ЛЕКЦИЯ 19

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА. ИНТЕГРАЛ ЯКОБИ

1. Дифференциальные уравнения аналитической динамики

Начнём эту лекцию с темы, которая была частично рассмотрена в прошлом семестре — с **дифференциальных уравнений аналитической динамики**. Были довольно подробно изучены уравнения Лагранжа второго рода. Напомним некоторые важные для последующего материала сведения.

Рассматривается голономная система, в которой введены обобщённые координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$. Функция Лагранжа зависит от обобщённых координат, скоростей и, может быть, времени. Выпишем уравнения Лагранжа второго рода, которые можно для краткости называть уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{19.1}$$

Если даны начальные условия, то есть все q_i и $\dot{q}_i$ в момент времени t_0 заданы, то, интегрируя уравнения (20.33), можно найти обобщённые координаты в любой последующий момент времени. Главные переменные в уравнениях Лагранжа — это q_i и t. Если решить эту систему уравнений, конечно, можно получить и обобщённые скорости $\dot{q}_i$. В n-мерном пространстве обобщённых координат положение системы в определённый мо-

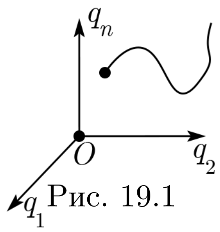

Рис. 19.1

мент времени соответствует точке в этом пространстве, а движение системы происходит по некоторой траектории в этом пространстве (рис. 19.1).

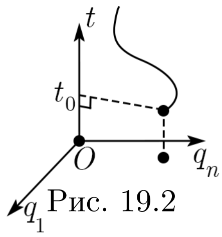

Рис. 19.2

Можно также рассматривать движение системы в расширенном координатном пространстве, где кроме обобщённых координат имеется также переменная t (рис. 19.2). Если в момент времени t_0 заданы все q_i, то траектория в этом пространстве, соответствующая движению системы, начинается в точке (q_i, t_0) и такова, что время t на ней монотонно.

Через каждую точку и в том, и в другом пространстве можно провести бесконечное число кривых, потому что обобщённые скорости остаются свободными. Поэтому наглядно представить себе движение системы в координатном или расширенном координатном пространстве не представляется возможным: решение определяется не только начальными координатами, но и скоростями, которые, вообще говоря, могут быть произвольными.

Введём новую переменную: обозначим обобщённые скорости $\dot{q}_i$ как r_i. Тогда система уравнений будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = r_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial r_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{19.2}$$

Система уравнений (19.2) содержит $2n$ уравнений первого порядка, неизвестные в ней — величины q_i и r_i. Теперь можно представлять движение в пространстве координат и скоростей, тогда картина будет более наглядной.

В классической механике, если заданы величины q и $\dot{q}$, то обобщённые ускорения определяются уравнениями движения, потому что можно вычислить все силы, действующие на систему. Таким образом, зная начальные координаты и скорости, можно узнать всё дальнейшее движение системы. Поэтому траектории в пространстве координат и скоростей будут уже не столь запутанными, как в чисто координатном представлении: если задано, что определённая точка принадлежит траектории, то автоматически известна и вся траектория. Переменные q, $\dot{q}$, t называются **переменными Лагранжа**, потому что от них зависят уравнения Лагранжа.

Кроме $r_i = \dot{q}_i$, можно ввести и другие замены переменных, чтобы свести уравнения Лагранжа к уравнениям первого порядка.

Будем предполагать, что определитель Гесса отличен от нуля:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_k}\right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{19.3}$$

В случае натуральной системы это условие всегда выполняется. Введём следующую величину:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{19.4}$$

Величина p_i — это **обобщённый импульс**, соответствующий обобщённой координате q_i. Это очень естественное понятие, и его физический смысл скоро станет понятен. Для этого приведём два примера.

1). Рассмотрим свободное движение материальной точки вдоль оси x. Её функция Лагранжа $L = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$. Обобщённый импульс, соответствующий координате x: $p_x = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$. Таким образом, обобщённый импульс точки по координате x — это обычный импульс этой точки.

2). Пусть твёрдое тело свободно вращается вокруг неподвижной оси. J — момент инерции этого тела вокруг оси вращения. Функция Лагранжа твёрдого тела $L = \dfrac{1}{2}J\dot{\phi}^2$, где ϕ — угол поворота тела вокруг неподвижной оси. Рассчитаем обобщённый импульс по координате ϕ: $p_\phi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = J\dot{\phi}$. Это не что иное, как кинетический момент тела относительно оси вращения.

