ЛЕКЦИЯ 18

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ НА МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СКЛЕРОНОМНОЙ СИСТЕМЫ. АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

На прошлых лекциях изучались колебания консервативных систем. В частности, в прошлый раз была рассмотрена задача о нормальных, или главных колебаниях консервативной системы. Теперь изучим поведение консервативной системы в случае, когда на неё действуют периодические внешние силы, и вычислим отклик системы на это периодическое воздействие. При этом очень помогает введение нормальных координат.

1. Колебания консервативной системы под действием внешних периодических сил

Рассмотрим консервативную систему с n степенями свободы. Пусть обобщённые координаты в положении равновесия обращаются в ноль: $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$. Введём нормальные координаты. Это делается заменой переменных $\vec{q} = U\vec{\theta}$, где введены обозначения $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$, $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_n \end{pmatrix}$. Матрица U состоит из n амплитудных векторов:

$U = \|\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\|$. Замену переменных также можно представить следующими записями:

$$\vec{q} = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \vec{u}_j; \tag{18.1}$$

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \theta_j. \tag{18.2}$$

Уравнения колебаний в нормальных координатах имеют вид

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.3}$$

Предположим, что кроме внутренних потенциальных сил на систему действуют также периодические внешние силы. Обобщённые силы, соответствующие внешним воздействиям, равны $Q_i(t)$.

Как уже говорилось, очень эффективно использовать нормальные координаты. Без этого нужно было бы написать линейные по q дифференциальные уравнения с правыми частями, содержащими Q_i, и искать частное решение. Общее решение было бы суммой решения однородной системы уравнений и частного решения неоднородной. Но с использованием нормальных координат всё становится намного проще.

Введём вектор, состоящий из обобщённых сил: $\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ \ldots \\ Q_n(t) \end{pmatrix}$ и вычислим соответствующий вектор обобщённых сил в нормальных координатах $\vec{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1(t) \\ \ldots \\ \Theta_n(t) \end{pmatrix}$. Затем подставим этот вектор в правую часть уравнений (18.3), и будем искать общее решение этой системы.

Чтобы получить вектор $\vec{\Theta}$, сравним работу на виртуальных перемещениях в исходных и нормальных координатах, используя равенство (18.2).

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{j=1}^{n} u_j \,\delta\theta_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_i \right) \delta\theta_j. \tag{18.4}$$

Величина, стоящая в скобках в равенстве (18.4), и есть новая обобщённая сила, так как это коэффициент при $\delta\theta_j$. Таким образом,

$$\Theta_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_i. \tag{18.5}$$

Или, если записать это в матричном виде:

$$\vec{\Theta} = U^T \vec{Q}. \tag{18.6}$$

Уравнения в нормальных координатах принимают такой вид:

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = \Theta_j(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.7}$$

Пусть внешняя периодическая сила имеет период $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$. Разложим функции Θ_j в ряд Фурье:

$$\Theta_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{jk} \sin\bigl(k\Omega t + \alpha_{jk}\bigr). \tag{18.8}$$

Общее решение однородной системы уравнений (18.3) имеет вид $\theta_j = c_j \sin\bigl(\omega_j t + \alpha_j\bigr)$. Частное решение неоднородной системы обозначим как $\theta_j^*(t)$. Будем искать его в таком же виде, как и $\Theta_j(t)$. Вычисления простые, для краткости сразу запишем ответ:

$$\theta_j^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{jk}}{\omega_j^2 - k^2\Omega^2} \sin\bigl(k\Omega t + \alpha_{jk}\bigr), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.9}$$

Теперь можно выписать общее решение системы (18.7), пользуясь формулой (18.1):

$$\vec{q} = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{u}_j \sin\bigl(\omega_j t + \alpha_j\bigr) + \sum_{j=1}^{n} \theta_j^*(t)\vec{u}_j. \tag{18.10}$$

Заметим, что в формуле (18.9) знаменатель может обратиться в ноль, если для каких-то j и k

$$\omega_j = k\Omega. \tag{18.11}$$

Если для какого-либо j и какого-то k это условие выполняется, а соответствующий числитель отличен от нуля, то имеет место **резонанс вынужденных колебаний**. Иными словами, вынужденный резонанс имеет место, когда одна из частот собственных колебаний консервативной системы кратна частоте внешнего возмущения.

Понятие резонанса должно быть хорошо известно из курса общей физики. Наличие резонансов усложняет нахождение частного решения, но всё же оно может быть найдено.

Рассмотрим такой пример. Пусть у консервативной системы имеется одна степень свободы, и уравнение колебаний в нормальных координатах выглядит так:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = a \sin\omega t, \tag{18.12}$$

где a — положительная константа.

