить с помощью уравнений:

$$\overrightarrow{\Phi_j}\,(t, \overrightarrow{r_1}, \ldots, \overrightarrow{r_N}, \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_N}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad m \leq 3N$$

Это так называемые *удерживающие (двусторонние)* связи.

Связи, уравнения которых содержат скорости материальных точек, называются *дифференциальными*. Если выполнено условие $\partial\Phi_j/\partial t = 0$, то соответствующие связи называются *стационарными*.

Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи.

Система называется **консервативной**, если:

а) она склерономна

б) все силы системы потенциальны

в) потенциал не зависит явно от времени

Закон сохранения энергии: *полная механическая энергия системы не изменяется во времени, если все действующие силы потенциальны, а их потенциал от времени не зависит.*

Доказательство.

Из теоремы об изменении кинетической энергии следует:

$$dT = \int\limits_S d\overrightarrow{r} \cdot \left(\overrightarrow{f^e} + \overrightarrow{f^i}\right) dm$$

Так как потенциал по условию теоремы не зависит от времени, то подынтегральное выражение в последней формуле есть полный дифференциал функции U. Из определения потенциальной энергии получим окончательно:

$$dT = -d\Pi,$$

откуда следует:

$$T + \Pi = const,$$

где $T + \Pi$ - полная механическая энергия системы.

Теорема доказана.

4.6 Неинерциальные системы отсчета, силы инерции. Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета.

Рассмотрим движение механической системы в произвольно движущейся **неинерциальной системе отсчета**. Найдем абсолютное ускорение $\overrightarrow{w_\nu}$ точки P_ν системы:

$$\overrightarrow{w^\nu} = \overrightarrow{w^{\nu r}} + \overrightarrow{w^{\nu e}} + \overrightarrow{w^{\nu c}}$$

Здесь $\overrightarrow{w^{\nu r}}$ и $\overrightarrow{w^{\nu e}}$ - относительное и переносное ускорения точки P_ν, а $\overrightarrow{w^{\nu c}}$ - ее кориолисово ускорение; $\overrightarrow{w^{\nu c}} = 2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v^{\nu r}}$, где $\overrightarrow{\omega}$ - угловая скорость неинерциальной системы координат относительно инерциальной, а $\overrightarrow{v^{\nu r}}$ - относительная скорость точки P^ν. Подставив выражение для абсолютного ускорения во второй закон Ньютона, получим:

$$m^\nu \overrightarrow{w^{\nu r}} = \overrightarrow{F^{\nu e}} + \overrightarrow{F^{\nu i}} + \overrightarrow{J^{\nu e}} + \overrightarrow{J^{\nu c}},$$

где величины $\overrightarrow{J^{\nu e}} = -m^\nu \overrightarrow{w^{\nu e}}$, $\overrightarrow{J^{\nu c}} = -m^\nu \overrightarrow{w^{\nu c}} = -2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v^{\nu r}}$ называют соответственно *переносной* и *кориолисовой* **силами инерции**.

Таким образом, второй закон Ньютона может быть применен в неинерциальной системе отсчета, если к силам, приложенным к точкам системы, добавить еще переносные и кориолисовы силы инерции.

Но полученные ранее теоремы динамики для инерциальных систем отсчета вытекали из второго закона Ньютона. Следовательно, все сформулированные выше теоремы динамики будут верны и в неинерциальной системе отсчета, если к силам, приложенным к системе, добавить переносные и кориолисовы силы инерции для ее точек. При этом силы инерции следует формально относить к внешним силам.

Глава 5

Движение материальной точки в центральном поле

5.1 Законы сохранения.

Рассмотрим движение точки под действием **центральной** силы, т.е. силы, зависящей только от расстояния рассматриваемой материальной точки до некоторого центра притяжения или отталкивания (называемого далее условно Солнцем) и направленной в каждый момент вдоль прямой, соединяющей рассматриваемую материальную точку с центром. Будем предполагать, что Солнце неподвижно относительно некоторой инерциальной системы отсчета и расположено в начале координат.

При движении материальной точки в поле центральной силы всегда действуют два закона сохранения.

Во-первых, имеет место **закон сохранения кинетического момента** . Действительно, момент центральной силы относительно Солнца равен нулю:

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = 0,$$

так как центральная сила проходит через Солнце, то есть, $\overrightarrow{r} || \overrightarrow{F}$. Но в силу теоремы об изменении момента импульса:

$$\dot{\overrightarrow{K_O}} = \overrightarrow{M_O} = 0,$$

значит, сам вектор кинетического момента не меняется по времени:

$$\overrightarrow{K_O} = const$$

Во-вторых, имеет место **закон сохранения механической энергии**. В системе действует только одна сила, зависящая от положения материальной точки. Покажем, что эта сила потенциальна.

В общем случае вектор центральной силы может быть записан так:

$$\overrightarrow{F} = F(r)\frac{\overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{r}|}$$

Элементарная работа центральной силы равна

$$\delta A = \overrightarrow{F(r)} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{F(r)}{r}\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{F(r)}{2r}d(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r}) = \frac{F(r)}{2r}dr^2 = F(r)dr$$

Значит, центральная сила потенциальна, так как работа не зависит от пути (при этом предполагаем, что потенциал существует).

Возьмем функцию Φ такую, что:

$$d\Phi = f(r)dr,$$

тогда

$$\Phi = \int f(r)dr$$

Эта функция, по определению, является потенциалом. Этот потенциал не зависит от времени, а значит закон сохранения энергии имеет место, так как все действующие силы системы потенциальны, а их потенциал от времени не зависит.

5.2 Уравнение Бине.

Отметим сначала, что при движении точки под действием центральной силы траектория движения есть плоская кривая. Действительно, из закона сохранения кинетического момента следует, что векторное произведение $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{c}$, называемое также *интегралом площадей*, постоянно, а значит, в частности, постоянно и направление получившегося вектора. Это означает, что заметаемая при движении тела площадь всегда лежит в одной плоскости, то есть траектория движения есть плоская кривая.

Введем в плоскости движения полярную систему координат (r, φ). Скорость и ускорение точки в проекциях на оси полярной системы координат равны $v_r = \dot{r}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, $w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$. Уравнения движения в полярной системе координат примут вид:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F, \qquad m\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) = 0$$

Считая заданной постоянную интеграла площадей ($r^2\dot{\varphi} = c$ - полярная форма интеграла площадей) и траекторию движения $r = r(\varphi)$, имеем:

$$F = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = m\left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r\right)\dot{\varphi}^2 = m\frac{c^2}{r^4}\left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r\right)$$

Преобразуем полученное выражение, сделав замену $u = \frac{1}{r}$:

$$F = -mc^2u^2\left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u\right)$$

или

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F}{mc^2u^2}$$

- **уравнение Бине**.

