ЛЕКЦИЯ 20

УРАВНЕНИЯ УИТТЕКЕРА И ЯКОБИ. УРАВНЕНИЯ РАУСА. СКОБКИ ЛАГРАНЖА

Продолжаем изучать уравнения гамильтоновой механики. На прошлой лекции с помощью преобразования Лежандра были получены центральные уравнения этого раздела, которые называются уравнениями Гамильтона. Был выяснен физический смысл функции Гамильтона; приводился способ понизить порядок системы, если одна или несколько обобщённых координат являются циклическими.

1. Уравнения Уиттекера и Якоби для консервативных и обобщённо-консервативных систем

Будем рассматривать материальную систему с n степенями свободы. Для этой системы записаны уравнения Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{20.1}$$

Будем предполагать, что функция Гамильтона H не зависит явно от времени. Такие системы, как было сказано на прошлой лекции, называются обобщённо-консервативными. Консервативная система — это частный случай обобщённо-консервативной системы.

В обобщённо-консервативных системах имеется обобщённый интеграл энергии

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h = \text{const}. \tag{20.2}$$

Константу h можно определить из начальных условий. Будем рассматривать движение на фиксированном уровне энергии. Необходимо узнать, какие движения возможны на этом уровне энергии. Интеграл (20.2) выделяет в $2n$-мерном фазовом пространстве некоторую гиперповерхность размерности $2n-1$. На этой лекции будет показано, что траектории на этой поверхности тоже можно описать уравнениями Гамильтона.

Оказывается, что при фиксированном уровне энергии можно понизить порядок системы уравнений на две единицы. Будем предполагать, что хотя бы по одному из импульсов частная производная функции H отлична от нуля. Без ограничения общности можно полагать, что это импульс по первой координате:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0. \tag{20.3}$$

Тогда уравнение (20.2), будучи рассмотрено как уравнение на p_1, разрешимо:

$$p_1 = -K(q_1, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h). \tag{20.4}$$

Если подставить выражение (20.4) в интеграл (20.2), получится тождество. Сделаем это и продифференцируем (20.2) по координатам и импульсам:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial q_j} = 0, \quad j = 2, \dots, n; \tag{20.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_j} = 0, \quad j = 2, \dots, n. \tag{20.6}$$

Отделим в системе уравнений Гамильтона (23.1) уравнения, отвечающие первой координате и импульсу.

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \tag{20.7}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}; \tag{20.8}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 2, \dots, n, \tag{20.9}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 2, \dots, n. \tag{20.10}$$

Поделим уравнения (20.9) на (20.7) и применим соотношение (20.6):

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_j}\right)}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad j = 2, \dots, n. \tag{20.11}$$

Теперь поделим уравнения (20.10) на соответствующие части того же уравнения (20.7) и применим равенство (20.5):

$$\frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\left(\dfrac{\partial H}{\partial q_j}\right)}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}, \qquad j = 2, \dots, n. \tag{20.12}$$

Выпишем получившиеся уравнения:

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad j = 2, \ldots, n, \tag{20.13}$$

$$\frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j}, \qquad j = 2, \ldots, n. \tag{20.14}$$

Уравнения (20.13) и (20.14) называются **уравнениями Уиттекера**. Система этих дифференциальных уравнений имеет порядок $2n-2$. Таким образом, на фиксированном уровне энергии уравнения движения тоже можно записать в гамильтоновой форме, при этом роль функции Гамильтона играет функция $K = -p_1$, а роль независимой переменной играет соответствующая координата q_1.

Лирическое отступление. По мнению лектора, книги Уиттекера «Курс современного анализа» и «аналитическая динамика» достойны внимания. В первой из них хорошо изложены специальные функции; этот курс рекомендуется для самостоятельного изучения.

Предположим, что уравнения (20.13) и (20.14) проинтегрированы. Тогда найдены функции $q_j = q_j(q_1, h, c_1, \ldots, c_{2n-2})$, $p_j = p_j(q_1, h, c_1, \ldots, c_{2n-2})$, $j = 2, \ldots, n$. Если подставить их в (20.4), то получится функция p_1 от тех же переменных. Найденные функции p_1, q_j, p_j $(j = 2, \ldots, n)$ задают траекторию в $2n$-мерном фазовом пространстве, а параметром является q_1. Чтобы найти q_1 как функцию времени, подставим найденные функции в равенство (20.7):

$$\frac{dq_1}{dt} = f(q_1, h, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{20.15}$$

Отсюда получаем выражение для времени t:

$$t = \int \frac{dq}{f} + c_{2n-1}. \tag{20.16}$$

Это неявная запись зависимости $q_1(t, h, c_1, \ldots, c_{2n-2})$. Подставив эту функцию q_1 в выражения для p_1, q_j, p_j $(j = 2, \ldots, n)$, получим, как меняются эти величины во времени, следовательно, найдём закон движения.