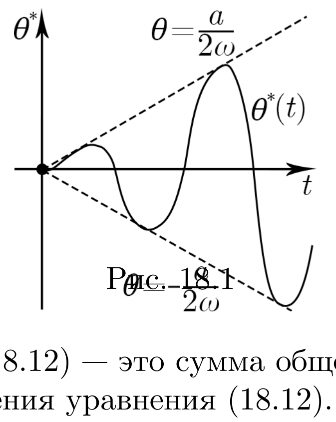

Рис. 18.1

Общее решение уравнения (18.12) — это сумма общего решения однородного уравнения $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ и частного решения уравнения (18.12). Можно убедиться, что функция $\theta^* = -\dfrac{a}{2\omega}\, t\cos t$ является частным решением этого уравнения. График решения $\theta^*(t)$ изображён на рис. 18.1. Он заключён между прямыми $\theta = \dfrac{a}{2\omega}t$ и $\theta = -\dfrac{a}{2\omega}t$. В какие-то моменты времени θ обращается в ноль, но в целом происходит увеличение амплитуды колебаний, и отклонение может стать сколь угодно большим.

Из этого нужно сделать такой вывод: в случае резонанса в системе о малости колебаний говорить нельзя. Если для малых колебаний и можно написать линейные уравнения, то здесь может оказаться, что член второго порядка более существенен, чем член первого порядка. Нужно прибегать уже к теории нелинейных колебаний. Теория нелинейных уравнений — это огромный раздел теории дифференциальных уравнений, который хорошо развит и вряд ли когда-нибудь будет изучен полностью. Из-за ограниченности учебной программы в данном курсе этот раздел освещаться не будет.

Теперь остановимся на самом понятии резонанса. В естествознании это понятие имеет несколько смыслов. В учебных курсах и учебниках обычно приходится иметь дело с резонансом вынужденных колебаний, когда частота собственных колебаний кратна частоте внешней периодической силы. Но кроме того о резонансе можно говорить, когда никакой внешней силы нет.

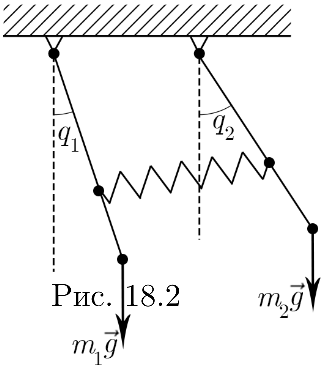

Рис. 18.2

4.2 cm

Рассмотрим два математических маятника, колеблющихся в поле тяжести. Они связаны пружиной (рис. 18.2). Требуется найти движение системы при отсутствии внешнего периодического возмущения.

За обобщённые координаты примем углы их отклонения от вертикали q_1 и q_2. Оказывается, что в такой системе есть две частоты колебаний ω_1 и ω_2. Может случиться так, что $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$, k_1 и k_2 — целые числа. Тогда говорят, что в этой системе есть резонанс. Это резонанс внутренний, не зависящий от внешних причин, он обуславливается только отношением собственных частот колебания системы. Если бы планка, на которой подвешены маятники, тоже стала двигаться с некоторой частотой, то в такой системе могли бы возникнуть и вынужденные резонансы.

Чаще всего в природе и технике отношение частот не точно равно некоторому рациональному числу, а чуть-чуть больше или чуть-чуть меньше этого числа. Тогда ситуация близка к резонансу, а иногда неотличима от резонанса, потому что в реальных системах всегда имеется затухание колебаний.

Задачи с резонансами встречаются во многих областях физики. Иногда по резонансам можно качественно определить поведение системы. Лектор сам начинал свою научную карьеру, работая с резонансами, возникающими в задаче движения спутника, например, когда период колебания спутника совпадает с периодом обращения по орбите. В общей сложности он работал над ними около 50 лет. Необходимость изучения резонансов существует и по сей день.

В Солнечной системе тоже есть резонансы. Каждая планета движется по своей орбите и имеет свою частоту обращения. Если относить Плутон к числу планет, то этих планет — девять. Все девять частот обращения ω_i установлены с достаточной точностью. Составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{9} k_i\omega_i$, где k_i — целые числа. Оказывается, что можно подобрать такие числа k_i, что эта сумма практически обращается в ноль. Таким образом, Солнечная система почти резонансна. Это создаёт существенные трудности при вычислении орбит планет: возникают малые знаменатели типа $\omega_j - k^2\Omega^2$. Теория малых знаменателей — это колоссальная проблема в небесной механике.