5.3 Поле всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения: *если размерами материальных тел можно пренебречь по сравнению с расстояниями между ними, то любые два таких тела притягиваются друг к другу с силой, по модулю равной*

$$F = \gamma\frac{mM}{r^2},$$

где γ - гравитационная постоянная, m, M - массы тел, r - расстояние между ними. Сила притяжения направлена вдоль прямой, соединяющей эти тела.

По определению потенциальной энергии

$$\Pi = -\int\limits_{S} U dm$$

Подставляя в эту формулу полученное ранее уравнение для потенциала центрального поля, получим **потенциальную энергию центрального поля**:

$$\Pi = -\int F(r) dr$$

Подставляя сюда значение силы всемирного тяготения и считая, что $\Pi = 0$ при $r = \infty$, получим выражение для **потенциальной энергии поля всемирного тяготения**:

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{r}$$

5.4 Уравнение конических сечений.

Обозначим в формуле силы всемирного тяготения

$$\mu = \gamma M,$$

где μ - *гравитационный параметр*, и воспользуемся уравнением Бине:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}$$

Решение этого дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$u = A \cos\left(\varphi + \varphi_0\right)) + \frac{\mu}{c^2},$$

где A и φ_0 - константы интегрирования, определяемы из начальных условий. Произведя обратную замену $u = \frac{1}{r}$, получим:

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + A\frac{c^2}{\mu}\cos(\varphi + \varphi_0)}$$

Обозначив $c^2/\mu = p$, $A\frac{c^2}{\mu} = e$, приходим к **уравнению конических сечений** (уравнению орбиты точки относительно Солнца):

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \varphi_0)},$$

где p - параметр, а e - эксцентриситет орбиты. Орбита точки относительно Солнца будет либо эллипсом ($e < 1$), либо параболой ($e = 1$), либо гиперболой ($e > 1$).

5.5 Задача двух тел.

Задача двух тел состоит в следующем. В пустом пространстве движутся две материальные точки, притягивающиеся одна к другой по закону всемирного тяготения Ньютона. Заданы начальные положения точек и их скорости. Требуется найти положения точек для любого последующего момента времени.

Введем инерциальную систему координат $O_\alpha XYZ$; ее начало совпадает, например, с центром масс Солнечной системы, а оси направлены на неподвижные звезды. Положения материальных точек P и O задаются их радиус-векторами $\overrightarrow{\rho}$ и $\overrightarrow{R}$ соответственно. С точкой O свяжем поступательно движущуюся систему координат $Oxyz$, оси которой параллельны соответствующим осям системы $O_\alpha XYZ$. Положение точки P относительно точки O задается радиус-вектором $\overrightarrow{r}$.

Пусть M и m - массы точек O и P соответственно. Со стороны точки O на точку P действует сила $\overrightarrow{F}$, определяемая законом всемирного тяготения:

$$\overrightarrow{F} = -\gamma\frac{mM}{r^3}\overrightarrow{r}$$

Со стороны же точки P на точку O действует сила $-\overrightarrow{F}$. Радиус-векторы $\overrightarrow{\rho}$ и $\overrightarrow{R}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2\overrightarrow{\rho}}{dt^2} = -\gamma\frac{M}{r^3}\overrightarrow{r}, \qquad \frac{d^2\overrightarrow{R}}{dt^2} = \gamma\frac{M}{r^3}\overrightarrow{r}$$

Так как $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\rho} - \overrightarrow{R}$, то отсюда следует, что

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\gamma\frac{M}{r^3}\overrightarrow{r} - \gamma\frac{m}{r^3}\overrightarrow{r} = -\gamma(m+M)\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

Если ввести обозначение $k = \gamma(m+M)$, то получим

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -k\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

Это уравнение определяет движение точки P относительно точки O. Если вектор-функция $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ найдена, то можно определить движение точек относительно системы координат $O_\alpha XYZ$. Действительно, точки P и O образуют замкнутую систему, значит их центр масс движется равномерно и прямолинейно; его скорость полностью определяется начальными скоростями точек P и O. Если $\overrightarrow{R_C}$ - радиус-вектор центра масс C системы, то

$$\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{R_C} + \frac{M}{m+M}\overrightarrow{r}, \qquad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_C} - \frac{M}{m+M}\overrightarrow{r}$$

5.6 Законы Кеплера.

Первый закон Кеплера: *планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

Доказательство по существу повторяет вывод уравнения конических сечений.

Второй закон Кеплера: *площади, заметенные радиус-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были заметены.*

Доказательство.

Площадь, заметаемая радиус-вектором частицы $\overrightarrow{r}$ массы m за время dt из геометрических соображений равна

$$dS = \frac{1}{2} r \sin\varphi v dt = \frac{\left|\overrightarrow{K_O}\right|}{2m} dt,$$

где φ представляет собой угол между векторами $\overrightarrow{r}$ и $\overrightarrow{v}$.

Из определения момента импульса следует:

$$\frac{d\overrightarrow{K_O}}{dt} = \frac{\overrightarrow{r} \times m\frac{\overrightarrow{r}}{dt}}{dt} = \left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}\right) + \left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \times m\frac{\overrightarrow{r}}{dt}\right) = \left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}\right) + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{p}) = 0,$$

так как $\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{p}$ по определению и момент центральной силы относительно Солнца равен нулю. Тогда $\left|\overrightarrow{K_O}\right| = const$, а значит

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\left|\overrightarrow{K_O}\right|}{2m} = \frac{c}{2} = const$$

Теорема доказана.

Третий закон Кеплера: *квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей.*

Доказательство.

Пусть орбита точки P представляет собой эллипс с полуосями a и b. Из аналитической геометрии известно, что величины a и b выражаются через параметр эллипса и его эксцентриситет посредством формул

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$$

Ближайшая к фокусу точка эллиптической орбиты называется *перицентром*, а наиболее удаленная от фокуса - *апоцентром*.