Итак, если функция Гамильтона не зависит от времени и выполняется условие (20.3), то можно, как и в случае наличия циклической координаты, понизить порядок системы уравнений на две единицы. В этом случае можно представить уравнения движения в гамильтоновой форме, причём роль функции Гамильтона играет функция $K = -p_1$, а роль независимой переменной — координата q_1.

С помощью преобразования Лежандра можно представить уравнения Гамильтона в форме уравнений Лагранжа (второго рода). Введём обозначения ${q_1}' \overset{\text{def}}{=} 1$, ${q_j}' \overset{\text{def}}{=} \dfrac{dq_j}{dq_1}$, $j = 2, \ldots, n$. Теперь введём функцию $P = P(q_1, \ldots, q_n, p_1, {q_2}', \ldots, {q_n}', h)$ с помощью преобразования Лежандра:

$$P = \sum_{j=2}^{n} p_j {q_j}' - K. \tag{20.17}$$

Согласно (20.13),

$${q_j}' = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad j = 2, \ldots, n. \tag{20.18}$$

Потребуем, чтобы следующий определитель был не равен нулю:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial p_j \, \partial p_l} \right\|_{j,l=2}^{n} \neq 0. \tag{20.19}$$

При условии (20.19) равенства (20.18) можно разрешить относительно p_j, подставить в (20.17) и таким образом избавиться от импульсов p. После этого можно написать уравнения движения в форме уравнений Лагранжа. Роль функции Лагранжа играет функция P, называемая **функцией Якоби**.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_j{}'} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 2, \dots, n. \tag{20.20}$$

Получим некоторые важные свойства функции Якоби. Преобразуем выражение (20.17):

$$P = \sum_{j=2}^{n} p_j q_j{}' + p_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i{}' = \frac{1}{\dot{q}_1}\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = \frac{L + H}{\dot{q}_1}. \tag{20.21}$$

Пусть система консервативна. Тогда $L = T - \Pi$, $H = T + \Pi$, а T является квадратичной формой по скоростям. Выражение (20.21) в этом случае превращается в

$$P = \frac{2T}{\dot{q}_1}. \tag{20.22}$$

Выпишем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\dot{q}_i \dot{q}_k = \dot{q}_1 G, \tag{20.23}$$

где $G = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i{}' q_k{}'$. У консервативной системы $T + \Pi = h = \text{const}$. Тогда из формулы (20.22) следует, что $\dot{q}_1 = \sqrt{\dfrac{h - \Pi}{G}}$.

$$P = \frac{2\dot{q}_1^2 G}{\dot{q}_1} = 2\sqrt{(h - \Pi)G}. \tag{20.24}$$

Уравнения Уиттекера и Якоби не будут подробно рассматриваться в данном курсе. Студентам важно только знать, что они есть, что они отвечают определённому уровню энергии. Данные уравнения пригодятся в решении одной задачи из задания, а также при выводе одного из вариационных принципов механики, который будет получен в конце этого семестра.

2. Уравнения Рауса

Чтобы получить уравнения Гамильтона, нужно было перейти от переменных Лагранжа $q, \dot{q}, t$ к переменным Гамильтона q, p, t с помощью преобразования Лежандра. Раус предложил несколько иной подход: применить преобразование Лежандра только для части координат, а остальные оставить в виде Лагранжевых переменных.

Пусть система обладает n степенями свободы. **Переменными Рауса** называются величины $q_i, \dot{q}_i, q_\alpha, p_\alpha, t$, где $i = 1, \dots, k$, $\alpha = k+1, \dots, n$. Введём обобщённые импульсы для последних $n-k$ координат:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \qquad \alpha = k+1, \dots, n. \tag{20.25}$$

Чтобы q_α выражались через p_α, потребуем, чтобы определитель Гесса для них был отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial \dot{q}_\beta} \right\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n} \neq 0. \tag{20.26}$$

Если система натуральна, то это условие всегда выполняется. В самом деле, раз кинетическая энергия является положительно определённой квадратичной формой, $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} \, \dot{q}_i \dot{q}_k$, то $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \, \partial \dot{q}_\beta} = a_{\alpha\beta}$, а $\det \|a_{\alpha\beta}\|_{\alpha,\beta=k+1}^{n}$ по критерию Сильвестра положителен.