Заметим, что числа k_i, о которых шла речь, малы. Конечно, можно сказать, что даже если отношение частот иррационально, например, $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{2}$, то можно подобрать рациональное число, сколь угодно мало от него отличающееся. Например, для отношения частот $\sqrt{2}$ можно взять отношения целых чисел $\dfrac{14}{10}, \dfrac{141}{100}, \dfrac{1414}{1000}, \ldots$ Числа в числителе и знаменателе становятся большими, так что физически это уже не резонансы. А вот в случае малых чисел резонанс вполне ощутим. Для Солнечной системы числа k_i не превосходят 5.

Возникает вопрос: почему же Солнечная система резонансна? Вряд ли она была создана так изначально. Более естественно думать, что к резонансу привели какие-то процессы, происходящие в ней. Пока что речь шла о процессах без диссипации энергии, но в Солнечной системе диссипация может быть, например, сопротивление межпланетного вещества, внутренние процессы в самих планетах. Значит, Солнечная система, скорее всего, в процессе эволюции скатилась в резонансную ситуацию. Вопрос, почему это случилось, до сих пор открыт. Также не решён вопрос, что дальше будет происходить с отношением частот, сохранится ли резонансная ситуация или нет, или же резонанс будет достигаться со всё большей степенью точности.

В 60-х годах эта проблема очень волновала научное сообщество, особенно в СССР. Советскими учёными А. Колмогоровым и В. Арнольдом была разработана теория малых знаменателей; за рубежом над этой проблемой работал Ю. Мозер. Они создали т. н. теорию КАМ, или теорию Колмогорова – Арнольда – Мозера. Лектор, учась в аспирантуре МФТИ, читал их работы, потому что его живо интересовала эта тема. Ему казалось, что эта проблема резонансов в Солнечной системе вот-вот будет решена, но это оказалось не так. Несмотря на усилия многих советских и иностранных учёных задача всё ещё не решена. Но не лишним будет вопрос о том, нужно ли вообще решать эту задачу. Этот вопрос имеет также нравственный оттенок, потому что он касается того, что случится с Солнечной системой, и что будет происходить с другими планетарными системами через времена порядка миллиарда лет.

2. Малые колебания склерономной системы под действием сил, не зависящих от времени

Запишем выражение для кинетической энергии склерономной системы:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k. \tag{18.13}$$

Пусть обобщённые силы не зависят от времени. Запишем уравнения Лагранжа (второго рода):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.14}$$

Предположим, что начало координат является положением равновесия, то есть существует решение $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$. Чтобы система могла находиться в состоянии равновесия, необходимо, чтобы $Q_i(0,0) = 0$. Требуется узнать, как будет вести себя склерономная система в такой задаче.

Выделим линейную часть из правой и левой частей уравнения (20.33). Для этого, прежде всего, разложим a_{ik} в ряд Тейлора:

$$a_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = a_{ik}(0, 0, \ldots, 0) + \ldots \tag{18.15}$$

Оставим в кинетической энергии только слагаемые, квадратичные по скоростям. То есть оставим только постоянные составляющие в разложении (18.15). Тогда

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{18.16}$$

где a_{ik} — уже число, а не функция.

Далее, разложим обобщённые силы в ряд Тейлора:

$$Q_i = Q_i(0,0) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right) q_k + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \ldots. \tag{18.17}$$

В разложении (18.17) производные берутся в начале координат. Введём обозначения $c_{ik} \overset{\text{def}}{=} -\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_k}\right)$, $b_{ik} \overset{\text{def}}{=} -\left(\dfrac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k}\right)$. С учётом этих обозначений

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}q_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k. \tag{18.18}$$

Подставим выражения (18.16) и (18.18) в (20.33):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\ddot{q}_k + b_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k\right) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.19}$$

Теперь уравнения Лагранжа линеаризованы. Введём вектор $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \ldots \\ q_n \end{pmatrix}$ и матрицы $A \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$, $C \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$. В векторной форме получаем систему уравнений

$$A\ddot{\vec{q}} + B\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = 0. \tag{18.20}$$

Будем искать решение в виде $\vec{q} = \vec{u}\,\mathrm{e}^{\varkappa t}$, $\varkappa = \mathrm{const}$. Подставим это в уравнение (18.20):

$$\|A\varkappa^2 + B\varkappa + C\|\vec{u}\,\mathrm{e}^{\varkappa t} = 0. \tag{18.21}$$