Таким образом, понятие обобщённого импульса расширяет понятие импульса для обобщённых координат произвольного вида. Кроме того, введение этого понятия в механике оказалось очень плодотворно. При выполнении условия (19.3) можно разрешить относительно скоростей равенства (19.4):

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t). \tag{19.5}$$

Переменные q, p и t называются **переменными Гамильтона** или **каноническими переменными**. q_i и p_i при этом называются **канонически сопряжёнными переменными**. Переменные Гамильтона можно выразить через переменные Лагранжа (равенство (19.4)), а при выполнении условия (19.3) и переменные Лагранжа можно выразить через переменные Гамильтона.

Покажем, почему введение обобщённых импульсов важно для теоретической механики. В конце предыдущего семестра шла речь об интегралах уравнений Лагранжа. Вводилось понятие циклических координат. Напомним, обобщённая координата q_α называется **циклической**, если $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$. Таких координат может быть несколько. Для циклических координат справедливо важное утверждение.

Теорема 27 Обобщённый импульс, соответствующий циклической координате q_α, постоянен: $p_\alpha = c_\alpha = \text{const}$. *

Док-во: Напишем уравнение Лагранжа (20.33) по координате $i = \alpha$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt}p_\alpha = 0. \tag{19.6}$$

Поскольку производная по времени от p_α равна нулю, то этот обобщённый импульс постоянен во времени. ■

Заметим, что эту теорему можно применить к двум недавно рассмотренным примерам. В первом из них координата точки x — циклическая координата, поэтому импульс вдоль оси x сохраняется. Во втором угол поворота твёрдого тела ϕ вокруг неподвижной оси является циклической координатой, поэтому кинетический момент относительно этой оси сохраняется.

2. О преобразовании Лежандра

Преобразование Лежандра важно не только в разделе аналитической динамики, но и в естествознании в целом. Лежандр, французский математик, в конце XVIII века при изучении дифференциальных уравнений предложил преобразование, которое получило применение как в математике, так и в физике.

Рассмотрим некоторую функцию X, которая зависит от аргументов x_1, x_2, ..., x_n и, может быть, от параметров α_1, α_2, ..., α_m. Предположим, что определитель Гесса для этой функции не равен нулю:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \, \partial x_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{19.7}$$

Введём переменные y такие, что

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.8}$$

Также введём функцию Y такую, что

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - X. \tag{19.9}$$

Причём Y — это функция новых переменных y_i и параметров α_j, если таковые были у функции X. В выражении (19.9) предполагается, что величины x_i заменены своими выражениями через переменные y, а это всегда можно сделать, потому что выполняется условие (19.7). Функция $Y(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ называется **преобразованием Лежандра** функции $X(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Также преобразованием Лежандра называется переход от величин X, x к величинам Y, y.

Пример 14 Пусть $X = x^2$, параметров нет. Вводим переменную $y = \dfrac{\partial X}{\partial x} = 2x$. Условие (19.7), конечно, выполняется, потому что $\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 2 \neq 0$. Отсюда получаем, что $x = \dfrac{1}{2}, y$. Составляем функцию $Y = yx - X = y\dfrac{1}{2}y - \left(\dfrac{1}{2}y\right)^2 = \dfrac{y^2}{4}$. *

Теорема 28 (Теорема Донкина) Преобразование Лежандра $X, x \to Y, y$ имеет обратное преобразование, причём в обратном преобразовании

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{19.10}$$

а производные по параметрам связаны соотношениями

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}, \qquad j = 1, 2, \dots, m. \tag{19.11}$$

*

Док-во: Вычислим приращение функции Y как функцию приращений переменных y и параметров α:

$$\delta Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial y_i}\delta y_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}\delta \alpha_j = \sum_{i=1}^{n}(y_i\,\delta x_i + x_i\,\delta y_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i}\delta x_i - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X}{\partial \alpha_j}\delta \alpha_j. \tag{19.12}$$

Величины $y_i\,\delta x$ и $-\dfrac{\partial X}{\partial x_i}\delta x_i$ взаимно уничтожаются, так как справедлива формула (19.8) Теперь приравняем величины в правой и левой частях (19.12) при соответствующих дифференциалах. Если приравнять коэффициенты при δy_i, то получится соотношение (20.17), а если приравнять коэффициенты при $\delta\alpha_j$ — соотношение (19.11). ■

Преобразование Лежандра обладает свойством **инволютивности**, то есть если дважды последовательно применить преобразование Лежандра, то результатом будет исходная функция. Иными словами, дважды применённое преобразование Лежандра является тождественным преобразованием.