Произведём преобразование Лежандра для последних $n-k$ координат. Все остальные k переменных играют роль параметров α. Таким образом, параметрами преобразования являются все обобщённые скорости, первые k обобщённых скоростей и время.

$$R = \sum_{\alpha=k+1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L. \tag{20.27}$$

Подставим сюда выражения для $\dot{q}_\alpha$, которые получаются из соотношений (20.25). Тогда $R = R(q_i, \dot{q}_i, q_\alpha, p_\alpha, t)$, $i = 1, \dots, k$, $\alpha = k+1, \dots, n$. Из теоремы об обращении преобразования Лежандра следует, что

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial[}{\partial h}]p_\alpha, \qquad \alpha = k+1, \dots, n; \tag{20.28}$$

$$\frac{\partial[}{\partial h}]q_i = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{20.29}$$

$$\frac{\partial[}{\partial h}]q_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \tag{20.30}$$

$$\frac{\partial[}{\partial h}]\dot{q}_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{20.31}$$

$$\frac{\partial[}{\partial h}]t = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{20.32}$$

Напомним, что исходные уравнения Лагранжа имели вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{20.33}$$

Если индекс j является одним из первых k индексов, то из (20.29), (20.31) и (20.33) следует, что новое уравнение для координаты q_j выглядит так же, как и исходное, только L заменяется на $-R$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[}{\partial h}]\dot{q}_j - \frac{\partial[}{\partial h}]q_j = 0, \qquad j = 1, \dots, k. \tag{20.34}$$

Остальные уравнения имеют вид

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial[}{\partial h}]p_\alpha, \qquad \alpha = k+1, \dots, n, \tag{20.35}$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial[}{\partial h}]q_\alpha, \qquad \alpha = k+1, \dots, n. \tag{20.36}$$

Уравнения (20.34), (20.35) и (20.36) называются **уравнениями Рауса**. Часть их них имеет вид уравнений Лагранжа, а остальные имеют вид уравнений Гамильтона. Функция R называется **функцией Рауса**.

В технической литературе уравнения Рауса часто применяются, чтобы понижать порядок системы с циклическими координатами и, судя по всему, это был один из самых ранних способов применения этих уравнений.

3. Понижение порядка системы с циклическими координатами при помощи уравнений Рауса

Пусть система имеет некоторое число циклических координат. Обозначим эти координаты как q_α, $\alpha = k+1, \dots, n$. Соответствующие им импульсы постоянны:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = c_\alpha = \text{const}. \tag{20.37}$$

Пусть выполняется условие (20.26). Тогда соотношения (20.25) можно разрешить относительно $\dot{q}_\alpha$. Запишем уравнения Рауса, пользуясь методикой, описанной в предыдущем разделе:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[}{\partial h}]\dot{q}_j - \frac{\partial[}{\partial h}]q_j = 0, \qquad j = 1, \dots, k, \tag{20.38}$$

$$\frac{q_\alpha}{dt} = \frac{\partial[}{\partial h}]p_\alpha, \qquad \alpha = k+1, \dots, n, \tag{20.39}$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial[}{\partial h}]q_\alpha, \qquad \alpha = k+1, \dots, n. \tag{20.40}$$

Тогда $R = R(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, c_{k+1}, \dots, c_n, t)$, $i = 1, \dots, k$, $\alpha = k+1, \dots, n$. [1] Первые k уравнений системы (а именно, (20.38)) отделяются от остальных. Они содержат только константы $c_{k+1}, \dots, c_n$, координаты $q_1, \dots, q_k$ и скорости $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$. Таким образом, порядок системы уравнений понижен на $2k$ единиц. Если удастся решить систему уравнений (20.38), можно подставить найденную функцию R в уравнения (20.39) и, проинтегрировав их, получить зависимость q_α от времени.

Рассмотрим пример, который уже рассматривался на прошлой лекции — задачу двух тел.

Пример 18 Пусть в пространстве покоится материальная точка с большой массой M. Также имеется точка с массой m, намного меньшей, чем M, так что можно считать, что первая точка вообще неподвижна. Как было показано в прошлом семестре, движе-

[1] Лектор ошибся! $R = R(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, c_{k+1}, \dots, c_n, t)$.

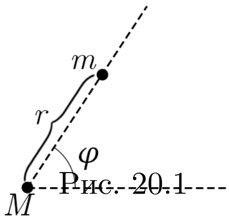

Рис. 20.1

ние системы плоское. Пусть эта плоскость — плоскость рисунка 20.1. За обобщённые координаты примем координаты r и ϕ.