Нетривиальное решение уравнения (18.21) может существовать только тогда, когда определитель матрицы перед вектором $\vec{u}$ равен нулю. Это условие даёт уравнение на число κ:

$$\det\|A\kappa^2 + B\kappa + C\| = 0. \tag{18.22}$$

Уравнение (18.22) называется **вековым уравнением**. Это уравнение на число κ. Его решения — в общем случае $2n$ чисел κ_1, κ_2, ..., κ_{2n}. Предположим для простоты, что все эти числа различны. Тогда каждому κ_i соответствует свой вектор, и все такие векторы линейно независимы. При этом частное решение уравнения (18.20) имеет вид

$$\vec{q}_l = \vec{u}_l\, \mathrm{e}^{\kappa_l t}, \qquad l = 1, 2, \dots, 2n. \tag{18.23}$$

Общее решение — это линейная комбинация этих векторов:

$$\vec{q} = \sum_{l=1}^{2n} c_l \vec{u}_l\, \mathrm{e}^{\kappa_l t}, \tag{18.24}$$

где c_l — произвольные константы. Это общее решение и описывает колебания склерономной системы в окрестности её положения равновесия. Если у всех κ_l вещественная часть меньше нуля, то при $t \to \infty$ $\vec{q} \to \vec{0}$, и начало координат будет **асимптотически устойчивым положением равновесия**. У линейной системы при этом все решения будут стремиться в начало координат.

3. Влияние внешних периодических сил на малые колебания склерономной системы. Амплитудно-фазовая характеристика

Пусть помимо обобщённых сил $Q_i\big(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\big)$ на систему действуют периодические силы $\vec{Q}(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ \dots \\ Q_n(t) \end{pmatrix}$. С их учётом уравнение (18.20) принимает такой вид:

$$A\ddot{\vec{q}} + B\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{Q}(t). \tag{18.25}$$

Необходимо исследовать, как влияют периодические силы на малые колебания склерономной системы в окрестности положения равновесия. Так как система линейна, то применительно к ней действует принцип суперпозиции внешних сил. Поэтому будем считать, что все периодические силы действуют только по первой координате: $Q_1(t) \neq 0$, $Q_2(t) = 0$, ..., $Q_n(t) = 0$. $Q_1(t)$ можно представить в виде ряда Фурье. В соответствии с принципом суперпозиции можно рассмотреть только одну гармонику $Q_1(t) = \alpha \sin \omega t$. Результирующим решением будет сумма по всем гармоникам. Для дальнейших вычислений удобно представить эту гармонику в виде экспоненты от мнимого аргумента:

$$\tilde{Q}_1(t) = \alpha\, \mathrm{e}^{i\omega t}\,. \tag{18.26}$$

Тогда $Q_1(t) = \Im \tilde{Q}_1(t)$. Все вычисления будем проводить в комплексной форме, а чтобы в конце получить результирующий отклик, в решении выделим мнимую часть. Распишем покоординатно систему уравнений (18.25):

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{1k}\ddot{q}_k + b_{1k}\dot{q}_k + c_{1k}q_k) = \alpha\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n. \end{cases} \tag{18.27}$$

Общее решение этой системы — это сумма общего решения однородной части, определяемого равенством (18.24), и частного решения $\vec{q}^{\,*}$:

$$\vec{q} = \sum_{l=1}^{2n} c_l \vec{u}_l\,\mathrm{e}^{\kappa_l t} + \vec{q}^{\,*}, \tag{18.28}$$

причём $\vec{q}^{\,*} = \Im \vec{\tilde{q}}^{\,*}$. Предположим, что все корни векового уравнения (18.22) имеют отрицательные вещественные части. Значит, при $t \to \infty$ общее решение однородной системы уравнений стремится к нулю. Через достаточно большой промежуток времени останутся только вынужденные колебания, обусловленные внешней периодической силой.

Будем искать вектор $\vec{\tilde{q}}^{\,*}$ в виде

$$\vec{\tilde{q}}^{\,*} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^* \\ \ldots \\ \tilde{q}_n^* \end{pmatrix}, \qquad \tilde{q}_k^* = \tilde{\beta}_k\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.29}$$

Нужно вычислить, как зависит $\tilde{\beta}_k$ от α, найти мнимую часть от $\vec{\tilde{q}}^{\,*}$, и тогда задача будет решена. Подставим решение (18.29) в систему уравнений (18.27). Тогда это будет система линейных уравнений для неизвестных постоянных $\tilde{\beta}_k$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[a_{1k}(i\omega)^2 + b_{1k}(i\omega) + c_{ik}\right] \tilde{\beta}_k = \alpha, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \left[a_{jk}(i\omega)^2 + b_{jk}(i\omega) + c_{jk}\right] \tilde{\beta}_k = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, n. \end{cases} \tag{18.30}$$