В физике преобразование Лежандра встречается, например, в термодинамике при рассмотрении соотношений между термодинамическими функциями, а в математике — в контактной геометрии. Имеются также и другие определения этого преобразования, но для целей данной лекции требуется именно то, что было дано выше.

3. Уравнения Гамильтона

Получим дифференциальные уравнения движения в переменных Гамильтона. Дана функция Лагранжа L в переменных Лагранжа: $L = L(q, \dot q, t)$. Применим преобразование Лежандра, считая функцию L функцией X, аргументы q и t — параметрами α, а величины $\dot q$ — переменными x. Тогда согласно определению обобщённого импульса (19.4), величины p_i играют роль новых переменных y_i. Составим сумму, соответствующую функции Y:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot q_i - L(q, \dot q, t). \tag{19.13}$$

В сумме (19.13) функцию L требуется выразить через гамильтоновы переменные q, p, t. Это можно сделать, так как выполняется условие (19.3). В итоге всего преобразования получается функция $H(q, p, t)$, которая называется **функцией Гамильтона**.

По теореме Донкина преобразование Лежандра обратимо; равенство (20.17) превращается в

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{19.14}$$

Кроме того, соотношение (19.11) превращается в равенства

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{19.15}$$

Подставим в уравнения Лагранжа (20.33) обобщённый импульс p_i:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{19.16}$$

Итак, получена система уравнений

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{19.17}$$

Уравнения (23.1) называются **уравнениями Гамильтона**. Это система $2n$ уравнений первого порядка. Неизвестные в этих уравнениях — гамильтоновы переменные. Система уравнений выглядит симметрично относительно переменных p и q. Существенная польза заключается в том, что эти уравнения разрешены относительно старших производных.

Равенства (19.15) показывают, что если какая-то переменная не входит в функцию Лагранжа, то она не входит и в функцию Гамильтона, и наоборот. Это касается и времени.

Уравнения Гамильтона используются в теоретической физике при изучении квантовой и статистической механики. Также эти уравнения позволяют построить теорию, называемую теорией возмущений. Она отталкивается от того, что известно точное решение приближённой системы; после этого строится возмущённая система, параметры которой немного отличаются от параметров исходной, и на основании уравнений Гамильтона можно вычислить поправки к исходному решению. Большинство лекций до конца курса будет посвящено аппарату гамильтоновой механики. Это поможет студентам при изучении теоретической физики.

Пример 15 Пусть материальная точка движется вдоль оси q. Функция Лагранжа этой точки $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \Pi(q)$. Необходимо получить уравнения Гамильтона. Запишем обобщённый импульс (равный в этом примере обычному импульсу):

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \to \quad \dot{q} = \frac{p}{m}. \tag{19.18}$$

Введём функцию Гамильтона:

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \Pi(q) = \frac{p^2}{2m} + \Pi(q). \tag{19.19}$$

Видно, что здесь функция Гамильтона — сумма потенциальной и кинетической энергии, то есть полная энергия, записанная в переменных Гамильтона. Наконец, запишем уравнения Гамильтона:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \tag{19.20}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}. \tag{19.21}$$

*

4. Физический смысл функции Гамильтона

Пусть рассматриваемая система натуральна. Это означает, что её функция Лагранжа представляется в виде $L = L_2 + L_1 + L_0$, где L_0 — постоянная, L_1 — линейная, а L_2 — квадратичная по скоростям составляющая. Аналогично, кинетическая энергия $T = T_2 + T_1 + T_0$. Запишем функцию Гамильтона:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(L_2 + L_1 + L_0)}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - (L_2 + L_1 + L_0). \tag{19.22}$$

По теореме Эйлера об однородных функциях $\dfrac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2L_2$, $\dfrac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = L_1$. Значит,

$$H = 2L_2 + L_1 - L_2 - L_1 - L_0 = L_2 - L_0. \tag{19.23}$$

Пусть система потенциальна. Тогда $L_0 = T_0 - \Pi$, а функция Гамильтона представляется в следующем виде:

$$H = T_2 - T_0 + \Pi. \tag{19.24}$$

Пусть система не только натуральна, но и склерономна. Тогда $T = T_2$, $T_0 = 0$. Для функции Гамильтона получаем

$$\boxed{H = T + \Pi.} \tag{19.25}$$

Таким образом, *у натуральной склерономной системы функция Гамильтона равна полной механической энергии.*

5. Интеграл Якоби

Пусть движение некоторой системы описывается уравнениями Гамильтона (23.1), $H = H(q, p, t)$. Найдём, как меняется функция Гамильтона со временем.