Выпишем необходимые функции:

$$T = \frac{1}{2}m\left([\dot{h}]^2 + \omega^2 r^2\right), \qquad \Pi = -\gamma\frac{Mm}{[}h]. \tag{20.41}$$

$$L = T - \Pi, \qquad H = T + \Pi. \tag{20.42}$$

Координата ϕ — циклическая. Обобщённый импульс по ней таков:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = c_\phi = \text{const}. \tag{20.43}$$

Значит, $\dot{\phi} = \dfrac{c_\phi}{mr^2}$. Составим функцию Рауса:

$$R = c_\phi\dot{\phi} - L = c_\phi\frac{c_\phi}{mr^2} - \frac{1}{2}m\left([\dot{h}]^2 + r^2\frac{c_\phi^2}{m^2r^4}\right) - \gamma\frac{Mm}{[}h] = -\frac{1}{2}m[\dot{h}]^2 - \gamma\frac{Mm}{[}h] + \frac{c_\phi^2}{2mr^2}.$$
(20.44)

Запишем уравнения Рауса:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[}{\partial h}][\dot{h}] - \frac{\partial[}{\partial h}][h] = 0, \tag{20.45}$$

$$m[\ddot{h}] + \gamma\frac{mM}{[}h] - \frac{c_\phi^2}{mr^3} = 0. \tag{20.46}$$

После того как уравнение (20.46) будет проинтегрировано, зависимость ϕ от времени можно найти с помощью равенства (20.43).

Посмотрим на эту задачу иначе. Введём так называемый **приведённый потенциал**, или **потенциал Рауса** Π_*:

$$T_* = \frac{1}{2}m[\dot{h}]^2, \qquad \Pi_* = -\gamma\frac{mM}{[}h] + \frac{c_\phi^2}{2mr^2}. \tag{20.47}$$

Тогда запишем уравнение Лагранжа для функции $L_* = T_* - \Pi_*$. Это будет то же самое уравнение (20.46). $*$

Циклические координаты также иногда называют **скрытыми** или **игнорируемыми**: в уравнении (20.46) ϕ не фигурирует, однако движение по этой координате проявляется в константе площадей c_ϕ, от которой зависит тип движения. В выражении для приведённого потенциала к исходному потенциалу добавилось слагаемое за счёт скры-

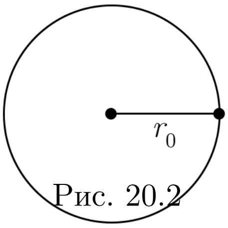

Рис. 20.2

того движения. Генрих Герц в начале XX века предложил концепцию, что все потенциальные силы обусловлены скрытыми движениями. Эта идея не оказалась плодотворной в теоретической механике.

Исследуем систему двух тел на наличие и устойчивость круговых движений. Пусть $r = r_0 = \mathrm{const}$. Тогда $c_\phi = mr_0^2\omega$.

$$\frac{\partial \Pi_*}{\partial [}h] = \frac{\gamma m M}{r^2} - \frac{c_\phi^2}{mr^3}. \tag{20.48}$$

Должно выполняться условие

$$\frac{\gamma m M}{r_0^2} - \frac{m^2 r_0^4 \omega^2}{m r_0^3} = 0, \tag{20.49}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0^3}}. \tag{20.50}$$

Итак, в задаче двух тел существуют круговые орбиты. Теперь определим, являются ли эти орбиты устойчивыми. Вычислим вторую производную потенциала по r:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial [^2}h](r_0) = -\frac{2\gamma M m}{r^3} + \frac{3c_\phi^2}{mr^4}\bigg|_{r=r_0} = m\omega^2 > 0. \tag{20.51}$$

На основании теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы можно заключить, что круговые орбиты в центральном поле сил являются устойчивыми.

4. Скобки Лагранжа

Рассмотрим $2n$ функций от переменных x, y: ϕ_j и Ψ_j, $j = 1, \ldots, n$. Составим такие определители:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi_j}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_j}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Psi_j}{\partial x} & \dfrac{\partial \Psi_j}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Psi_j}{\partial x}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{20.52}$$

Составим сумму всех таких определителей:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right). \tag{20.53}$$

Сумма (22.41) называется **скобкой Лагранжа** для функций ϕ_j и Ψ_j. Она обозначается $[x, y]$. Она обладает свойством коммутативности:

$$[x, y] = -[y, x]. \tag{20.54}$$

Скобка Лагранжа от одного и того же аргумента равна нулю:

$$[x, x] = 0, \qquad [y, y] = 0. \tag{20.55}$$

В качестве примера рассмотрим функции $\phi_j = q_j$, $\Psi_j = p_j$ для некоторой системы с n степенями свободы. Подсчитаем некоторые скобки Лагранжа для таких функций.

$$[q_j, q_k] = 0, \qquad [p_j, p_k] = 0, \tag{20.56}$$

$$[q_j, p_k] = \delta_{ik}, \tag{20.57}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Выражения (20.56) и (20.57) называются **основными**, или **фундаментальными** скобками Лагранжа.

Следующая лекция начнётся с рассмотрения **скобок Пуассона**. Это понятие, похожее на скобки Лагранжа, но оно оказалось более важно в математике и в динамике.