Эта система уравнений неоднородна: в первом из них слева от знака равенства стоит α. Применим правило Крамера:

$$\tilde{\beta}_k = W_{1k}(i\omega)\alpha, \qquad W_{1k} = \frac{\Delta_{1k}(i\omega)}{\Delta(i\omega)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{18.31}$$

где $\Delta_{1k}(i\omega)$ — определитель алгебраического дополнения элемента, стоящего в первой строке и k-том столбце, $\Delta(i\omega)$ — определитель всей матрицы системы. Знаменатель в этом равенстве не равен нулю, поскольку вещественные части всех корней однородной системы не равны нулю. График комплекснозначной функции W_{1k} от ω в плоскости комплексного переменного называется **амплитудно-фазовой характеристикой**. Индекс 1 в W_{1k} указывает на то, что периодическая сила действует на переменную с номером 1. Индекс k соответствует координате, отклик по которой нужно изучить.

Введём обозначение $R_{1k}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |W_{1k}(i\omega)|$. $R_{1k}(\omega)$ — это **амплитудная характеристика**. Тогда

$$W_{1k}(i\omega) = R_{1k}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\Psi_{1k}(\omega)t}, \tag{18.32}$$

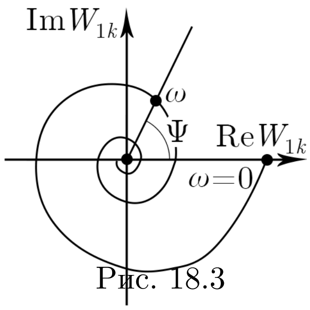

Рис. 18.3

где $\Psi_{1k}(\omega)$ — **фазовая характеристика**.

Нарисуем график функции W_{1k} в комплексной плоскости (рис. 18.3). Амплитудная функция — это длина отрезка от точки, соответствующей ω, до точки $(0,0)$, а фазовая функция — угол между этим отрезком и положительным направлением действительной оси. Частоте $\omega = 0$ соответствует точка на действительной оси. При $\omega \to \infty$ амплитудно-фазовая характеристика стремится к точке $(0,0)$, потому что $\dfrac{\Delta_{1k}(i\omega)}{\Delta(i\omega)}$ — это правильная дробь: степень знаменателя по ω на единицу больше, чем степень числителя. .

$$q_k^* = \Im \tilde{q}_k^* = \Im W_{1k}(i\omega)\alpha\,\mathrm{e}^{i\omega t} = \Im \alpha R_{1k}(\omega)\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\Psi_{1k}(\omega))} = \alpha R_{1k}(\omega)\sin\left(\omega t+\Psi_{1k}(\omega)\right). \quad (18.33)$$

Итак, отклик системы на внешнее синусоидальное периодическое воздействие представляется в виде синусоиды с такой же частотой. При этом амплитуда колебаний умножается на амплитудную характеристику $R_{1k}(\omega)$, а фаза сдвигается на фазовую характеристику $\Psi_{1k}(\omega)$.

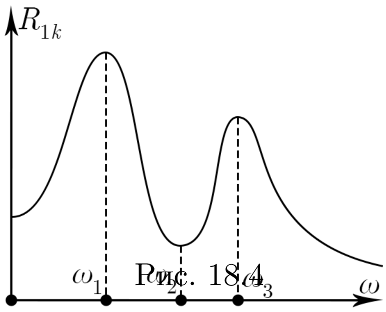

Рис. 18.4

Нарисуем график функции $R_{1k}(\omega)$. Эта функция принимает только положительные значения. Вид графика функции зависит от матриц A, B и C. Например, он может иметь вид, изображённый на рис. 18.4. Величины ω_1 и ω_3 на рисунке соответствуют локальным максимумам, а ω_2 — локальному минимуму. При $\omega \to \infty$ амплитудная характеристика стремится к нулю.

Меняя частоту ω внешней периодической силы, можно изменять силу отклика системы. Если при каких-то частотах вблизи ω_1 R_{1k} имеет ярко выраженный максимум, то при этих частотах происходит усиление отклика, а в точках локальных минимумов, наоборот, происходит гашение колебаний. Если сделать частоту достаточно высокой, то система практически перестаёт реагировать на это воздействие.

В случае, когда воздействие представляет собой сумму гармоник ряда Фурье, на качественном уровне всё то же самое, нужно просто просуммировать отклики от каждой из гармоник. Если внешняя сила действует не по первой, а по l-той обобщённой координате, то все вычисления производятся аналогично, только в правой части системы

(18.30) α будет стоять в уравнении с номером $j = l$, а соответствующие амплитудная и фазовая характеристики будут обозначаться как $R_{lk}(\omega)$ и $\Psi_{lk}(\omega)$.