За время, равное периоду T обращения точки P по орбите, радиус-вектор $\overrightarrow{FP}$, где F - один из фокусов эллипса, заметет всю площадь эллипса. Учитывая, что площадь эллипса равна πab и по второму закону Кеплера секторная скорость точки Р постоянна и равна $\frac{c}{2}$, получаем равенство

$$\pi ab = \frac{1}{2} cT$$

Но $c = \sqrt{p\mu}$ и $p = b^2/a$, откуда

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$$

Рассмотрим две точки P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2. Если пренебречь взаимным притяжением этих точек, то каждая из них будет двигаться вокруг точки O по коническому сечению. Пусть орбиты этих точек будут эллиптическими. Тогда

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Теорема доказана.

Глава 6

Динамика твердого тела.

6.1 Геометрия масс. Тензор инерции и эллипсоид инерции твердого тела. Главные оси инерции. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела.

В основе геометрии масс твердого тела лежит понятие **момента инерции** тела J_e вокруг некоторой оси $\overrightarrow{e}$:

$$J_e = \int \rho^2 dm,$$

где ρ - расстояние от оси $\overrightarrow{e}$ до элемента массы dm.

Рассмотрим движение тела с неподвижной точкой и выразим его кинетическую энергию из определения, используя формулу Эйлера:

$$T = \frac{1}{2} \int (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})^2 dm$$

Векторное произведение $\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$ можно представить как линейное преобразование вектора $\overrightarrow{\omega}$ с матрицей преобразования $\hat{r}$:

$$\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} = \hat{r}\overrightarrow{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\eta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Здесь ξ, η, ζ - компоненты вектора $\overrightarrow{r}$ в осях, связанных с телом; p, q, r - компоненты вектора $\overrightarrow{\omega}$ в тех же осях.

Поскольку скалярное произведение под знаком интеграла можно представить соответствующим произведением матриц

$$(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\omega}^T \hat{r}^T \hat{r} \overrightarrow{\omega},$$

то выражение для **кинетической энергии** приобретает вид

$$T = \frac{1}{2} \int \overrightarrow{\omega}^T \hat{r}^T \hat{r} \overrightarrow{\omega} dm = \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega}^T J \overrightarrow{\omega} \equiv \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} J \overrightarrow{\omega},$$

где буквой J обозначен **тензор инерции** :

$$J = \int \hat{r}^T \hat{r} dm$$

Произведение стоящих под интегралом матриц имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\eta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \eta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^2 + \eta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \zeta^2 + \xi^2 & -\zeta\eta \\ -\xi\zeta & -\zeta\eta & \eta^2 + \xi^2 \end{pmatrix}$$

Видно, что по диагонали тензора инерции получилсь моменты инерции вокруг осей ζ, η, ξ. Элементы вне главной диагонали называются *центробежными* моментами инерции:

$$J = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}$$

Для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, с учетом определения момента инерции относительно оси $\overrightarrow{e}$, получим выражение:

$$T = \frac{1}{2} \int \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} dm = \frac{\omega^2}{2} J_e$$

Сравнивая его с полученным ранее выражением для кинетической энергии и учитывая, что при вращении вокруг оси $\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{e}$, имеем

$$J_e = \overrightarrow{e} \cdot J \overrightarrow{e}$$

Преобразуем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \int \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) dm \equiv \frac{1}{2} \int \overrightarrow{\omega} \cdot (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}) dm = \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \overrightarrow{K},$$

откуда с учетом ранее полученного выражения для кинетической энергии, получим выражение для **момента импульса** твердого тела с неподвижной точкой:

$$\overrightarrow{K} = J \overrightarrow{\omega}$$

Из алгебры известно, что любая симметрическая положительно определенная матрица преобразованием поворота может быть приведена к диагональному виду:

$$J' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Оси, в которых тензор инерции тела имеет диагональный вид, называются **главными осями инерции** тела. Если эти оси дополнительно проходят через центр масс, то они называются *главными центральными осями инерции.*

Каждой точке O твердого тела соответствует **эллипсоид инерции**, который строится так. В произвольном направлении, задаваемом вектором $\overrightarrow{e}$, отложим отрезок длиной $1/\sqrt{J_e}$. Геометрическое место таких точек и есть эллипсоид инерции. Действительно, подставляя в выражение $J_e = \overrightarrow{e} \cdot J \overrightarrow{e}$ вектор $\overrightarrow{e}$ в виде $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{e} \sqrt{J_e}$, получаем

$$\overrightarrow{r} \cdot J \overrightarrow{r} = 1$$

В главных осях это уравнение имеет простейший вид

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

6.2 Преобразование тензора инерции при повороте и параллельном переносе осей. Теорема Гюйгенса-Штейнера для тензора инерции.

Установим некоторые свойства моментов инеции твердого тела.

Параллельный перенос осей. Пусть осуществлен параллельный перенос осей: $\xi = \xi' + a$, $\eta = \eta' + b$, $\zeta = \zeta' + c$. Изменение осевых моментов инерции проследим на примере момента инерции вокруг оси ξ:

$$J_\xi = \int (\zeta^2 + \eta^2) dm = \int (\zeta'^2 + \eta'^2) dm + 2c \int \zeta' dm + 2b \int \eta' dm + (b^2 + c^2)M,$$

где M - масса тела. Отсюда следует

Теорема Гюйгенса-Штейнера: *момент инерции твердого тела относительно некоторой оси $\overrightarrow{e}$ равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через его центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Доказательство.

Пусть ось $\overrightarrow{e}$ совпадает с осью ξ базиса $\overrightarrow{\xi}\overrightarrow{\eta}\overrightarrow{\zeta}$ и свяжем с центром масс тела базис $\overrightarrow{\xi'}\overrightarrow{\eta'}\overrightarrow{\zeta'}$ так, что $\overrightarrow{\xi} \parallel \overrightarrow{\xi'}$. Используя полученную выше формулу для осевых моментов инерции при параллельном переносе осей и учитывая, что в системе центра масс выражения $\int \zeta' dm$ и $\int \eta' dm$ обращаются в ноль по определению радиус-вектора центра масс, получим

$$J_\xi = \int (\zeta^2 + \eta^2) dm \int (\zeta'^2 + \eta'^2) dm + (b^2 + c^2)M,$$

где $b^2 + c^2$ - квадрат расстояния между осями $\overrightarrow{\xi}$ и $\overrightarrow{\xi'}$.

Теорема доказана.

Изменение центробежных моментов рассмотрим на примере момента относительно осей ξ и η:

$$J_{\xi\eta} = \int \xi\eta dm = \int \xi'\eta' dm + a \int \eta' dm + b \int \xi' dm + abM$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера допускает обобщение на тензор инерции.