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{19.26}$$

Таким образом, *полная производная по времени от функции Гамильтона равна её частной производной по времени.*

Определение 57: *Материальная система называется* ***обобщённо-консервативной****, если её функция Гамильтона не зависит явно от времени: $H = H(q, p)$.* ♣

У обобщённо-консервативной системы имеется интеграл $H(p, q) = \text{const}$. Это следует из равенства (19.26), так как $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Предположим, что система натуральна. Тогда, как только что было показано, $H = T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const}$. Это и есть **интеграл Якоби**. Если система консервативна, то $T = T_2$, $T_1 \equiv 0$, $T_0 \equiv 0$. Тогда интеграл Якоби — это обычный интеграл энергии.

Консервативная система — это частный случай обобщённо-консервативной системы. Можно привести примеры, когда интеграл Якоби есть, а интеграла энергии нет. Рассмотрим следующий пример обобщённо-консервативной системы.

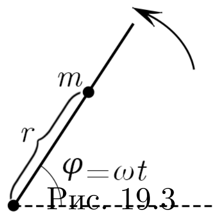

Рис. 19.3

Пример 16 Пусть стержень вращается в плоскости с постоянной угловой скоростью ω, силы тяжести нет. Угол между стержнем и горизонтальной осью: $\phi = \omega t$. На стержень надета бусина массой m (рис. 19.3). Расстояние до оси вращения равно r.

Кинетическая энергия бусины $T = \dfrac{1}{2} m \left(\dot{[h]}^2 + \omega^2 r^2\right)$. Потенциальная энергия равна нулю, потому что на бусину не действуют потенциальные силы. Составляющие кинетической энергии таковы: $T_2 = \dfrac{1}{2} m \dot{[h]}^2$, $T_0 = \dfrac{1}{2} m \omega^2 r^2$.

Поскольку функция Лагранжа не зависит от времени, то и функция Гамильтона не зависит от времени. Значит, система обобщённо-консервативна, и имеется интеграл Якоби:

$$\frac{1}{2} m \dot{[h]}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \text{const}. \tag{19.27}$$

Однако интеграла энергии нет, $T + \Pi \neq \text{const}$. Значит, рассмотренная система не является консервативной. $*$

6. Время и энергия как канонически сопряжённые переменные

Когда из функции Лагранжа выводилась функция Гамильтона посредством преобразования Лежандра, координаты и время считались параметрами α. Как уже было сказано, если какая-то координата является циклической, то импульс по ней постоянен. Если время не входит в функцию Лагранжа, то энергия постоянна. Напрашивается аналогия между координатой и импульсом с одной стороны, и временем и энергией с другой. В теории относительности, например, рассматривается четырёхмерное пространство координат и времени с метрикой Минковского. Посмотрим, как можно вывести уравнения движения, считая время одной из координат.

Пусть имеется функция Гамильтона $H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$. Добавим координату с номером $n+1$ и положим её равной времени: $q_{n+1} = t$. Рассмотрим систему с функцией Гамильтона $H^* = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}) + p_{n+1}$. Запишем уравнения движения для этой системы:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j}, \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j}, j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{19.28}$$

Для $j \leqslant n$ это уравнения Гамильтона для первоначальной системы:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.29}$$

Индексу $n+1$ отвечают уравнения

$$\frac{dq_{n+1}}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_{n+1}} = \frac{dt}{dt} = 1, \tag{19.30}$$

$$\frac{dp_{n+1}}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_{n+1}} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}. \tag{19.31}$$

Таким образом, обобщённый импульс, соответствующий $(n+1)$-ой координате, — это функция Гамильтона с обратным знаком: $p_{n+1} = -H$. Из (21.28) следует, что $H^* = \text{const}$ — обобщённый интеграл энергии. Причём $H^* = 0$, поскольку $p_{n+1} = -H$.

7. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения в случае существования циклической координаты

Используем уравнения Гамильтона для понижения порядка системы уравнений. Пусть координата q_α является циклической. Значит, функция Гамильтона такой системы $H = H(q_1, \ldots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1} \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, p_\alpha, p_{\alpha+1} \ldots, p_n, t)$. Вновь запишем уравнения Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.32}$$

Для $i = \alpha$ получаем, что $\dfrac{dp_i}{dt} = 0$, и $p_\alpha = c_\alpha = \text{const}$. С учётом этого можно переписать систему уравнений так:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, n, \tag{19.33}$$

причём $H = H(q_1, \ldots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1} \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{\alpha-1}, c_\alpha, p_{\alpha+1} \ldots, p_n, t)$. В системе гамильтоновых уравнений стало на два уравнения меньше: исключены уравнения, соответствующие циклической координате. Итак, наличие циклической координаты позволило понизить порядок системы уравнений на две единицы.

Предположим, что система уравнений (19.33) проинтегрирована:

$$q_i = q_i(t, c_\alpha, c_1, \ldots, c_{2n-2}), \tag{19.34}$$

$$p_i = p_i(t, c_\alpha, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{19.35}$$

Чтобы найти, как меняется циклическая координата, нужно подставить (19.34) и (19.35) в уравнение $\dfrac{dq_\alpha}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial c_\alpha}$. Тогда

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial c_\alpha}\, dt + C_{2n-1}. \tag{19.36}$$

Если циклических координат m, то можно таким способом понизить порядок системы уравнений на $2m$. Большинство уже проинтегрированных задач в теоретической механике содержат все n циклических координат. Если изначально их нет, то их иногда можно ввести посредством какой-нибудь сложной замены переменных.

Если функция Гамильтона системы не зависит явно от времени, если система имеет две степени свободы и одну циклическую координату, то можно свести решение системы уравнений Гамильтона к квадратурам. Это очевидно, потому что можно понизить

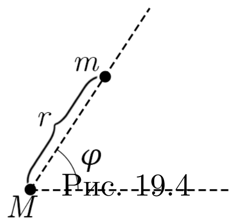

Рис. 19.4

порядок системы уравнений до двух; тогда существует интеграл энергии $H = \text{const}$, и оставшиеся два уравнения легко интегрируются.

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 17 Задача двух тел. Пусть в пространстве покоится материальная точка с большой массой M. Также имеется точка с массой m, намного меньшей чем M, так что можно считать, что первая точка вообще неподвижна. Как было показано в прошлом семестре, движение системы плоское. Пусть эта плоскость — плоскость рисунка 19.4. За обобщённые координаты примем координаты r и ϕ.

Выпишем необходимые функции:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{[h]}^2 + \omega^2 r^2 \right), \qquad \Pi = -\gamma \frac{Mm}{[} h]. \tag{19.37}$$

$$L = T - \Pi, \qquad H = T + \Pi. \tag{19.38}$$

Последнее равенство верно, так как система консервативна. Введём обобщённые импульсы:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{[h]}} = m\dot{[h]}, \tag{19.39}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}. \tag{19.40}$$

Разрешим эти формулы относительно обобщённых скоростей:

$$\dot{[h]} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}. \tag{19.41}$$

Подставляем найденные выражения в функцию H:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \gamma \frac{Mm}{[} h] + \frac{p_\phi^2}{mr^2}. \tag{19.42}$$

Так как координата ϕ — циклическая, то $p_\phi = c_\phi$. Равенство $p_\phi = \text{const}$ определяет интеграл площадей.

$$H = \frac{p^2}{2m} - \gamma \frac{Mm}{[} h] + \frac{c_\phi^2}{2mr^2}. \tag{19.43}$$

Выписываем уравнения Гамильтона:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p}{m}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial [} h] = -\gamma \frac{Mm}{r^2} + \frac{c_\phi^2}{mr^3}. \tag{19.44}$$

Это два уравнения относительно r и p_r. Известно, что эта задача интегрируется, и итоговые функции не слишком сложны. Принципиально важно, что $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$, значит, $H = \text{const}$, следовательно, равенство (19.43) задаёт связь между p_r и r. Подставим в первое уравнение (19.44) функцию $p_r(r)$ и получим два уравнения с разделяющимися переменными.

Это пример реальной системы с двумя степенями свободы, которую вышеописанным способом можно проинтегрировать в квадратурах. $*$

В заключение вернёмся к теме, рассматривавшейся в начале этой лекции. Говорилось, что сложно представить себе движение системы в пространстве обобщённых координат. Можно перейти в пространство q_i, p_i — **фазовое пространство**, в котором траектории нагляднее, поскольку через одну точку не может проходить больше одной траектории. Можно также перейти в **расширенное фазовое пространство**, содержащее переменные q, p, t. И там, и там движение системы представляется кривой, имеющей вполне однозначный вид.