Теорема Гюйгенса-Штейнера для тензора инерции: *тензор инерции относительно точки A связан с тензором инерции относительно центра масс C при параллельном переносе осей из точки C в точку A формулой:*

$$J_A = J_C + \hat{j}m,$$

где m - масса тела, а

$$\hat{j} = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & b^2 + a^2 \end{pmatrix},$$

где $\overrightarrow{CA} = (a, b, c)$ - координаты начала нового базиса в старых координатах.

Доказательство проводится сравнением этой формулы с прямой подстановкой новых моментов инерции в тензор инерции по приведенным выше формулам для осевых и центробежных моментов инерции.

Поворот осей. Пусть от осей $\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\eta}\,\overrightarrow{\zeta}$ перешли к осям $\overrightarrow{\xi'}\,\overrightarrow{\eta'}\,\overrightarrow{\zeta'}$ при помощи матрицы поворота S, так что векторы $\overrightarrow{\omega}$ и $\overrightarrow{K}$ в новых осях приобрели вид

$$\overrightarrow{\omega'} = S\overrightarrow{\omega}, \qquad \overrightarrow{K'} = S\overrightarrow{K}$$

Связь между $\overrightarrow{K'}$ и $\overrightarrow{\omega'}$ принимает вид

$$\overrightarrow{K'} = SJS^T\overrightarrow{\omega'}$$

Но $\overrightarrow{K'} = J'\overrightarrow{\omega'}$, откуда

$$J' = SJS^T$$

6.3 Динамические уравнения Эйлера.

Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой O относительно инерциальной системы отсчета. Если в качестве полюса выбрать неподвижную точку O, то теорема об изменении кинетической энергии запишется в виде

$$\dot{\overrightarrow{K_O}} = \overrightarrow{M_O^e},$$

Выберем связанный с телом базис $O\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\eta}\,\overrightarrow{\zeta}$. В нем $\overrightarrow{K_O} = J_O\overrightarrow{\omega}$. Раскладывая вектор угловой скорости в этом базисе $\overrightarrow{\omega} = p\overrightarrow{\xi} + q\overrightarrow{\eta} + r\overrightarrow{\zeta}$ и учитывая, что тензор инерции не меняется в связанном с телом базисе, получим:

$$\dot{\overrightarrow{K_O}} = J_O\dot{\overrightarrow{\omega}} + \overrightarrow{\omega} \times J_O\overrightarrow{\omega}, \text{ где } \dot{\overrightarrow{\omega}} = \dot{p}\overrightarrow{\xi} + \dot{q}\overrightarrow{\eta} + \dot{r}\overrightarrow{\zeta}$$

Второе слагаемое есть переносная скорость вектора $\overrightarrow{K_O}$, обусловленная вращением связанного с телом базиса. Подставляя полученное выражение в теорему об изменении кинетической энергии, получим **динамические уравнения Эйлера**:

$$J_O\dot{\overrightarrow{\omega}} + \overrightarrow{\omega} \times J_O\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{M_O^e}$$

Если в качестве базиса $O\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\eta}\,\overrightarrow{\zeta}$ выбран базис главных осей инерции, то в покоординатной форме полученное уравнение имеет вид:

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta,$$

где A, B, C - главные моменты инерции тела для неподвижной точки O.

6.4 Случай Эйлера; первые интегралы движения; геометрические интерпретации Пуансо.

Для движения твердого тела с неподвижной точкой O **случай Эйлера** определяется условием $\overrightarrow{M_O} = 0$ и называется движением тела по инерции. В этом случае в силу теоремы об изменении моменти импульса сохраняется вектор кинетического момента $\overrightarrow{K_O}$ тела в инерциальном базисе, а в силу теоремы об изменении кинетической энергии сохраняется кинетическая энергия тела, так как момент внутренних сил твердого тела равен нулю.

В случае Эйлера правые части динамических уравнений равны нулю и имеют место два **интеграла движения**. Один из них является следствием сохранения момента импульса и имеет вид

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_O^2 = const$$

Второй описывает сохранение кинетической энергии

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T = const$$

Для описания движения твердого тела в случае Эйлера достаточно решить систему уравнений, в которую входят полученные интегралы движения, а также динамические уравнения и кинематические уравнения Эйлера. Однако получаемое при этом аналитическое решение является достаточно сложным для понимания закономерностей движения твердого тела. В связи с этим анализ движения тела в случае Эйлера дополняется геомтрическими интерпретациями, одной из которых является **интерпретация Пуансо**.

В интерпретации Пуансо используется эллипсоид инерции:

$$f = \xi^2 A + \eta^2 B + \zeta^2 C - 1 \equiv \overrightarrow{r} \cdot J\overrightarrow{r} - 1 = 0$$

Покажем, что при движении тела в случае Эйлера, жестко связанный с телом его эллипсоид инерции катится без проскальзывания по неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору кинетического момента.

Действительно, рассмотрим точку на поверхности эллипсоида инерции, через которую проходит вектор угловой скорости $\overrightarrow{\omega}$:

$$\overrightarrow{r} = \frac{r}{\omega}\overrightarrow{\omega}$$

Подставляя этот вектор в уравнение эллипсоида, получим

$$\frac{r^2}{\omega^2}\overrightarrow{\omega} \cdot J\overrightarrow{\omega} - 1 = 0,$$

откуда

$$\frac{r}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2T}} = const$$

Вычислим нормаль к эллипсоиду в этой точке:

$$\overrightarrow{n} = \frac{df}{d\overrightarrow{r}} = 2J\overrightarrow{r} = 2\frac{r}{\omega}J\overrightarrow{\omega} = \frac{2}{\sqrt{2T}}\overrightarrow{K_O}$$

Мы получили, что эта нормаль в процессе движения неизменна. Для того чтобы касательная плоскость к эллипсоиду в рассматриваемой точке была неизменной, осталось, таким образом, показать, что расстояние от нее до неподвижной точки постоянно. Это расстояние равно

$$\frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{K_O}}{K_O} = \frac{r}{K_O\omega}\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{K_O} = \frac{1}{K_O\sqrt{2T}}2T = const$$

Поскольку через рассматриваемую точку проходит вектор угловой скорости, то это значит, что скорость этой точки тела равна нулю, т.е. тело, представляемое своим эллипсоидом инерции, касается неподвижной плоскости не проскальзывая. Такое качение называется *движением Пуансо*.

6.5 Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера; параметры свободной регулярной прецессии.

Анализ движения твердого тела существенно упрощается, если имеет место **динамическая симметрия** твердого тела, под которой понимается равенство двух главных моментов инерции твердого тела: $A = B \neq C$. В этом случае вектор угловой скорости раскладывается на направление кинетического момента $\overrightarrow{K_O}$ и направление оси динамической симметрии $\overrightarrow{\zeta}$ следующим образом:

$$\overrightarrow{\Omega} = \frac{A(p\overrightarrow{\xi} + q\overrightarrow{\eta}) + Cr\overrightarrow{\zeta} + (A - C)r\overrightarrow{\zeta}}{A} = \frac{\overrightarrow{K_O}}{A} + \frac{A - C}{A}r\overrightarrow{\zeta},$$

а скорость оси симметрии подчиняется уравнению

$$\dot{\overrightarrow{\zeta}} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{\zeta} = \frac{\overrightarrow{K_O}}{A} \times \overrightarrow{\zeta}$$

В случае Эйлера сохраняется вектор кинетического момента, а из динамических уравнений Эйлера при подстановке $A = B$ получаем $C\dot{r} = 0$, то есть проекция r угловой скорости тела на ось динамической симметрии не меняется. Также сохраняется угол θ между осью динамической симметрии и вектором кинетического момента, так как

$$\overrightarrow{K_O} \cdot \overrightarrow{\zeta} = Cr = \left|\overrightarrow{K_O}\right| \cos\theta = const,$$

где $Cr = H$ - так называемый *собственный кинетический момент* тела.

Из установленных фактов заключаем, что исследуемое движение представляет собой **регулярную прецессию** вокруг направления кинетического момента, параметры которой определяются соотношениями:

$$\overrightarrow{\omega_1} = \frac{\overrightarrow{K_O}}{A}, \qquad \overrightarrow{\omega_2} = \frac{A - C}{A}r\overrightarrow{\zeta}, \qquad \cos\theta = \frac{Cr}{|\overrightarrow{K_O}|}$$

Это движение представляется в виде кобинации двух вращений. Первым является вращение вокруг неподвижного направления кинетического момента с угловой скоростью прецессии ω_1, а вторым - вращение вокруг оси динамической симметрии тела с постоянной по величине угловой скоростью собственного вращения ω_2.

В случае Эйлера отсутствует момент внешних сил, поэтому такая прецессия динамически симметричного тела называется *свободной*. Из полученных соотношений можно найти связь между параметрами регулярной прецессии в случае Эйлера: $C\omega_2 + (C - A)\omega_1 \cos\theta = 0$, т.е. подбором начальных условий нельзя реализовать свободную регулярную прецессию с произвольными параметрами.

6.6 Случай Лагранжа; первые интегралы движения.

В случае Лагранжа изучается движение динамически симметричного тела (волчка) с неподвижной точкой в однородном поле тяжести. При этом предпполагается, что центр тяжести волчка лежит на оси симметрии на расстоянии L от неподвижной точки O.

Используя обозначения предыдущего пункта, преобразуем вектор угловой скорости:

$$\overrightarrow{\Omega} = (p\overrightarrow{\xi} + q\overrightarrow{\eta}) + r\overrightarrow{\zeta} = r\overrightarrow{\zeta} + \overrightarrow{\omega}, \qquad \overrightarrow{\omega} \perp \overrightarrow{\zeta}$$

Момент внешних сил

$$\overrightarrow{M_O} = M_\zeta\overrightarrow{\zeta} + \overrightarrow{m}, \qquad \overrightarrow{m} \perp \overrightarrow{\zeta}$$

Момент импульса

$$\overrightarrow{K_O} = J\overrightarrow{\Omega} = J(r\overrightarrow{\zeta} + \overrightarrow{\omega}) = Cr\overrightarrow{\zeta} + A\overrightarrow{\omega} = H\overrightarrow{\zeta} + A\overrightarrow{\omega}$$

Теорема об изменении момента количества движения, с учетом того, что момент силы тяжести относительно оси динамической симметрии равен нулю, дает

$$\dot{\overrightarrow{K_O}} = \dot{H}\overrightarrow{\zeta} + H\dot{\overrightarrow{\zeta}} + A\dot{\overrightarrow{\omega}} = H\dot{\overrightarrow{\zeta}} + A\dot{\overrightarrow{\omega}} = \overrightarrow{M_O}, \qquad H = const$$

Из формулы Эйлера

$$\dot{\vec{\zeta}} = \vec{\omega} \times \vec{\zeta} = (r\vec{\zeta} + \vec{\omega}) \times \vec{\zeta} = \vec{\omega} \times \vec{\zeta},$$

откуда

$$\vec{\zeta} \times \dot{\vec{\zeta}} = \vec{\zeta} \times [\vec{\omega} \times \vec{\zeta}] = \vec{\omega}$$

Теперь теорема об изменении момента импульса имеет вид

$$H\dot{\vec{\zeta}} + A\vec{\zeta} \times \ddot{\vec{\zeta}} = \overrightarrow{M_O}$$

Вводя обозначения M - масса тела, g - ускорение свободного падения, $\vec{\varepsilon}$ - единичный вектор направления силы тяжести, получим

$$H\dot{\vec{\zeta}} + A\vec{\zeta} \times \ddot{\vec{\zeta}} = MgL\vec{\zeta} \times \vec{\varepsilon} = d\vec{\zeta} \times \vec{\varepsilon},$$

где величина $d = MgL$ называется *неуравновешенностью*.

Умножим полученное уравнение скалярно на $\dot{\vec{\zeta}}$. С учетом того, что вектора $\vec{\zeta}$ и $\dot{\vec{\zeta}}$ взаимно ортогональны (так как $\dot{\vec{\zeta}} = \vec{\Omega} \times \vec{\zeta} = \vec{\omega} \times \vec{\zeta}$), получим

$$H\dot{\vec{\zeta}}^2 + A\vec{\zeta} \cdot (\dot{\vec{\zeta}} \cdot \ddot{\vec{\zeta}}) - A\ddot{\vec{\zeta}} \cdot (\vec{\zeta} \cdot \dot{\vec{\zeta}}) = d\vec{\zeta} \cdot (\dot{\vec{\zeta}} \cdot \vec{\varepsilon}) - d\vec{\varepsilon} \cdot (\vec{\zeta} \cdot \dot{\vec{\zeta}})$$

$$H\dot{\vec{\zeta}} + A\vec{\zeta} \cdot (\dot{\vec{\zeta}} \cdot \ddot{\vec{\zeta}}) = d\vec{\zeta} \cdot (\dot{\vec{\zeta}} \cdot \vec{\varepsilon})$$

Умножая полученное равенство скалярно на $\vec{\zeta}$ получим

$$A\dot{\vec{\zeta}} \cdot \ddot{\vec{\zeta}} - d\dot{\vec{\zeta}} \cdot \vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A\dot{\vec{\zeta}}^2 - d\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\zeta}\right) = 0$$

Отсюда следует, что уравнения имеют первый интеграл:

$$\frac{1}{2}A\dot{\vec{\zeta}}^2 - d\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\zeta} = E = const,$$

описывающий закон сохранения полной механической энергии волчка.

Так как в рассматриваемой задаче момент внешних сил ортогонален вектору $\overrightarrow{\varepsilon}$, то сохраняется проекция момента импульса волчка на вертикаль:

$$\overrightarrow{K_O} \cdot \overrightarrow{\varepsilon} = (H\overrightarrow{\zeta} + A\overrightarrow{\omega}) \cdot \overrightarrow{\varepsilon} = K = const$$

Итого имеем три первых интеграла: H, E, K.

6.7 Формула для момента, поддерживающего вынужденную регулярную прецессию динамически симметричного твердого тела.

Теорема об изменении момента импульса в случае произвольной силы (из предыдущего пункта):

$$\dot{\overrightarrow{K_O}} = \dot{H}\overrightarrow{\zeta} + H\dot{\overrightarrow{\zeta}} + A\dot{\overrightarrow{\omega}} = \dot{H}\overrightarrow{\zeta} + H\dot{\overrightarrow{\zeta}} + A\overrightarrow{\zeta} \times \ddot{\overrightarrow{\zeta}} = \overrightarrow{M_O}$$

В проекции на оси $\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\eta}$ уравнение имеет вид

$$H\dot{\overrightarrow{\zeta}} + A\overrightarrow{\zeta} \times \ddot{\overrightarrow{\zeta}} = \overrightarrow{m}$$

Выясним теперь, может ли тело совершать регулярную прецессию под действием внешнего момента $\overrightarrow{m}$.

Подставим в последнее уравнение условие регулярной прецессии $\dot{\overrightarrow{\zeta}} = \overrightarrow{\nu} \times \overrightarrow{\zeta}$, где $\overrightarrow{\nu}$ - угловая скорость прецессии, предварительно вычислив

$$\ddot{\overrightarrow{\zeta}} = \overrightarrow{\nu} \times \dot{\overrightarrow{\zeta}} = \overrightarrow{\nu} \times [\overrightarrow{\nu} \times \overrightarrow{\zeta}] = \overrightarrow{\nu}\nu\cos\theta - \overrightarrow{\zeta}\nu^2$$

После подстановки в уравнение, находим

$$\overrightarrow{m} = A\overrightarrow{\zeta} \times \overrightarrow{\nu}\nu\cos\theta + H\overrightarrow{\nu} \times \overrightarrow{\zeta}$$

6.8 Эквивалентные преобразования системы сил, действующих на твердое тело. Алгоритм сведения к винту.

Определим несколько понятий:

приложенным вектором называется вектор с фиксированной начальной точкой;

скользящим вектором называется вектор, который можно перемещать вдоль линии действия;

парой называется два скользящих вектора $\overrightarrow{a}$ и $-\overrightarrow{a}$, линии действия которых параллельны (расстояние между ними называется плечом пары);

свободным вектором называется вектор с произвольной точкой приложения.

Множество векторов $\{\overrightarrow{a_i}\}$, $i = 1, \ldots, N$ называется **множеством скользящих векторов**, если множество разрешено подвергать двум эквивалентным преобразованиям: добавлять (изымать) пару и заменять два вектора с общей начальной точкой на их векторную сумму (аналогично любой вектор $\overrightarrow{c}$ можно заменить на результат разложения по двум прямым, проходящим через начало вектора $\overrightarrow{c}$).

Два множества скользящих векторов называются **эквивалентными**, если от одного множества к другому возможен переход при помощи указанных выше преобразований.

Главным вектором множества скользящих векторов $\{\overrightarrow{a_i}\}$, $i = 1, \ldots, N$ называется свободный вектор:

$$\overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{a_i}$$

Моментом вектора $\overrightarrow{a_i}$ относительно точки O называется приложенный (к точке O) вектор:

$$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{a_i}) = \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{a_i},$$

где вектор $\overrightarrow{r_i}$ проведен из точки O к прямой, на которой расположен вектор $\overrightarrow{a_i}$.

Главным моментом множества скользящих векторов $\{\overrightarrow{a_i}\}$, $i = 1, \ldots, N$ относительно точки O называется приложенный (к точке O) вектор:

$$\overrightarrow{M_O} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{a_i})$$

Теорема о переносе полюса: *главные моменты относительно точек O и A связаны формулой*

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_O} - \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{R}$$

Доказательство проводится вычислением главного момента относительно точки A с учетом очевидного соотношения для векторов $\overrightarrow{\rho_i}$ и $\overrightarrow{r_i}$, проведенных соответственно из точек A и O к прямой, на которой лежит вектор $\overrightarrow{a_i}$: $\overrightarrow{\rho_i} = \overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{OA}$.

Винтом называется такая система скользящих векторов, для которой главный вектор и главный момент коллинеарны. Прямая, для точек B которой выполняется $\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{M_B} = 0$ называется **осью минимальных главных моментов** или **осью винта**. Величина минимального главного момента равна

$$\min_B M_B = \frac{1}{R} \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M_O}$$

Найдем уравнение оси винта. Для этого достаточно найти хотя бы одну точку B, ему принадлежащую, так как ось винта параллельна главному вектору. Удобно выбрать точку B такую, что $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{R}$, причем главный момент относительно точки O известен. По теореме о переносе полюса $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_O} - \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{R}$. Умножим это уравнение векторно слева на $\overrightarrow{R}$:

$$0 = \overrightarrow{R} \times \overrightarrow{M_O} - \overrightarrow{R} \times (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{R}) = \overrightarrow{R} \times \overrightarrow{M_O} - \overrightarrow{OB} R^2,$$

откуда

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{M_O}}{R^2},$$

и уравнение для оси винта

$$\vec{r} = \frac{1}{R^2}\vec{R} \times \overrightarrow{M_O} + \lambda\vec{R},$$

где λ - произвольный вещественный параметр.

Любое множество скользящих векторов $\{\vec{a_i}\}$, $i = 1, \ldots, N$ можно **свести к винту** по следующему алгоритму:

1. Вычислить главный вектор и главный момент относительно некоторой точки O (винт не определен, если главный вектор равен нулевому вектору).

2. Задать ось винта, выражение для которой получено выше.

3. К произвольной точке B винта приложить вектор, равный главному вектору и момент, равный вектору

$$\overrightarrow{M_B} = \frac{\vec{R} \cdot \overrightarrow{M_O}}{R^2}\vec{R},$$

величина которого равна величине минимального главного момента.

Множество векторов угловой скорости и множество векторов силы являются простейшими примерами скользящих векторов, поэтому все сказанное в этом пункте справедливо и для них. При сведении к винту векторов угловой скорости винт называют **кинематическим**, а при сведении к винту векторов силы - **динамическим**.

Глава 7

Лагранжева механика.

7.1 Понятие механической связи. Классификация связей.

Любые ограничения, накладываемые на движение исследуемой системы тем фактом, что материя занимает место в пространстве и поэтому в той или иной мере препятствует движению исследуемых материальных точек, называются **механическими связями**.

Механические связи подразделяются на два основных класса:

1. связь называется **удерживающей**, если накладываемые ею ограничения выражаются в форме равенства;

2. связь называется **неудерживающей**, если накладываемые ею на координаты точек ограничения выражаются неравенствами.

Удерживающие механические связи подразделяются на **конечные** и **дифференциальные** в зависимости от того, является ли равенство, выражающее их, конечным соотношением или дифференциальным уравнением.

Дифференцируемые связи делятся на **интегрируемые** и **неинтегрируемые** в зависимости от того, могут ли соответствующие уравнения связи быть проинтегрированы, или нет.

Конечные связи и дифференциальные интегрируемые связи составляют класс **голономных** механических связей, а дифференциальные неинтегрируемые связи - класс **неголономных** связей. Системы, содержащие только голномные или только неголономные связи, называются соответственно **голономными** и **неголономными** системами.

Если равенства голономных связей не содержат явно время, то такая связь называется **стационарной** или **склерономной**. В тех случаях, когда время явно входит в эти равенства, связь называется **нестационарной** или **реономной**.

7.2 Виртуальные перемещения.

Рассмотрим голономную систему из N точек. Для содержащихся в них связей могут быть выписаны уравнения вида

$$F_s(x, y, z, t) = 0, \qquad s = 1, \dots, r$$

Во время движения системы все координаты являются функциями времени и уравнения голономных связей определяют r тождеств:

$$F_s(x(t), y(t), z(t), t) \equiv 0, \qquad s = 1, \dots, r$$

Дифференцируя полученные тождества по времени, получим:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F_s}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial F_s}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) = 0$$

Этим соотношениям должны удовлетворять скорости точек $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$.

Любые скорости, удовлетворяющие полученному уравнению, называются **возможными скоростями**, а любые бесконечно малые перемещения в направлении возможных скоростей, удовлетворяющие, следовательно, исходным уравнениям связей - **возможными перемещениями**.

Реономная связь называется **замороженной**, если в какой-то момент времени считается, что она перестает зависеть явно от времени. Скорости, удовлетворяющие уравнениям замороженных связей (то есть полученным дифференциальным уравнениям без первого слагаемого) называются **виртуальными скоростями**, а любые бесконечно малые перемещения в направлении виртуальных скоростей - **виртуальными перемещениями**.

7.3 Общее уравнение динамики для системы материальных точек с идеальными связями.

Если на тело действуют связи, то это тело можно рассматривать как **свободное** (на которое не действуют связи), если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей.

Механические связи называются **идеальными**, если сумма элементарных работ реакций $\overrightarrow{R_i}$ этих связей на любом виртуальном перемещении $\delta\overrightarrow{r_i}$ системы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{R_i}\cdot\delta\overrightarrow{r_i}=0$$

Второй закон Ньютона для материальной точки в системе с идеальными связями можно записать, если прибавить к действующим на точку силам реакции связи:

$$m_i\overrightarrow{w_i}=\overrightarrow{F_i}+\overrightarrow{R_i},\qquad i=1,\ldots,N,$$

где m_i - масса точки, а $\overrightarrow{w_i}$ - ее ускорение в инерциальной системе отсчета.

Перепишем второй закон Ньютона в виде

$$\overrightarrow{F_i}-m_i\overrightarrow{w_i}=-\overrightarrow{R_i},\qquad i=1,\ldots,N,$$

умножим его скалярно на $\delta\overrightarrow{r_i}$ и произведем суммирование по i:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\overrightarrow{F_i}-m_i\overrightarrow{w_i}\right)\cdot\delta\overrightarrow{r_i}=0$$

- общее уравнение динамики.

7.4 Конфигурационное многообразие голономной системы с конечным числом степеней свободы. Обобщенные координаты.

В общем случае системы, содержащей N точек и стесненной r механическими связями, из уравнений связи можно выразить r декартовых координат точек через остальные. Поэтому для задания положения N точек нужно знать $3N - r$ координат, причем не обязательно использовать $3N - r$ декартовых координат. Можно подобрать иные независимые величины, определяющие положение всех точек системы.

Наименьшее число независимых величин, которое надо знать для того, чтобы определить положение всех точек голономной системы, называется **числом степеней свободы системы**.

Любой набор из m величин, независимых одна от другой и полностью определяющих положение системы, называются **системой обобщенных координат**, сами эти величины - **обобщенными координатами**, а их производные по времени - **обобщенными скоростями**.

Разрешенные механическими связями положения механической системы, заданные в некотором пространстве, в каждый момент времени образуют поверхность, называемую **конфигурационным многообразием**. Исходя из этого определения, обобщенные координаты есть параметризация конфигурационного многообразия.

7.5 Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы.

Пусть на систему наложено r механических связей. Пусть $q_1, \ldots, q_m$ - обобщенные координаты системы (m=3N-r). Радиус векторы точек системы в инерциальной системе отсчета выражаются через обобщенные координаты и время:

$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_i}(q_1, \ldots, q_m, t),$$

причем полученные функции предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Для склерономной системы обобщенные координаты можно выбрать так, чтобы функции $\overrightarrow{r_i}$ не зависели явно от времени. Из полученных функций следует:

$$\overrightarrow{v_i} = \dot{\overrightarrow{r_i}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial t}$$

$$\delta \overrightarrow{r_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j} \delta q_j$$

Запишем общее уравнение динамики в обобщенных координатах. Для элементарной работы активных сил имеем выражение

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} \cdot \delta \overrightarrow{r_i} = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j,$$

где Q_j - **обобщенная сила**, соответствующая обобщенной координате q_j:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j}$$

Используя формулу для $\delta \overrightarrow{r_i}$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{w_i} \cdot \delta \overrightarrow{r_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d \dot{\overrightarrow{r_i}}}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d \dot{\overrightarrow{r_i}}}{dt} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Но

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d \dot{\overrightarrow{r_i}}}{dt} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\overrightarrow{r_i}} \cdot \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_i}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\overrightarrow{r_i}} \cdot \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_i}}}{\partial q_j}$$

Если использовать уравнение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\overrightarrow{r_i}}^2,$$

то последнее равенство примет вид

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\dot{\overrightarrow{r_i}}}{dt} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{w_i} \cdot \delta \overrightarrow{r_i} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Подставив полученные соотношения в общее уравнение динамики, получим общее уравнение динамики в обобщенных координатах:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0$$

Если система голономна, то величины δq_j независимы и число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы (m=n). Тогда общее уравнение динамики в обобщенных координатах удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

- уравнения Лагранжа второго рода.

7.6 Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа (лагранжиан системы).

Пусть обобщенные силы Q_j вычисляются по формулам

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

где потециальная энергия Π есть функция обобщенных координат и времени.

Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

Положим $L = T - \Pi$, тогда эти уравнения примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Функция L называется **функцией Лагранжа** или **лагранжианом** системы.

7.7 Уравнения Лагранжа в неинерциальных системах отсчета.

При получении уравнений движения системы относительно неинерциальной системы координат можно применять различные способы. Укажем два из них.

Первый способ не связан с теорией относительного движения. Здесь задача формулируется без введения сил инерции. Кинетическая энергия абсолютного движения системы выражается через относительные обобщенные координаты и относительные скорости точек системы. Обобщенные силы вычисляются обычным способом (для заданных активных сил). В этом способе силы инерции учитываются автоматически самой процедурой выписывания уравнений Лагранжа.

Второй способ основан на теории относительного движения. Задачу формулируют, вводя переносные и кориолисовы силы инерции. Кинетическую энергию здесь надо вычислять для относительного движения, а при подсчете обобщенных сил, помимо заданных активных сил, учитываются и силы инерции.

Если в первом и втором из указанных способов за обобщенные координаты приняты одни и те же величины, то мы придем к одним и тем же уравнениям движения.

7.8 Структура кинетической энергии.

Найдем выражение для кинетической энергии в виде функции от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\overrightarrow{r_i}}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r_j}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} a_j\dot{q}_j + a_0,$$

где

$$a_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j}\frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_k}, \qquad j,k = 1,\ldots,n$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j}\frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial t}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial t}\right)^2$$

Слагаемые в формуле для кинетической энергии в порядке их следования называют **квадратичной** (T_2), **линейной** (T_1) и **нулевой** (T_0) формами кинетической энергии. Полученная формула показывает, что кинетическая энергия голономной системы представляет собой функцию второй степени относительно обобщенных координат.

В случае склерономной системы эта функция однородна:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

7.9 Свойства уравнений Лагранжа: ковариантность, невырожденность (приведение к нормальному виду Коши).

Если обобщенные координаты q_i подвергнуть невырожденным дважды непрерывно дифференцируемым преобразованиям $q_i \to \tilde{q}_i$:

$$q_i = q_i(t, \tilde{q}_i),$$

то в новых переменных уравнения Лагранжа сохранят свою форму, то есть они ковариантны. Это очевидно, поскольку новые координаты так же являются параметризацией конфигурационного многообразия системы.

Теорема: *Определитель, составленный из коэффициентов $a_{jk}(q,t)$ отличен от нуля при любых q, t.*

Доказательство.

По определению, обобщенные координаты линейно независимы. Если всего обобщенных координат n, а точек N, то при $n = 3N$ функции координат всех точек линейно независимы. Если $n < 3N$, то среди этих функций находится n линейно независимых, а значит ранг матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

равен n. Следовательно, равен n и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \sqrt{m_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \sqrt{m_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{m_N}\frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \cdots & \sqrt{m_N}\frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

Введем столбец u_i, совпадающий с i-ым столбцом последней матрицы. Ранг этой матрицы равен n, поэтому эти столбцы линейно независимы. Но тогда составленный из них определитель Грама отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} u_1 \cdot u_1 & \dots & u_1 \cdot u_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ u_n \cdot u_1 & \dots & u_n \cdot u_n \end{vmatrix} \neq 0$$

Но

$$u_j \cdot u_k = a_{jk}$$

Теорема доказана.

В силу структуры кинетической энергии, уравнения Лагранжа всегда оказываются линейными относительно вторых производных от координат. Из доказанной выше теоремы и из того, что вторые производные появляются лишь из квадратичной формы энергии, следует, что уравнения Лагранжа разрешимы относительно вторых производных от координат. Это означает, что уравнения Лагранжа сводятся к форме Коши, то есть они невырожденны.

7.10 Первые интегралы лагранжевых систем: циклические интегралы, обобщенный интеграл энергии (интеграл Пенлеве-Якоби).

Рассмотрим уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Умножая их на $\dot{q}_i$ и суммируя по i, получаем следующее скалярное соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \ddot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] = 0$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt} L(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right),$$

то последнее соотношение переписывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{dL}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

Если функция Лагранжа от времени не зависит, то из записанного равенства следует первый интеграл:

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-L=const$$

Этот интеграл носит называние **обобщенного интеграла энергии** или **интеграла Пенлеве-Якоби**.

Еще один распространенный в механике тип первых интегралов составляют так называемые **циклические интегралы**. Они имеют место тогда, когда функция Лагранжа не зависит от некоторых координат $q_l, q_{l+1}, \ldots, q_n$ (называемых **циклическими**). Из уравнений Лагранжа с этими координатами следуют $n-l$ первых интегралов:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}=const,\qquad j=l,l+1,\ldots,n$$